

On wild knots which are weakly flat

広島大理 垣水修 (Osamu Kakimizu)

1. Introduction.

三次元球面 S^3 のなかの topological knot — S^3 のなかに topological にうめこまれた S^1 — を考える。ふたつの性質 “flatness” と “weak flatness” とのギャップに関する考察から得られた結果 (Theorem I, II, III) について述べる。

top. knot $J \subset S^3$ が flat であるとは, homeo.

$h: S^3 \rightarrow S^3$ で $h(J) = S^1$ をみたすものが存在することである。ここで $S^1 \subset S^3$ は standard な 1-sphere である。

また, top. knot $J \subset S^3$ が weakly flat であるとは, $S^3 - J$ が $S^3 - S^1$ と homeomorphic になることである。

“top. knot $J \subset S^3$ はいつ weakly flat になるか?”

については, つぎの homotopy theoretic ながたちの解が得られている。(Daverman [6]).

Weak flatness criterion. top. knot $J \subset S^3$ が weakly flat であるためには, つぎの (1), (2) をみたすことが必要十分,

$$(1) \pi_1(S^3 - J) \cong \mathbb{Z},$$

(2) J は global 1-alg property をもつ i.e.

$S^3 \supset \bigcup_{\text{open}} U \supset J, U \supset \bigcup_{\text{open}} V \supset J$ s.t. $V - J$ の loop 2°
 $V - J$ のなかで null homologous なものは, $U - J$ のなかで null homotopic である.

PL 3-mfd M の closed subset X が tame であるとは, homeo. $h: M \rightarrow M$ で $h(X)$ が M の sub polyhedron になるものが存在することである. このような h が存在しないとき, X は wild であるという. Fig 1. は wild knot の例である.

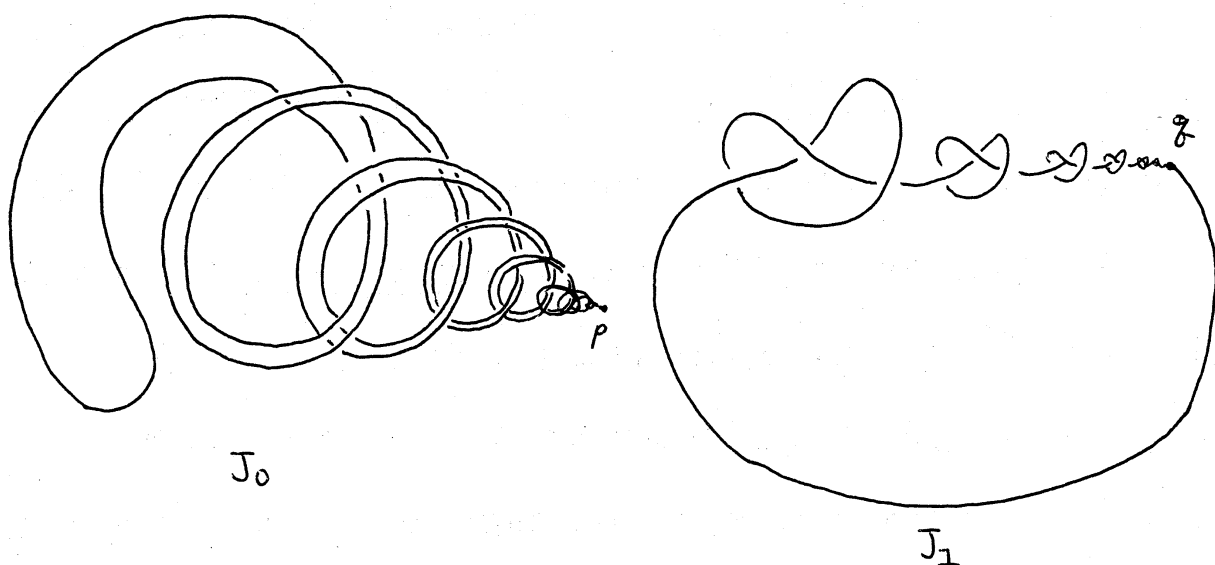


Fig. 1.

PL3-mf d M の sub set X と点 $x \in X$ に対して,

X : locally tame at x とは, x の M のなかで"の附近傍 U と, homeo. $\varphi: U \rightarrow \mathbb{E}^3$ ($x \in \text{Int } M$ のとき) または $\varphi: U \rightarrow \mathbb{E}_+^3$ ($x \in \partial M$ のとき) が存在して $\varphi(X \cap U)$ が $\mathbb{E}^3$ または $\mathbb{E}_+^3$ の sub polyhedron になることである.

PL3-mf d M のなかの proper な k -mf d L (i.e.

$\partial L \subset \partial M, \text{Int } L \subset \text{Int } M$) と点 $x \in L$ に対して,

L : locally flat at x とは, x の M のなかで"の附近傍 U が存在して, $(U, U \cap L)$ が, $x \in \text{Int } L$ のとき $(\mathbb{E}^3, \mathbb{E}^k)$ と, $x \in \partial L$ のとき, $(\mathbb{E}_+^3, \mathbb{E}_+^k)$ と homeomorphic になることである. このとき, " L : locally flat at x " と " L : locally tame at x " とは同値である.

$$E(L) = \{x \in L \mid L \text{ : not locally flat at } x \text{ in } M\}$$

とおく. $E(L)$ は L の closed subset であることに注意する.

Bing は [2] においてつき"の定理を証明した.

PL3-mf d のなかのすべての点で"locally tame な closed subset は tame である.

したがって top. k-mot $J \subset S^3$ に対して,

$$J \text{ : tame} \iff E(J) = \emptyset.$$

ここで"問題をつき"のかたちで考える.

"top. knot $J \subset S^3$ に対し, polyhedral knot $K \subset S^3$ が存在して, $S^3 - J$ が $S^3 - K$ と homeo. になっているとき, $E(J)$ はどのような性質をもつか?"

これに対してつき"の結果が得られた.

Theorem I. $S^3 \supset J$: top. knot に対して,

$S^3 \supset \exists K$: polyhedral knot

s.t. $S^3 - J \approx S^3 - K$ (homeomorphic)

$\Rightarrow E(J)$ は孤立点をもたない.

Corollary I'. $S^3 \supset J$ は Theorem I のものとする. 可算集合

$C \subset J$ に対して, J : locally flat at $\forall x \in J - C$.

$\Rightarrow J$: tame.

Corollary I''. $S^3 \supset J$: weakly flat top. knot に対し,

$J \supset \exists C$: 可算集合, J : locally flat at $\forall x \in J - C$.

$\Rightarrow J$: flat.

weakly flat かつ wild な knot が存在する. さらに一般に "つき" がなりたつ.

Theorem II. $S^3 \supset \forall K$: polyhedral knot に対して,

$S^3 \supset \exists J$: wild knot s.t.

(1) $S^3 - J \approx S^3 - K$.

(2) $E(J) = J$.

また, Theorem I において " $S^3 - J \approx S^3 - K$ " を
 " $S^3 - J \simeq S^3 - K$ (ホモトピー-同値)" に弱めることはできない.
 すなわち,

Theorem III. $S^3 \supset \forall K$: polyhedral knot に対して,

$S^3 \supset \exists J$: wild knot s.t.

(1) $S^3 - J \simeq S^3 - K$.

(2) $E(J) = \text{one point}$.

2. Theorem I の証明の概略.

Bing によって証明されたつき"の定理は重要な役割をもつ.

(2.1) Theorem (Bing [2, Th 9]). PL 3-manifold M の
 closed subset X に対し,

(a) X : locally tame at $\forall x \in X$

(b) $M \supset \exists Y$ closed subset, X : locally polyhedral
 at $\forall x \in X \cap Y$

$\Rightarrow \forall \varepsilon: M - Y \rightarrow (0, \infty)$ continuous map

$\exists h: M \rightarrow M$ homeo. s.t.

(c) $h|_Y = \text{id}$

(d) $d(h(x), x) < \varepsilon(x)$, $\forall x \in M - Y$

(e) $h(X)$: sub polyhedron of M .

J, K は Theorem I の仮定をみたしているとする。さらに、 $J \ni \rho$ に対して、 ρ の J で"の 隣近傍 U があって、 J : locally flat at $\forall x \in U - \rho$ で"あると仮定する。このとき、 J は点 ρ においても locally flat で"あることを示せば" Theorem I は示される。

まず、仮定 $S^3 - J \approx S^3 - K$ から、 S^3 のなかの locally flat な solid torus の列 $\{P_m\}$ で、

$$(1) \text{Int } P_m \supset P_{m+1}, \quad \bigcap_m P_m = J$$

$$(2) P_m - \text{Int } P_{m+1} \approx \partial P_m \times [0, 1]$$

をみたすものがとれる。

また、 $U \approx \mathbb{R}^1$ と仮定してよい。 ρ の S^3 における連結な隣近傍 W で、 $U = W \cap J$ となるものがとれる。(2.1) から、

$$\exists h: S^3 \xrightarrow{\approx} S^3 \text{ s.t. } h|_{S^3 - W} = \text{id}, \quad h(\rho) = \rho$$

$$W - \rho \supset h(U - \rho) \text{ sub polyhedron.}$$

したがってはじめから、 J : locally polyhedral at $\forall x \in U - \rho$ で"あると仮定してよい。 $U - \rho$ の $W - \rho$ のなかで"の regular

neighborhood をとり, z と p との union を N とおく.
 N は W の closed subset として, $(N-p, U-p) \approx (U-p) \times (B^2, 0)$.
 N' を Fig 2. のようにとると, $\exists \varphi: (N', \mathbb{E}', 0) \xrightarrow{\approx} (N, U, p)$.

$$N_+ = \varphi(N' \cap [0, 1] \times \mathbb{E}^2), \quad N_- = \varphi(N' \cap [-1, 0] \times \mathbb{E}^2)$$

$$D_+ = \varphi(N' \cap 1 \times \mathbb{E}^2), \quad D_- = \varphi(N' \cap (-1) \times \mathbb{E}^2)$$

$$E_+ = \partial N_+ - D_+^0, \quad E_- = \partial N_- - D_-^0$$

とおく. このとき $\{P_m\}$ は

$$(3) \quad \forall m, \quad P_m \cap (\partial D_+ \cup \partial D_-) = \emptyset$$

をみたすと仮定してよい.

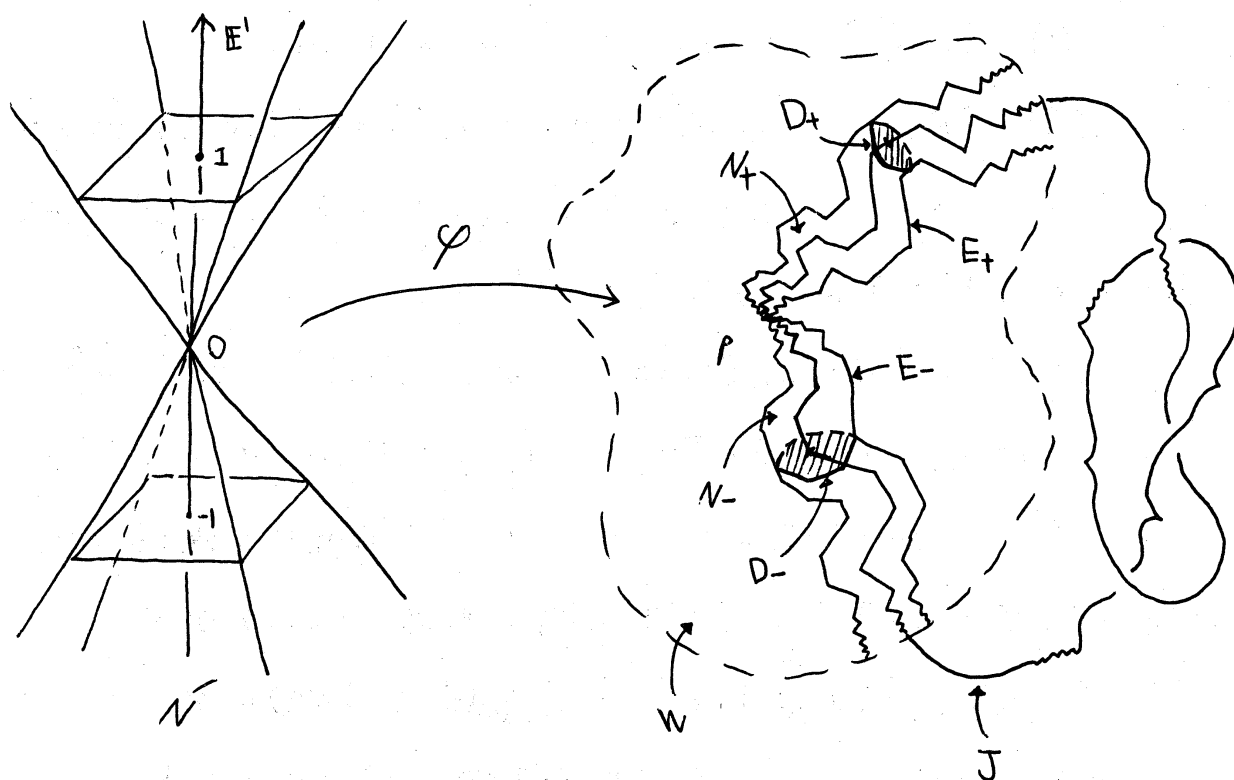


Fig. 2.

上記の $\{P_m\}$ に対して, (2.1) と General position theorem

から, $\exists h: S^3 \xrightarrow{\cong} S^3$ s. t.

$$(a) h|_J = id$$

$$(b) h(P_n) : \text{polyhedral solid torus}$$

$$(c) h(P_n) \cap (\partial D_+ \cup \partial D_-) = \emptyset$$

$$(d) h(\partial P_n) : \text{in general position relative to } \overset{\circ}{E}_+ \cup \overset{\circ}{E}_- - \rho.$$

このとき, $\{h(P_n)\}$ は再び (1)~(3) をみたす. したがって $\{P_n\}$ は, はじめから (1)~(3) および "つき" の (4), (5) をみたすと仮定してよい.

$$(4) S^3 \supset P_n : \text{polyhedral solid torus}$$

$$(5) \partial P_n : \text{in general position relative to } \overset{\circ}{E}_+ \cup \overset{\circ}{E}_- - \rho$$

ここで, $0 < \delta < \text{diam } J$ をひとつ fix する. "つき" をみたす $0 < \varepsilon < 1$ をとる. すなわち,

$$N_\varepsilon = \varphi(N' \cap [0, \varepsilon] \times \mathbb{E}^2), N_{-\varepsilon} = \varphi(N' \cap [-\varepsilon, 0] \times \mathbb{E}^2)$$

$$D_\varepsilon = \varphi(N' \cap \varepsilon \times \mathbb{E}^2), D_{-\varepsilon} = \varphi(N' \cap (-\varepsilon) \times \mathbb{E}^2)$$

$$E_\varepsilon = \partial N_\varepsilon - D_\varepsilon^\circ, E_{-\varepsilon} = \partial N_{-\varepsilon} - D_{-\varepsilon}^\circ.$$

とおくとき,

$$N_\varepsilon \cup N_{-\varepsilon} \subset \text{Int } P_1, \text{diam}(N_\varepsilon \cup N_{-\varepsilon}) < \delta.$$

ρ の $\text{Int } P_1$ のなかでの連結な開近傍 V で, $\text{diam } V < \delta$, $V \cap N = (N_\varepsilon - D_\varepsilon) \cup (N_{-\varepsilon} - D_{-\varepsilon})$ をみたすものをとる. ここで $F = \text{Fr } V - (D_\varepsilon^\circ \cup D_{-\varepsilon}^\circ)$ "つき" の条件をみたす $n_1 > 1$ が

とれることが示せる.

$$(6) \quad \forall n \geq m_1, \quad P_n \cap F = \emptyset$$

$$(7) \quad \forall n \geq m_1, \quad J \hookrightarrow P_n \text{ deformation retract}$$

$$(8) \quad \forall n \geq m_1, \quad P_n \supset X \text{ closed subset, } \text{diam } X < \delta \\ \Rightarrow X \text{ null homotopic in } P_n.$$

ここで δ は " $\delta < \delta_0$ ", $P \equiv P_{m_1}$ について考える. (5) から,

$$\partial P \cap (E_\varepsilon \cup E_{-\varepsilon}) = \partial P \cap (\dot{E}_\varepsilon \cup \dot{E}_{-\varepsilon} - P) = S_1 \cup \dots \cup S_k$$

有限個の互いに交わらない simple closed curve (s.c.c.).

(8) から, S_i : null homotopic in P だから, $\{S_i\}$ は "つき" のふたつに分類される.

(ア) S_i は ∂P 上 で "disk" を bound する.

(イ) S_i は P の meridian curve.

一方 S_i が E_ε または $E_{-\varepsilon}$ 上 で "bound" する disk を D_i とすると, $\{S_i\}$ は "つき" のように分類される.

(ア)' $D_i \not\subset P$

(イ)' $D_i \subset P$

このとき, 上記のふた通りの分類は一致する. 実際, S_i に対して,

$$(ア) \Leftrightarrow (ア)' \Leftrightarrow 0 = [S_i] \in H_1(S^3 - J) \cong \mathbb{Z}$$

$$(イ) \Leftrightarrow (イ)' \Leftrightarrow [S_i] \text{ は } H_1(S^3 - J) \text{ の generator.}$$

ここで, P を surgery することにより, (ア) = (ア)' type の S_i はすべて除去でき, (イ) = (イ)' type の S_i は

$\overset{\circ}{E}_\varepsilon - \rho$, $\overset{\circ}{E}_{-\varepsilon} - \rho$ 上にそれぞれひつつつにできる. こうして得られた polyhedral solid torus を R_1 とする.

つぎに $\text{Int } R_1 \supset P_{m_2}$ となる $m_2 > m_1$ をとり, P_{m_1} から R_1 を得た操作を P_{m_2} に適用して R_2 を作る. 以下この方法をくり返し適用してゆくことにより, S^3 のなかの polyhedral solid torus の列 $\{R_n\}$ で "つき" をみたすものがとれる.

$$(1) \text{Int } R_n \supset R_{n+1}, \quad \bigcap_n R_n = J$$

$$(2) R_n - \text{Int } R_{n+1} \approx \partial R_n \times [0, 1]$$

$$(3) \partial R_n \cap (\overset{\circ}{E}_\varepsilon - \rho) = S_n \quad \text{1個の S.C.C.}$$

$$\partial R_n \cap (\overset{\circ}{E}_{-\varepsilon} - \rho) = S'_n \quad \text{1個の S.C.C.}$$

$$S_n, S'_n \text{ は共に } R_n \text{ の S.C.C.}$$

ここで, ∂R_n 上のふたつの meridian curve s_n, s'_n によってかこまれる annulus のうち $\text{Int } N_\varepsilon \cup \text{Int } N_{-\varepsilon}$ と交わらない方を L_n とおき,

$$M_n = (R_n - \text{Int } R_{n+1}) \cap (V - \text{Int } N_\varepsilon \cup \text{Int } N_{-\varepsilon})$$

とおくと, E.M. Brown [5, Theorem (5.1)] から,

$$(M_n, L_n, L_{n+1}) \approx L_n \times ([0, 1], 0, 1)$$

が示せる.

s_1 と ∂E_ε , s'_1 と $\partial E_{-\varepsilon}$ がそれぞれ $E_\varepsilon, E_{-\varepsilon}$ 上でかこむ annulus を, A, A' とおき, 2-sphere $D_\varepsilon \cup A \cup L_1 \cup A' \cup D_{-\varepsilon}$ が S^3 のなかで bound する 3-cell のうち ρ を含むものを

C とする。このとき, Fig 3に示すようにして,

$$\text{homeo. } \varphi: (C, C \cap J) \rightarrow (B^3, B^1)$$

が得られる。したがって J は ρ において locally flat である。

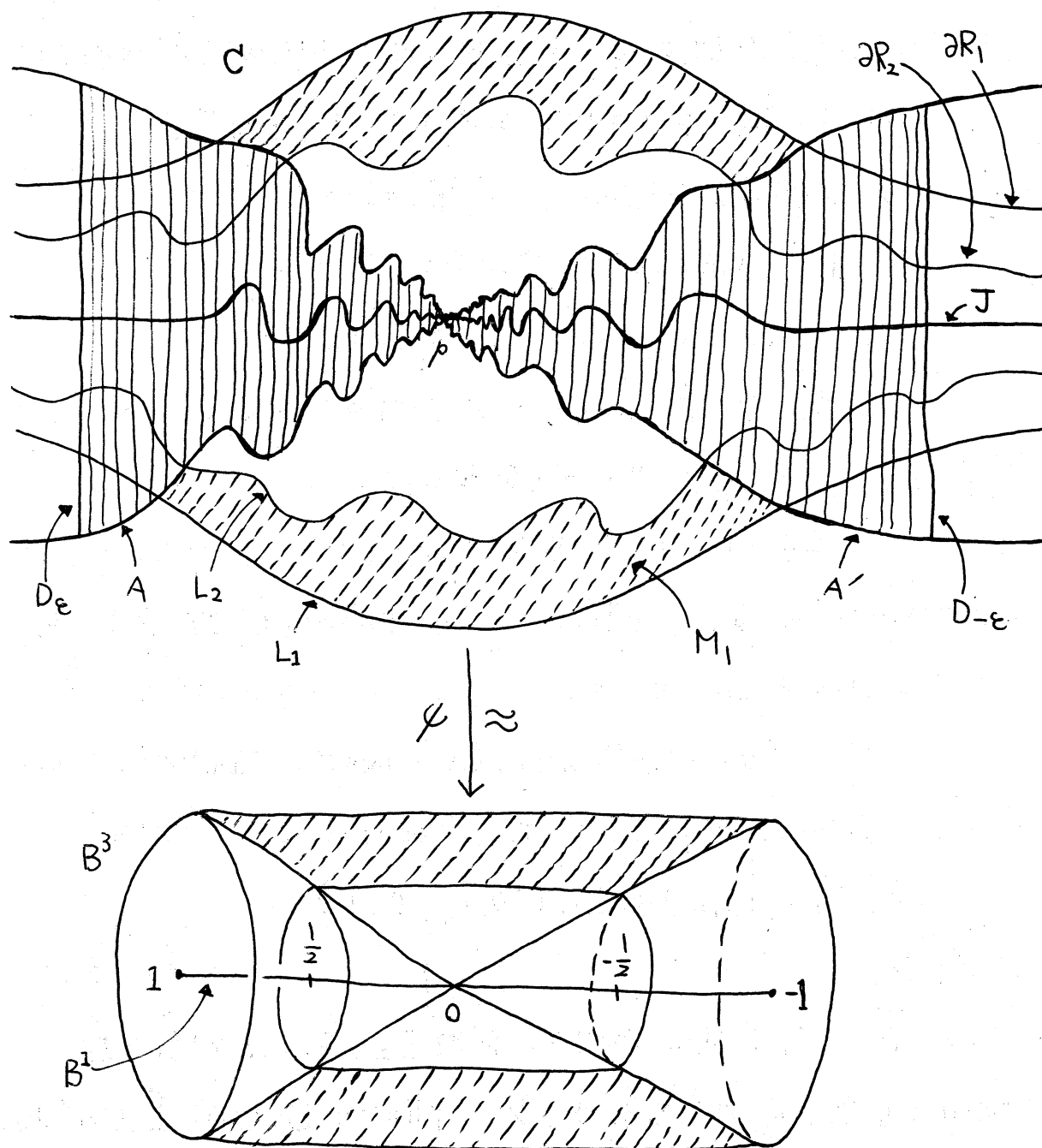


Fig. 3.

3. Theorem II の証明の概略.

(3.1) Theorem. wild knot $J^* \subset S^3$ で "つき" をみたすものが存在する.

(a) J^* : weakly flat

(b) $S^3 \supset \exists U \text{ open}, h: (U, U \cap J) \xrightarrow{\cong} (B^3, B^1)$

$D \equiv h^{-1}(B^3), D' \equiv S^3 - \text{Int} D$ とおくと

(c) $\text{Int} D' \supset E(J^*), E(J^*)$ は J^* の sub arc

(d) $D' - J^* \approx (\partial D - J^*) \times [0, \infty)$

Theorem (3.1) から Theorem II は "つき" のようにして得られる.
Polyhedral knot K に対して求める wild knot J を

$$J = K \# J^* \# J^* \# \dots$$

(K と無限個の J^* との connected sum) によって定まり"する.
ここで, 無限個の connected sum は一意的でないから
与えられた条件をみたすように連結の仕方を注意して指定
する必要がある. (Fig 4).

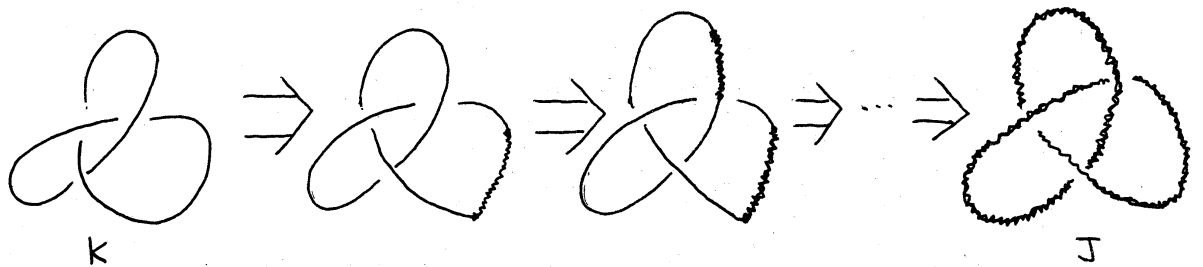


Fig. 4.

Theorem (3.1) の証明の方針:

(1) Bing の "hooked rug" の方法により, 特別な 3-cell $C \subset S^3$ を構成する. さらに $\text{Int } J^* \subset \partial C$, sub arc $A \subset J^*$, dense subset $X \subset A$ を選ぶ.

(2) $S^3 - C \approx \mathbb{R}^3$ を示す.

(3) ∂C : locally flat at $\forall x \in \partial C - A$,

$S^3 - C$: not 1-LC at $\forall x \in X$ を示す.

$S^3 - C$: 1-LC at $x \in X$ とは,
 $S^3 \supset \bigcup_{\text{open}} U \ni x$, $U \supset \bigcup_{\text{open}} V \ni x$ s.t. $V - C$ の任意の loop は $V - C$ で null homotopic となること.

これから, $E(\partial C) = A$ となる.

(4) A : cellular in S^3 を示す. i.e. S^3 のなかの 3-cell の列 $\{C_i\}$ で, $\text{Int } C_i \supset C_{i+1}$, $\bigcap_i C_i = A$ をみたすものが存在する. これは $S^3 - A \approx \mathbb{R}^3$ と同値である.

これから, $S^3 \approx S^3/A \supset \partial C/A \approx S^2$

$\partial C/A$: locally flat mod $\langle A \rangle$

ここで, 点 $\langle A \rangle \in \partial C/A$ は, projection $\partial C \rightarrow \partial C/A$ による A の image.

(5) $S^3/A \supset \partial C/A$: locally flat を示す.

これから, $S^3/A \supset J^*/A$: flat

したがって, $S^3 \supset J^*$: weakly flat.

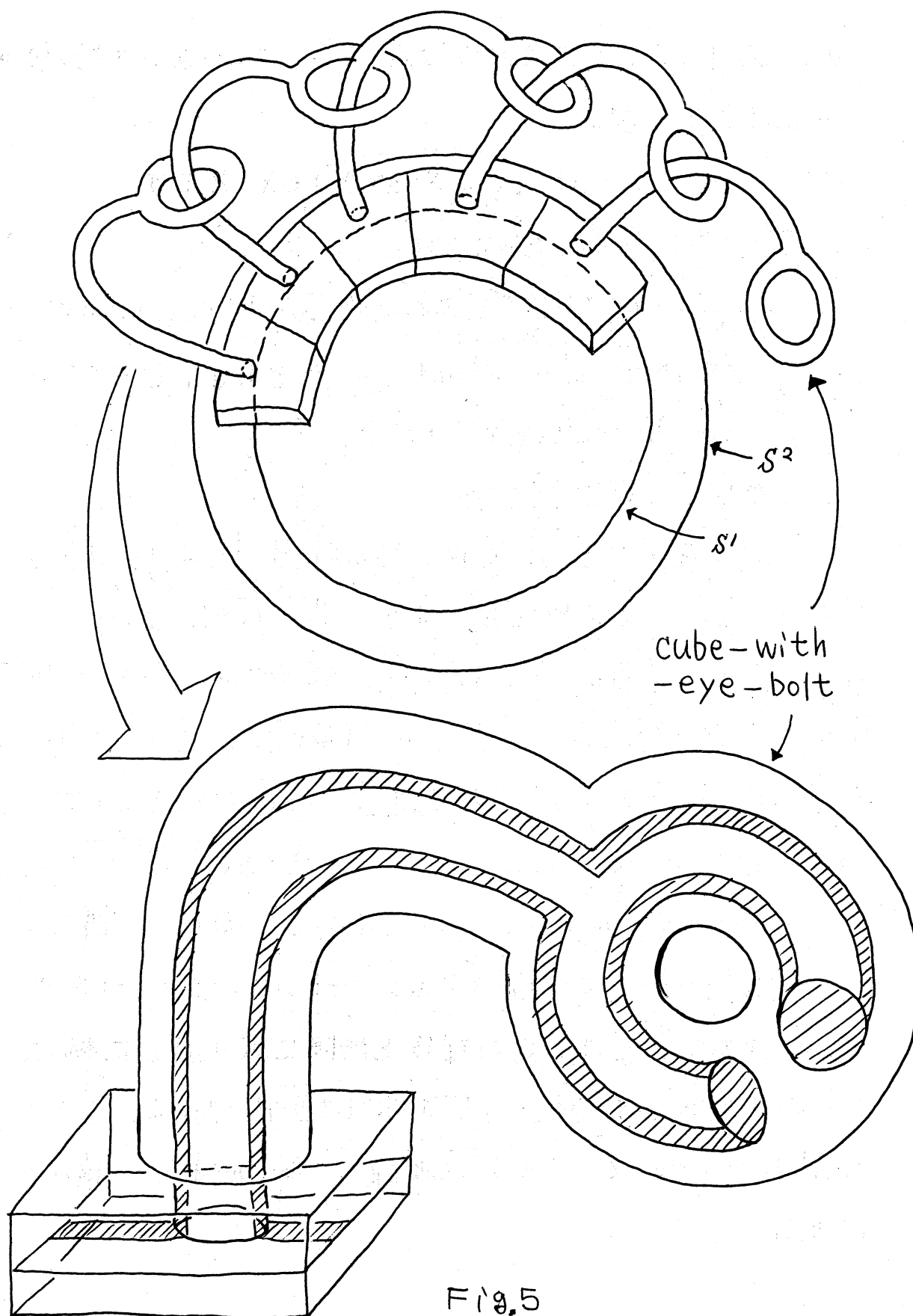
(6) U, h, D, D' を $\mathbb{I} \times D' \subset A$, $D' - J^* \approx (\partial D - J^*) \times [0, \infty)$ をみたすように選ぶ.

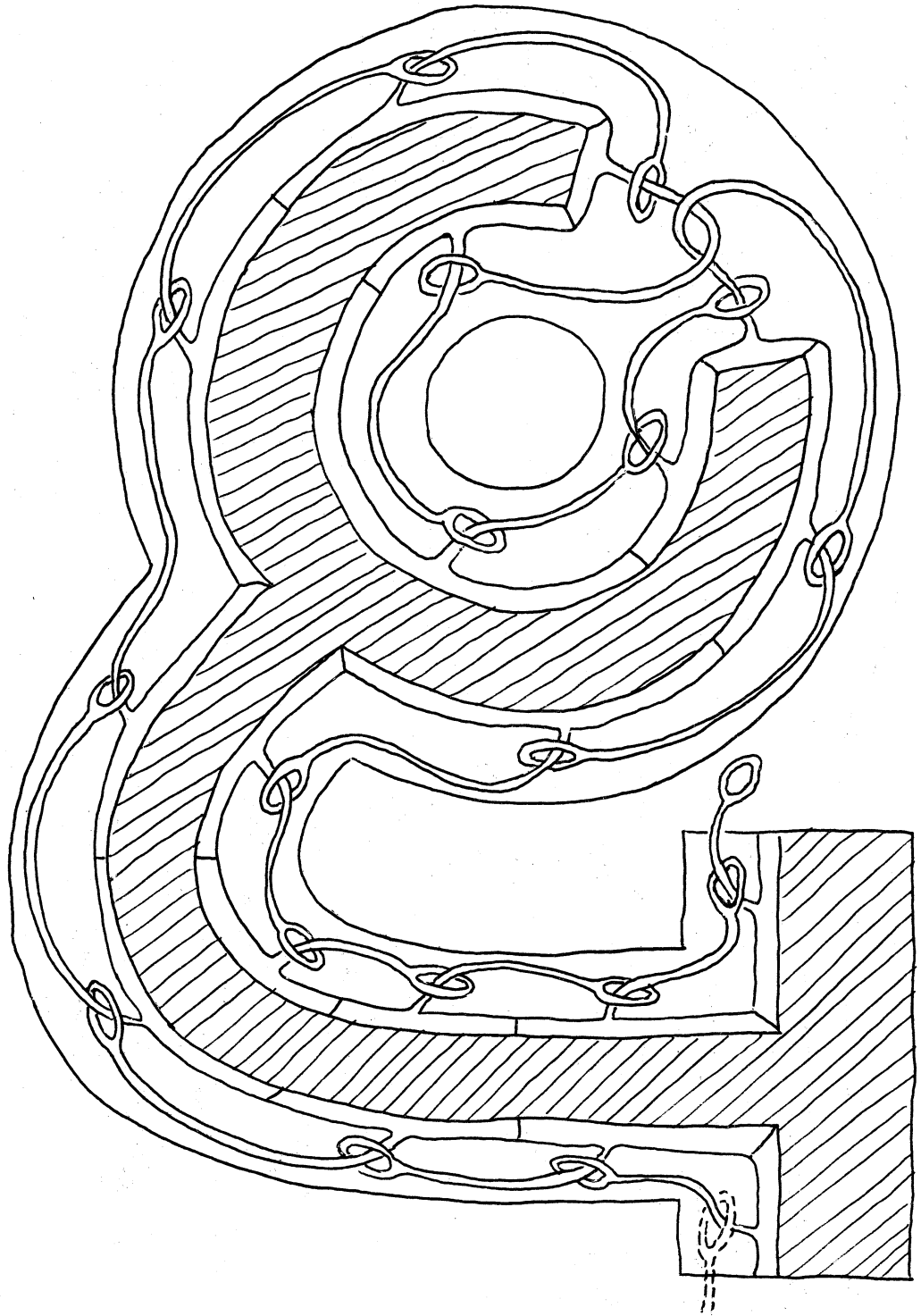
(7) $S^3 - J^* : \text{not } 1 - S S \text{ at } \forall x \in X$ を示す.

$\left(\begin{array}{l} S^3 - J^* : 1 - S S \text{ at } x \text{ とは,} \\ S^3 \supset \underset{\text{open}}{\forall} U \ni x, U \supset \underset{\text{open}}{\exists} V \ni x \text{ st. } V - J^* \text{ 内の loop で} \\ S^3 - J^* \text{ 内で "null homotopic" なものは, } U - J^* \text{ 内} \\ \text{で "null homotopic" となる.} \end{array} \right)$

これから, $E(J^*) = A$.

(1) の C の構成法については, Bing [3] と Alford [1] を参照のこと. その概略は, まず, S^3 のなかに flat な 3-cell をとり, その表面に, Fig 5 のように cube-with-eye-bolt を生やす. その各 cube-with-eye-bolt のなかに Fig 5 のように disk をとり, その disk の斜線部に, Fig 6 のようにして cube-with-eye-bolt を生やしてゆく. 各 eye-bolt の loop はつき"の eye-bolt の stem をまわる, ただし, 最後の loop は "free" で, 最初の eye-bolt の stem をまわる loop はない. C は, この操作を無限に繰り返した極限として得られる. J^* は Fig 5 の S' の極限である. また, A は S' 上の arc で, Fig 5 の破線で示した部分の極限である.





F'19.6

4. Theorem III の証明

Fig 1 の wild knot J_0 を考える。 $S^3 - J_0 \cong S^1$ 。
 $E(J_0) = \{P\}$ である (cf. Fox and Artin [8]).

polyhedral knot K に対し J を J_0 と K との
 connected sum として定義する。(Fig 7).

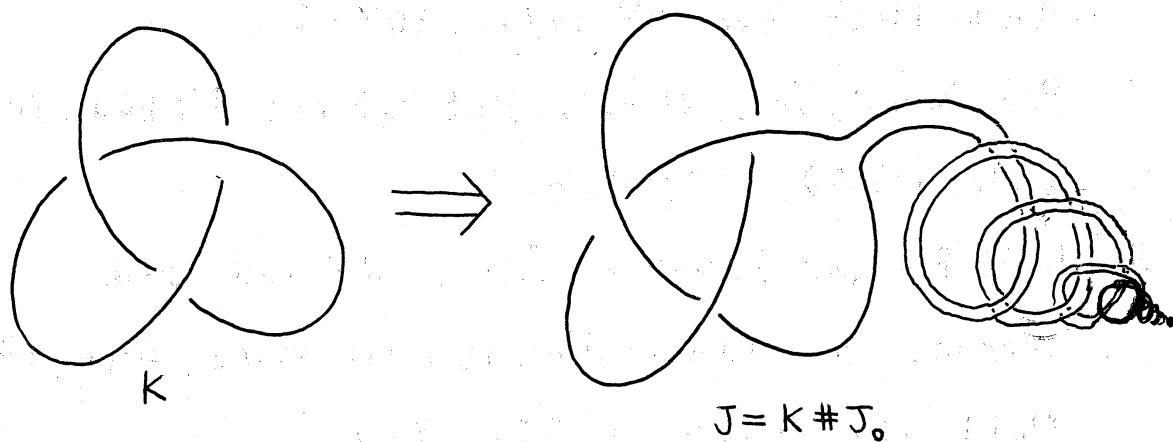


Fig. 7.

References

1. W.R. Alford, Some "nice" wild 2-spheres in $\mathbb{E}^3$,
 Topology of 3-manifolds and Related Topics,
 Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J. (1962), 29-33.
2. R.H. Bing, Locally tame sets are tame, Ann. of
 Math. (2) 59 (1954), 145-158.
3. ———, A wild surface each of whose arcs is
 tame, Duke Math. J. 28 (1961), 1-15.

4. _____, A surface is tame if its complements is 1-ULC, Trans. Amer. Math. Soc. 101 (1961), 294-305.
5. E.M. Brown, Unknotting in $M^2 \times I$, Trans. Amer. Math. Soc. 123 (1966), 480-505.
6. R. J. Daverman, On weakly flat 1-spheres, Proc. Amer. Math. Soc. 38 (1973), 207-210.
7. P. F. Duvall, Jr., Weakly flat spheres, Michigan Math. J. 16 (1969), 117-124.
8. R. H. Fox and E. Artin, Some wild cells and spheres in three-dimensional space, Ann. of Math. (2) 49 (1948), 979-990.
9. J. G. Hollingsworth and T. B. Rushing, Homotopy characterizations of weakly flat codimension 2 spheres, Amer. J. Math. 98 (1976), 385-394.
10. D. R. McMillan, Jr., A criterion for cellularity in manifold, Ann. of Math. (2) 79 (1964), 327-337.
11. D. V. Meyer, $\mathbb{E}^3$ modulo a 3-cell, Pacific J. Math. 13 (1963), 193-196.
12. D. Rolfsen, Knots and Links, Mathematics Lecture Series 7, Publish or Perish Inc. (1976).