

Types of automorphism groups of von Neumann algebras and Dye-Haga-Takeda's correspondence

大阪教育大 長 田 まり子

§ 1. はじめに

[7] において 芳賀 - 武田は ... finite von Neumann algebra $\mathcal{M}$ 上の automorphism のなす freely-acting な group G の subgroup K に対して $[K]$ を定義し, group が full であるという概念を導入した。更に G による $\mathcal{M}$ の crossed product $G \rtimes \mathcal{M}$ の sub-algebra と $[G]$ の full subgroup との関係と求め lattice { von Neumann algebra $\mathcal{C}; G \rtimes \mathcal{M} \supset \mathcal{C} \supset \mathcal{M}$ } と lattice { full group $K; [G] \supset K$ } の間に lattice isomorphism が存在することを証明した。この結果は [6] において, Dye が abelian von Neumann algebra $\mathcal{M}$ に対して示した結果の non-abelian case への拡張になっている。その時, Dye は automorphism group に対して, type を定義して, 上記の lattice isomorphism は type (von Neumann algebra とその type と automorphism group とその type) を保存することを示した。

ここでは必ずしも abelian ではない von Neumann algebra $\mathcal{A}$ の automorphism group に対して, type を定義し, 茅賀-武田の lattice isomorphism が D_{ge} における abelian case と同様に, type を保存している事を示していきたい。

§2. 定義と準備

以下, von Neumann algebra における用語は特にことわらない限り, [4] によるものとする。

$\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}^c$, $\mathcal{A}^p$ において, それぞれ von Neumann algebra, $\mathcal{A}$ の von Neumann sub-algebra, $\mathcal{A}$ における $\mathcal{B}$ の relative commutant $\mathcal{B}' \cap \mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ の projection 全体を表わすことにする。

又 $P \in \mathcal{A}^p$ に対して, $\overline{P}^{\mathcal{B}}$ により P の $\mathcal{B}$ -support を表わす。
すなわち,

$$\overline{P}^{\mathcal{B}} = \inf \{ Q \in \mathcal{B}^p; PQ = P \}.$$

von Neumann algebra の type (discrete & continuous) を決定するにはその中で abelian projection が大きな役割を果たす。そこで先づ $\mathcal{A}$ における abelian projection の定義を次の様に拡張する。

$E \in \mathcal{A}^p$ が, $E \in \mathcal{B}^c$ で, $E \geq P$ なる任意の $P \in \mathcal{A}^p$ が適当な $Q \in \mathcal{B}^p$ に対して $P = QE$ とかけるとき, E は $\mathcal{B}$ 上で abelian であるという。

明らかに, $\mathcal{B}$ が $\mathcal{A}$ の center のときには, $\mathcal{B}$ 上で abelian である

ということば、通常の意味で abelian であるということである。
 又、特に $\mathcal{A}$ が abelian であるときは、この定義は Dye [5] によるものである。

後程使う簡単な性質として、次の二つがある。

補題 1. $E \in \mathcal{A}^p$ が $\mathcal{B}_E$ で abelian であるための必要十分条件は $E \in \mathcal{B}^c$ かつ reduction algebra $\mathcal{A}_E$ と induction algebra $\mathcal{B}_E$ に対して、 $\mathcal{A}_E = \mathcal{B}_E$ が成立することである。

補題 2. $E \in \mathcal{A}^p$ が $\mathcal{B}_E$ で abelian で、 $F \in (\mathcal{B}^c)^p$ が $\mathcal{B}^c$ における projection の同値関係において、 $F \leq E$ ならば、 F は又 $\mathcal{B}_E$ で abelian である。

補題 1 は [3] の Lemma 2 で補題 2 は [1] の Lemma 3 の証明は省略する。

$\mathcal{A}$ の中に $\mathcal{B}_E$ で abelian な $E \in \mathcal{A}^p$ が存在して、 $\overline{E}^{\mathcal{B}} = 1$ を充たすとき、 $\mathcal{A}$ は $\mathcal{B}_E$ で discrete であると定義する。

明らかに、 $\mathcal{B}$ が $\mathcal{A}$ の center であるときには、 $\mathcal{B}_E$ で discrete であるとは、 $\mathcal{A}$ が discrete von Neumann algebra であることである。

例 1. $\mathcal{C}$ を discrete factor とすると、任意の von Neumann algebra $\mathcal{A}$ に対して、 $\mathcal{A}$ と $\mathcal{C}$ の tensor product $\mathcal{A} \otimes \mathcal{C}$ は $\mathcal{A} \otimes \mathcal{I}$ の $\mathcal{I}$ で discrete である。

事実、 $\mathcal{C}$ の minimal projection P に対して $I \otimes P$ は $\mathcal{A} \otimes \mathcal{I}$ で abelian で $\overline{I \otimes P}^{\mathcal{A} \otimes \mathcal{I}} = I \otimes I$ を充たす。

定理 1. 特に $\mathcal{B} \subset \mathcal{A} = \mathcal{A} \cap \mathcal{A}'$ のとき $\mathcal{A}$ が $\mathcal{B}$ 上で discrete
 であるための必要十分条件は $\mathcal{B}$ の任意の non-zero projection
 が $\mathcal{B}$ 上で abelian な non-zero projection とおさえることである。

証明. 必要条件. $(E_n)_{n \in \mathbb{I}} \in \mathcal{B}$ の non-zero projection で各 n
 に対して $\overline{E_n}^{\mathcal{B}} = E_n$ とする $\mathcal{B}$ 上で abelian な projection E_n が存
 在する様な maximal orthogonal family とする. $G \equiv \sum_n E_n$
 とおけば $(E_n)_{n \in \mathbb{I}}$ の maximality によって $G = I$ とする。

$E \equiv \sum_n E_n = \sup E_n$ とおくと, $\mathcal{B}$ -support の定義より

$$\overline{E}^{\mathcal{B}} = \overline{\sup E_n}^{\mathcal{B}} = \sup \overline{E_n}^{\mathcal{B}} = \sup E_n = G = I.$$

又 E_n の取り方と $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ であることにより,

$$\mathcal{A}_E = \sum_n \mathcal{A}_{E_n} = \sum_n \mathcal{B}_{E_n} = \mathcal{B}_E$$

となり補題 1 において E は $\mathcal{B}$ 上で abelian, 故に $\mathcal{A}_E$ は $\mathcal{B}$ 上で discrete.

十分条件. $E \in \mathcal{A}^p \in \mathcal{B}$ 上で abelian で $\overline{E}^{\mathcal{B}} = I$ とおすものとする.

$\mathcal{B}$ の任意の projection P に対して $Q \equiv PE$ とおくと,

$$\overline{Q}^{\mathcal{B}} = \overline{PE}^{\mathcal{B}} = P \overline{E}^{\mathcal{B}} = P \neq 0.$$

従って $Q \neq 0$. 又 E は $\mathcal{B}$ 上で abelian であるから補題 2 により

Q は $\mathcal{B}$ 上で abelian とする。

十分条件に対するこの証明より

系. $\mathcal{A}$ が abelian von Neumann algebra とする. $\mathcal{A}$ が $\mathcal{B}$ 上で
 discrete であるための必要十分条件は, Dye [5] の意味で $\mathcal{B}$ が
 type I sub-algebra であること, 即ち $\mathcal{A}$ の任意の non-zero

projection が $\mathcal{A}$ 上の abelian $\mathcal{A}$ non-zero projection をおさえることである。

$\mathcal{A}$ が $\mathcal{B}$ 上の abelian $\mathcal{A}$ non-zero projection を含まないとき、 $\mathcal{A}$ は $\mathcal{B}$ 上で continuous であると定義する。

明らかに、center $\mathcal{A}$ 上で continuous であることは、通常の意味で continuous であることである。特に $\mathcal{A}$ が abelian $\mathcal{A}$ ときこの様な $\mathcal{B}$ を Dye [5] は type II subalgebra と呼んでいる。

例 2. continuous $\mathcal{A}$ von Neumann algebra は全ての abelian von Neumann subalgebra $\mathcal{A}$ 上で continuous である。

補題 3. $\mathcal{A}$ が $\mathcal{B}$ 上で discrete (or continuous) ならば、任意の non-zero $E \in (\mathcal{B} \cap \mathcal{B}')^P$ に対して、 $\mathcal{A}_E$ は $\mathcal{B}_E$ 上で discrete (or continuous) である。

証明. $\mathcal{A}$ が $\mathcal{B}$ 上で discrete とする。 $F \in (\mathcal{B}')^P$ が存在して $\overline{F}^{\mathcal{B}} = 1$ かつ $\mathcal{A}_F = \mathcal{B}_F$ とする。 $G \equiv FE$ とおくと $\overline{G}^{\mathcal{B}} = E$ かつ $\mathcal{A}_G = \mathcal{B}_G$ とし、 $G \in (\mathcal{B}')^P$ となるから $\mathcal{A}_E$ は $\mathcal{B}_E$ 上で discrete. $\mathcal{A}$ が $\mathcal{B}$ 上で continuous ならば、 $\mathcal{A}_E$ が $\mathcal{B}_E$ 上で continuous ではないとすると、 $E \equiv P$ なる $\mathcal{B}$ 上の abelian $\mathcal{A}$ non-zero projection が存在し矛盾。

補題 4. $\mathcal{B} \subset \mathcal{A} = \mathcal{A} \cap \mathcal{A}'$ のとき、 $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $\mathcal{B}^P$ の互いに直交し、和が 1 になる様な family とする。各 n に対して、 $\mathcal{A}_{E_n}$ が $\mathcal{B}_{E_n}$ 上で discrete ならば、 $\mathcal{A}$ は $\mathcal{B}$ 上で discrete である。

証明は定理1における必要条件の証明と同様なので省く。

補題5. $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ と互いに直交し和が1になる様な $\mathcal{B}$ の projection の family とする。各 n に対して $\mathcal{O}_{E_n}$ が $\mathcal{B}_{E_n}$ 上で continuous ならば, $\mathcal{O}$ は $\mathcal{B}$ 上で continuous である。

証明. もし $\mathcal{O}$ が $\mathcal{B}$ 上で continuous でないと, $\mathcal{B}$ 上で abelian かつ non-zero $F \in (\mathcal{B}^c)^P$ が存在する。各 n に対して, $G_n \equiv FE_n$ とおくと, $G_n \in (\mathcal{B}^c)^P$. $G_n \neq 0$ となる n_0 が存在する。補題2により, G_{n_0} は $\mathcal{B}$ 上で abelian となり $\mathcal{O}_{E_{n_0}}$ が $\mathcal{B}_{E_{n_0}}$ 上で continuous であることになる。

定理2. 特に $\mathcal{O} \subset \mathcal{B} = \mathcal{O} \cap \mathcal{O}'$ のときは, $\mathcal{O}_E$ が $\mathcal{B}_E$ 上で discrete で $\mathcal{O}_{1-E}$ が $\mathcal{B}_{1-E}$ 上で continuous になる様な $E \in \mathcal{B}^P$ が唯一存在する。

従って, 全ての von Neumann algebra $\mathcal{O}$ に対して,

系. $\mathcal{O}$ は discrete part と continuous part に唯一通りに直和分解できる。

定理2の証明. もし $\mathcal{O}$ が $\mathcal{B}$ 上で continuous でないとすると, $\mathcal{B}$ 上で abelian かつ non-zero $E \in \mathcal{O}^P$ が存在する。その様な全ての n に対して, $E \equiv \sup \overline{E_n}$ とおくと, $E \in \mathcal{B}^P$. 任意の $0 \neq P \leq E$ ならば $P \in \mathcal{O}^P$ に対して, $PE_k \neq 0$ となる k が存在する。補題2により PE_k は $\mathcal{B}$ 上で abelian。従って, $\mathcal{O}_E$ は定理1により, $\mathcal{B}_E$ 上で discrete である。もし $\mathcal{O}_{1-E}$ が $\mathcal{B}_{1-E}$ 上で continuous でないとすると, $1-E \geq G$ かつ $\mathcal{B}$ 上で abelian かつ non-zero $G \in \mathcal{O}^P$ が存在する。 $G \leq \overline{G} \leq E$ 。

従って $G=0$ となり矛盾。故に $\mathcal{O}_{1-E}$ は $\mathcal{B}_{1-E}$ 上で continuous である。

$F \in \mathcal{O}_F$ かつ $\mathcal{B}_F$ 上で discrete かつ $\mathcal{O}_{1-F}$ かつ $\mathcal{B}_{1-F}$ 上で continuous となる様な $\mathcal{B}$ の projection とすると, $\mathcal{B}$ 上で abelian で $\bar{Q} = F$ となる

$Q \in \mathcal{O}^P$ が存在する。 E の定義より $\bar{Q} = F \leq E$ 。もし $E \neq F$ なら

$0 \neq E - F \in \mathcal{B}^P$ 従って定理 2.1 により $E - F \geq \sum_{i=1}^{\infty} R_i$ なる $\mathcal{B}$ 上で abelian な

projection R が存在する。一方 $1 - F \geq E - F \geq R$ 従って $\mathcal{O}_{1-F}$ かつ $\mathcal{B}_{1-F}$

上で continuous なことは矛盾。故に $E = F$ となり唯一性が判る。

$\mathcal{O}$ から $\mathcal{B}$ への positive linear mapping e かつ

$$1^e = 1$$

$$(AB)^e = A^e B \quad \text{for } \forall A \in \mathcal{O}, \forall B \in \mathcal{B}$$

の条件を充すとき, e は $\mathcal{O}$ から $\mathcal{B}$ への expectation であるという。

e を $\mathcal{O}$ から $\mathcal{B}$ への normal ($A \geq 0$ ならば $A^e \geq 0$) なる

expectation とする。そのとき任意の $P \in \mathcal{O}^P$ と $0 \leq B \leq P^e$ なる

任意の $B \in \mathcal{B}$ に対して

$$Q \leq P \quad \text{かつ} \quad Q^e = B$$

を充す $Q \in \mathcal{O}^P$ が存在するとき $\mathcal{B}$ は $\mathcal{O}$ の e -strong Maharam

subalgebra であると定義する。

$\mathcal{O}$ が abelian von Neumann algebra かつその von Neumann subalgebra

$\mathcal{B}$ 上で continuous ならばある conditional expectation e により

$\mathcal{B}$ は $\mathcal{O}$ の e -strong Maharam subalgebra となることは

Maharam により証明されている ([1], [5])。

この結果は次の定理の様に拡張できる[3; corollary 11].

定理3. もし $\mathcal{A}$ の center に含まれているとき e を $\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}$ への normal expectation とする. $\mathcal{A}$ が $\mathcal{B}$ 上で continuous であるならば $\mathcal{B}$ は $\mathcal{A}$ の e -strong Maharam subalgebra である.

証明は繁雑なので §5 において述べる。

§3. 通常の type と上記の type との関係

ここでは特に次の様な条件を満たす 2 つの von Neumann algebra $\mathcal{C}$ と $\mathcal{A}$ についての関係をみていく。

$$(*) \quad \mathcal{C} \cap \mathcal{A} \cap \mathcal{Z} = \mathcal{A} \cap \mathcal{A}' \cap \mathcal{Z} = \mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$$

$$(**) \quad \mathcal{C} \cap \mathcal{A} \cap \mathcal{Z} = \mathcal{A}' \cap \mathcal{C}$$

明らかに $(**)$ が成立すれば $(*)$ は成立する。

定理4. $\mathcal{C}$ と $\mathcal{A}$ が $(*)$ を満たす 2 つの von Neumann algebra とする. もし $\mathcal{C}$ が finite かつ discrete ならば, $\mathcal{A}$ は $\mathcal{Z}$ 上で discrete である.

証明. $\mathcal{A}$ が $\mathcal{Z}$ 上で discrete でないとき, $\mathcal{A}_p$ が $\mathcal{Z}_p$ 上で continuous になる様な non-zero $P \in \mathcal{Z}^P$ が定理2により存在する. 従って $\mathcal{A}$ が $\mathcal{Z}$ 上で continuous であると仮定してもよい. $\mathcal{C}$ が discrete であることより, $\mathcal{C}_E = \mathcal{Z}_E$ かつ $\overline{E}^{\mathcal{Z}} = 1$ なる $E \in \mathcal{C}^P$ が存在する. e を $\mathcal{C}$ から $\mathcal{Z}$ への faithful normal expectation (すなわち $\mathcal{C}$ の canonical natural mapping) とする. 仮定より, $\mathcal{Z}$ と $\mathcal{A}$ は定理3の条件を満たす. 従って, $\mathcal{Z}$ は $\mathcal{A}$ の e -strong Maharam subalgebra であるから, $F \in \mathcal{A}^P$ が存在し

$F^e = \bar{E}^e$ を示す。 e は positiveかつ faithful であるから $F \sim E$ 。補題 2 より F は $\mathbb{Z}$ 上で abelian となる。即ち $\mathcal{C}_F = \mathbb{Z}_F$ 従って $\mathcal{O}_F = \mathbb{Z}_F$ が成立する。明らかに $F \neq 0$ であるから $\mathcal{O}$ が $\mathbb{Z}$ 上で continuous である事に反する。

系。 $\mathcal{C}$ と $\mathcal{O}$ が (*) を満たす 2 つの von Neumann algebra とする。もし $\mathcal{O}$ が $\mathbb{Z}$ 上で continuous で $\mathcal{C}$ が finite であれば、 $\mathcal{C}$ は continuous である。

証明。 $\mathcal{C}$ が continuous となれば、non-zero $E \in \mathbb{Z}^P$ が存在して $\mathcal{C}_E$ が discrete となる。従って、定理 4 により、 $\mathcal{O}_E$ は $\mathbb{Z}_E$ 上で discrete となる。一方 $\mathbb{Z}$ は abelian で $E \in \mathbb{Z}^P$ より補題 3 により $\mathcal{O}_E$ は $\mathbb{Z}_E$ 上で continuous となり矛盾。

補題 6。 $\mathcal{C}$ と $\mathcal{O}$ が (**) を満たす 2 つの von Neumann algebra とする。もし $\mathcal{O}$ が discrete ならば、 $\mathcal{O} = \mathcal{C} \cap \mathcal{O}'$ となる。

証明。 $\mathcal{O}$ を $\mathcal{C}'$ と $\mathcal{O}$ により生成される von Neumann algebra とすると $\mathcal{O} \supset \mathcal{O}' \cap \mathcal{O}$ となる。今 $\mathcal{O}$ は discrete だから、 $\mathcal{O}'$ も discrete。従って $\mathcal{O}$ は normal sub algebra、即ち $\mathcal{O}^{\mathcal{O}'} = \mathcal{O}$ が成立する。他方

$$\begin{aligned} \mathcal{O}^{\mathcal{O}'} &= (\mathcal{O}' \cap \mathcal{O}')' \cap \mathcal{O}' = (\mathcal{C} \cap \mathcal{O}' \cap \mathcal{O}')' \cap \mathcal{O}' \\ &= (\mathcal{C} \cap \mathcal{O}' \cap \mathcal{O}') \cap \mathcal{O}' = (\mathcal{O}' \cap \mathcal{O}')' \cap \mathcal{O}' \\ &= \mathcal{O}' \cap \mathcal{O}' = \mathcal{O}' \end{aligned}$$

従って、 $\mathcal{O} = \mathcal{O}'$ となり $\mathcal{O} = \mathcal{O}' = \mathcal{C} \cap \mathcal{O}'$ が成立する。

補題 7. discrete von Neumann algebra $\mathcal{O}$ と continuous von Neumann algebra $\mathcal{C}$ が $(**)$ を満たすとき、 $\mathcal{O}$ は $\mathcal{Z}$ 上で continuous である。

証明。 $\mathcal{O}$ が $\mathcal{Z}$ 上で continuous でないとき、 $\mathcal{Z}$ 上で abelian な non-zero $E \in \mathcal{O}^p$ が存在する。故に $\mathcal{O}_E = \mathcal{Y}_E = \mathcal{Z}_E$ が成り立つ。一方補題 6 より $\mathcal{O} = \mathcal{Y}' \cap \mathcal{C}$ が成り立つから

$$\mathcal{C}_E = \mathcal{C}_E \cap \mathcal{Z}'_E = \mathcal{C}_E \cap \mathcal{Y}'_E = (\mathcal{C} \cap \mathcal{Y}')_E = \mathcal{O}_E = \mathcal{Z}_E$$

となり、 $\mathcal{C}$ が continuous であることに矛盾する。

定理 5. $(**)$ のもとで、 $\mathcal{C}$ が continuous ならば、 $\mathcal{O}$ は $\mathcal{Z}$ 上で continuous になる。

証明。 $E \in \mathcal{Y}^p$ が存在し、 $\mathcal{O}_E$ が discrete、 $\mathcal{O}_{1-E}$ が continuous となる。 $\mathcal{Z}_{1-E}$ は abelian だから $\mathcal{O}_{1-E}$ は $\mathcal{Z}_{1-E}$ 上で continuous である。一方 $\mathcal{O}_E$ は discrete で、 $\mathcal{C}_E$ が continuous であるから、補題 7 より $\mathcal{O}_E$ は $\mathcal{Z}_E$ 上で continuous である。従って補題 5 より $\mathcal{O}$ は $\mathcal{Z}$ 上で continuous である。

定理 5 と補題 3 より

系。 $(**)$ のもとで、 $\mathcal{O}$ が $\mathcal{Z}$ 上で discrete ならば、 $\mathcal{C}$ は discrete である。

以上 3 の結果を総括すると、

定理 6. von Neumann algebra $\mathcal{O}$ と finite von Neumann algebra $\mathcal{C}$ が $(**)$ を満たすとき、 $\mathcal{C}$ が discrete (及び continuous)

であるための必要十分条件は、 $\mathcal{O}$ が $\mathcal{O}$ の center $\mathcal{Z}$ で discrete (& "continuous) であることである。

§4. crossed product の関係

$\mathcal{O}$ を σ -finite finite von Neumann algebra とし、 G を $\mathcal{O}$ $\mathcal{Z}$ の (*) automorphism のなす countable group とする。 $\mathcal{O}$ $\mathcal{Z}$ の automorphism α に對して、

$$AB = B^\alpha A \quad \text{for } \forall A \in \mathcal{O} \text{ "ならば" } A = 0$$

が成立するとき α は freely acting on $\mathcal{O}$ といわれる [9]。こ

の定義は、 $\mathcal{O}$ が abelian von Neumann algebra のときは、von Neumann にある定義：任意の non-zero $p \in \mathcal{O}^p$ に對して、 $Q Q^\alpha = 0$ か $0 \neq Q \leq p$ なる $Q \in \mathcal{O}^p$ が存在することと同値である。又 automorphism group G に對して、単位元 1 と異なる任意の $g \in G$ が freely-acting のとき、 G は freely-acting である といふ。2 つの $\mathcal{O}$ $\mathcal{Z}$ の automorphism α と β に對して

$$F(\alpha, \beta) = \sup \{ p \in (\mathcal{O} \cap \mathcal{O}')^p ; p^{\alpha^{-1}\beta} = p, \alpha\beta \text{ は } \mathcal{O}_p \mathcal{Z} \text{ で inner} \}$$

とおく ([7], [9])。以下 group G は $\mathcal{O}$ $\mathcal{Z}$ で freely-acting と仮定する。

$$[G] = \{ \text{automorphism } \alpha \text{ on } \mathcal{O} ; \sup_{g \in G} F(\alpha, g) = 1 \}$$

とおくと、 $[G]$ は G を含む group となる。automorphism のなす group K が $K = [K]$ を満たすとき K は full であるといふ。

こゝで簡単に crossed product の作り方を述べる ([11], [12])。

q を $\mathcal{O}$ $\mathcal{Z}$ の finite faithful normal G -invariant (即ち

$\varphi(A) = \varphi(A^g)$ for all $g \in G$ trace とし. $\varphi(1) = 1$ と正規化しておく. G にて定義された σ -valued form $\sum_{g \in G} g \otimes A_g$ と表わす. 但し A_g は σ の form の g で取る値である. $\mathcal{A}$ を G の有限集合を除いては $A_g = 0$ とする様な $\sum_{g \in G} g \otimes A_g$ の全体とする. $\mathcal{A}$ の元に対し, 和は各要素ごとの和で, $*$ -演算と積を次の様に定義する.

$$\left(\sum_{g \in G} g \otimes A_g \right)^* = \sum_{g \in G} g^{-1} \otimes A_g^* g$$

$$\left(\sum_{g \in G} g \otimes A_g \right) \left(\sum_{h \in G} h \otimes B_h \right) = \sum_{g, h \in G} gh \otimes A_g B_h g^{-1}.$$

これらの演算のもとで $\mathcal{A}$ は $*$ -algebra になる. φ を $\mathcal{A}$ 上の faithful trace $\widehat{\varphi}$ に次の様に拡張する.

$$\widehat{\varphi} \left(\sum_{g \in G} g \otimes A_g \right) = \varphi(A_1).$$

φ による σ の表現空間を $\mathcal{H}_\sigma$ で表わし, $\widehat{\varphi}$ による $\mathcal{A}$ の表現空間を G の $\mathcal{H}_\sigma$ で表わす. $\mathcal{A}$ は isomorphism により, G の $\mathcal{H}_\sigma$ の dense set とみなすことができる. $\sigma \mapsto A$ と $G \mapsto g$ を G の $\mathcal{H}_\sigma$ 上に次の様に自然に拡張する. $\forall \sum g \otimes B_g \in \mathcal{A}$ と任意の $\sum h \otimes B_h \in \mathcal{A}$ に対し,

$$1 \otimes A \left(\sum_{g \in G} g \otimes B_g \right) = \sum_{g \in G} g \otimes A B_g$$

$$U_g \left(\sum_{h \in G} h \otimes B_h \right) = \sum_{h \in G} gh \otimes B_h g^{-1}.$$

$\mathcal{A}$ における積のもとで $1 \otimes A$, $g \otimes 1$ を左から掛けるという演算子に相当している. すなわち U_g は G の $\mathcal{H}_\sigma$ 上の unitary となり

$$U_g^* (1 \otimes A) U_g = 1 \otimes A^g$$

を示す. $1 \otimes A$ と A との関係は $1 \otimes \sigma$ と σ との isomorphism になる

から以下 $1 \otimes A$ と A を同一視する。 $\mathcal{O}$ と $\{U_g : g \in G\}$ によって生成された von Neumann algebra, 言い換えると $\mathcal{O}$ の operator topology における weak closure を $G \otimes \mathcal{O}$ で表わし, von Neumann algebra $\mathcal{O}$ の automorphism group G による crossed product という。作り方はより $G \otimes \mathcal{O}$ は faithful finite normal trace $\hat{\varphi}$ を持つ finite な von Neumann algebra である。

上記の $[G]$ と $G \otimes \mathcal{O}$ の間の関係は, automorphism $\alpha \in [G]$ $\alpha \in [G]$ であるための必要十分条件は, $G \otimes \mathcal{O}$ の unitary U_α が存在して

$$U_\alpha^* A U_\alpha = A^\alpha \quad \text{for all } A \in \mathcal{O}$$

を充たすことである [7]。更に $[G]$ の subgroup と $G \otimes \mathcal{O}$ の von Neumann subalgebra との関係は 茅賀-武田による次の定理の様な形で述べられる。

定理 A [7; Theorem 2] lattice $\{ \text{von Neumann sub algebra } \mathcal{C} ; G \otimes \mathcal{O} \supset \mathcal{C} \supset \mathcal{O} \}$ と lattice $\{ \text{group } K ; [G] \supset K = [K] \}$ の間には, lattice isomorphism が存在する。この isomorphism は, K に対して,

$$\mathcal{C} = \{ U_\alpha \in (G \otimes \mathcal{O}) : \text{unitary}, \alpha \in K \}$$

を対応させ, $\mathcal{C}$ に対して,

$$K = \{ \alpha \in [G] ; U_\alpha \in \mathcal{C} \}$$

を対応させる。

$[G]$ の subgroup K に対して、

$$Z(K) = \{A \in \mathcal{A} ; A^g = A \text{ for any } g \in K\}$$

とおき K の fixed algebra という。 $[G]$ の subgroup K に対して、

$\mathcal{A}$ が $Z(K)$ 上で discrete ならば K は discrete type, $\mathcal{A}$ が $Z(K)$ 上で continuous ならば K は continuous type と定義する。

明らかに、 $\mathcal{A}$ が abelian von Neumann algebra のときは、 $[G]$ の full subgroup が discrete type (及び continuous type) であることは、 Dye の意味における type I (及び type II) であることとは一致する。

定義により、 full group は $\mathcal{A}$ の全ての inner automorphism を含むから、 full group の fixed algebra は $\mathcal{A}$ の center に含まれる。従って定理 2 により、 full group は discrete type と continuous type の直和に唯一通りに分割できる。

定理 7. $G \rtimes \mathcal{A} \supset \mathcal{B} \supset \mathcal{A}$ なる von Neumann algebra $\mathcal{B}$ が $[G]$ の full subgroup K が定理 A の lattice isomorphism で対応していることある。そのとき $\mathcal{B}$ が discrete (及び continuous) であるための必要十分条件は、 K が discrete type (及び continuous type) であることである。

証明。 $\mathcal{A}$ が σ -finite finite であるから、 crossed product の作り方より $G \rtimes \mathcal{A}$ は finite。従って $\mathcal{B}$ は finite。一方 G は freely acting であるから $\mathcal{B}' \cap \mathcal{B} = \mathbb{C}$ [8; Lemma 4.1]。従って、 $\mathcal{B}$ と $\mathcal{A}$ は

定理6の条件を満足する。従って $\mathcal{C}$ が discrete (及び continuous) であるための必要十分条件は、 $\mathcal{C}$ の center $\mathcal{Z}$ が discrete (及び continuous) であることである。ところで $\mathcal{C}$ と K は定理 A の様な形で対応しているのだから、 $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}' = \mathcal{Z}(K)$ [8, Corollary 4.3]。従って $\mathcal{C}$ が discrete (及び continuous) であるための必要十分条件は、 K が discrete type (及び continuous type) であることである。

[8] においては、この定理7とは少し異なった形で von Neumann algebra の type と full group の type の対応に関する結果が述べられている。

特に $\mathcal{C}$ を abelian von Neumann algebra とすると、定理7より Dye の結果が得られる。また、次のことも得られる。

系。 $\mathcal{C}$ を continuous von Neumann algebra とする。 $G \curvearrowright \mathcal{C}$ かつ $\mathcal{C}$ の G による全ての von Neumann algebra $\mathcal{C}_g$ は continuous である。

証明。 $\mathcal{C}$ に定理 A の意味で対応する $[G]$ の full subgroup を K とする。 $\mathcal{Z}(K)$ は abelian だから $\mathcal{C}$ は $\mathcal{Z}(K)$ 上で continuous となる。故に K は continuous type であるから定理7より、 $\mathcal{C}$ は continuous である。

§5. Maharam の補題に関して

ここでは、Maharam の補題の拡張について述べていく。

補題 8. もし $\mathcal{A}$ が $\mathcal{B}$ 上で continuous ならば, $0 \neq PQ \in (\mathcal{B}^0)^P$
となる全ての $P \in \mathcal{A}^P$ と $Q \in \mathcal{B}^P$ に対して, $R \in \mathcal{A}^P$ と $E \in \mathcal{B}^P$ が
存在して更に $0 \neq F \leq E$ なる任意の $F \in \mathcal{B}^P$ に対して

$$0 \neq R \leq PQ, \quad 0 \neq E \leq Q, \quad (P-R)F \neq 0, \quad RF \neq 0$$

を満足する。

証明。そのような projection R と E が存在しないとしたとする。
 R と $0 \neq R \leq PQ$ となる任意の $\mathcal{A}$ の projection とする。

$$G = \sup \{ E \in \mathcal{B}^P ; (P-R)E = 0 \text{ かつ } E \leq Q \}$$

とある

$$G' = \sup \{ E \in \mathcal{B}^P ; RE = 0 \text{ かつ } E \leq Q - G \}$$

とあると、 $G \in \mathcal{B}^P$ かつ $G' \in \mathcal{B}^P$ 。もし $G' \neq Q - G$ ならば、

$0 \neq Q - G - G' \leq Q$ 。従って、仮定より $R \in \mathcal{A}^P$ と $Q - G - G' \in \mathcal{B}^P$ に対して、 $F \leq Q - G - G'$ となる $F \in \mathcal{B}^P$ が存在して、

$$(1) \quad (P-R)F = 0 \quad \text{又は} \quad RF = 0.$$

ところが G と G' の定義より、(1)のどちらが成立しても $F = 0$

となり矛盾。従って $G' = Q - G$ 即ち $R(Q - G) = 0$ となる。その

結果 R と G の定義より、

$$R = RQ = RG = PG = PQG = GPQ$$

が $R \leq PQ$ なる全ての $R \in \mathcal{A}^P$ に対して成立するから、 PQ は $\mathcal{B}$ 上で abelian となり、 $\mathcal{A}$ が $\mathcal{B}$ 上で continuous であるという仮定に反する。

定理 8. $\mathcal{B}$ は $\mathcal{A}$ の abelian von Neumann sub algebra とし

e を $\mathcal{O}$ から $\mathcal{B}$ への normal expectation とする。もし $\mathcal{O}^c$ が $\mathcal{O}$ 上で continuous ならば、 $\mathcal{O}$ は $\mathcal{O}^c$ の e -strong Maharam subalgebra である。

証明。最初に次の事(2)を証明する。

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} P \in (\mathcal{O}^c)^P \text{ を固定すると, 任意の整正数 } n \text{ と } PR \neq 0 \text{ なる } R \in \mathcal{O}^P \\ \text{に対して, } E \in (\mathcal{O}^c)^P \text{ が存在して, 次の3条件を満たす.} \\ 0 \neq E \leq P, \quad 0 \neq ER \quad \text{かつ} \quad ER \leq \frac{P^e R}{2^n} \end{array} \right.$$

補題8により、 $G \in (\mathcal{O}^c)^P$ と $F \in \mathcal{O}^P$ が存在して、 $0 \neq F \leq E$ なる任意の $F \in \mathcal{O}^P$ に対して、

$$0 \neq G \leq PR, \quad 0 \neq F \leq R, \quad (P-G)F \neq 0, \quad GF \neq 0$$

を満たす。今 $\mathcal{O}$ は abelian であるから、 $\mathcal{O}$ を $\mathcal{O}$ の character space Ω 上の連続関数全体のなす algebra $C(\Omega)$ と同一視して話を進める。 C を $\{ \omega \in \Omega; 2G^e(\omega) \geq P^e(\omega) \}$ に対応する projection とし D を $\{ \omega \in \Omega; 2G^e(\omega) \leq P^e(\omega) \}$ に対応する projection とする。 $Q \equiv (P-G)C + GD$ とおくと、

$$Q^e = (P^e - G^e)C + G^e D \leq \frac{P^e}{2}.$$

C と D の取り方より $CE \neq 0$ 又は $DE \neq 0$ だから、 $(P-G)CE \neq 0$ 又は $GDE \neq 0$ 。従って

$$QE = (P-G)CE + GDE \neq 0.$$

故に(2)の R と $n=1$ に対して、 $Q \in (\mathcal{O}^c)^P$ が存在して、 $Q \leq P$, $QR \neq 0$ かつ $Q^e R \leq \frac{P^e R}{2}$ を満たす。 $P \in Q$ によって置きかえ、

この操作を繰り返す事により求める $E \in (\mathcal{B}^c)^P$ を得る。次に (2) を用いて、

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{任意の } 0 \neq P \in (\mathcal{B}^c)^P \text{ と } 0 < B \leq P^e \text{ なる任意の } B \in \mathcal{B} \text{ に対し、} \\ Q \in (\mathcal{B}^c)^P \text{ が存在して、 } 0 \neq Q \leq P \text{ かつ } Q^e \leq B \text{ を示す。} \end{array} \right.$$

を示す。spectral Theorem にあって、 $0 \neq R \in (\mathcal{B})^P$ と整数 n が存在して、 $BR \geq \frac{R}{2^n}$ が成立する。 $P^e \geq B$ という仮定より、

$$(PR)^e = P^e R \geq BR \geq \frac{R}{2^n} > 0.$$

従って、 $PR \neq 0$ 。故に、(1) にあって、 $E \in (\mathcal{B}^c)^P$ が存在して

$$0 \neq E \leq P, \quad ER \neq 0 \quad \text{かつ} \quad E^e R \leq \frac{P^e R}{2^n}$$

を示す。他方、 $B \leq P^e \leq 1$ であるから

$$(ER)^e = E^e R \leq \frac{P^e R}{2^n} \leq \frac{R}{2^n} \leq BR \leq B.$$

$Q \equiv ER$ とおくと、 $Q \in (\mathcal{B}^c)^P$ で、 $0 \neq Q \leq P$ かつ $Q^e \leq B$ を示す。 $P \in (\mathcal{B}^c)^P$

と $0 \leq B \leq P^e$ なる $B \in \mathcal{B}$ を取って置く。上の (3) と Zorn の Lemma より

$(Q_\alpha)_{\alpha \in I}$ なる $\mathcal{B}^c$ の projection の $0 \neq Q_\alpha \leq P$ を各 $\alpha \in I$ に対して示す。

$\sum_\alpha Q_\alpha^e \leq B$ となる様な maximal orthogonal family が存在する。 $Q \equiv \sum_\alpha Q_\alpha$ とおくと、 $Q \in (\mathcal{B}^c)^P$ かつ $Q \leq P$ 。 e は normal だから、 $Q^e = \sum_\alpha Q_\alpha^e$ 。もし $Q^e \neq B$ ならば、 $(P-Q)^e \geq B - Q^e > 0$ 。

従って、(3) により、 $R \in (\mathcal{B}^c)^P$ が存在して、

$$0 < R \leq P - Q \quad \text{かつ} \quad R^e \leq B - Q^e$$

を示す。これは $(Q_\alpha)_{\alpha \in I}$ の maximality に反する。従って、 $Q^e = B$ 。

この様にして、任意の $P \in (\mathcal{B}^c)^P$ と $0 \leq B \leq P^e$ なる $B \in \mathcal{B}$ に対し

て、 $Q \in (\mathcal{B}^e)^P$ が存在して、 $Q \leq P \Leftrightarrow Q^e = B$ を示す。従って $\mathcal{B}$ は $\mathcal{B}^e$ の e -strong Maharam subalgebra である。

特に、 $\mathcal{A}$ が abelian von Neumann algebra のときは、定理 8 は Maharam の Lemma を含んでゐる ([1], [5])。

特に $\mathcal{B}$ が $\mathcal{A}$ の center に含まれる von Neumann subalgebra であると、定理 8 より、定理 3 が得られる。

< 文 献 >

1. 長田 尚; Maharam の問題とめぐって。才二回函数解析
研究会報告集, 97-105, (1967)
2. M. Choda; Abelian projections over a von Neumann
subalgebra, Proc. Japan Acad., 48 (1972)
384-388.
3. M. Choda; A von Neumann algebra continuous over
a von Neumann subalgebra, to appear.
4. J. Dixmier; Les algebres d'operateurs dans
l'espace Hilbertien, Gauthier-Villars, Paris (1957).
5. H. A. Dye; On groups of measure preserving
transformations I, Amer. J. Math., 81 (1959)
119-159.
6. H. A. Dye; On groups of measure preserving

transformation, II, Amer. J. Math., 85 (1963)

776 - 808.

7. Y. Haga and Z. Takeda ; Correspondence between subgroups and subalgebras in a cross product von Neumann algebra, Tohoku Math. J., 24 (1972), 167-190.
8. Y. Haga ; On subalgebras of cross product von Neumann algebra, Preprint.
9. R. R. Kallmann ; A generalization of free action, Duku Math. J., 36 (1969), 781-789.
10. M. Nakamura and T. Turumaru ; Expectations in an operator algebra., Tohoku Math. J., 6 (1954) 182-188.
11. M. Nakamura and Z. Takeda ; On some elementary properties of the crossed product of von Neumann algebras, Proc. Japan Acad., 34 (1958), 489-494.
12. T. Turumaru ; Crossed product of operator algebras, Tohoku Math. J., 10 (1958), 355-365.
13. H. Umegaki ; Conditional expectation in an operator algebra, Tohoku Math. J., 6 (1954), 177-181.

14. H. Umegaki : Positive definite functions and direct product of Hilbert space, Tohoku Math. J., 7(1955), 201-211.