

Hamiltonian Systems II — 積分可能性と不可能性 —

京大 理 丹羽敏雄

この小論の目的は、Hamilton系が求積法で解ける（積分可能）ための1つの充分条件を示し（Liouville）その場合の系の持つ著しい性質を示すことである（Arnold）。次に、“一般に”系はHamiltonian（エネルギー）以外には積分をもたないという有名なPoincaréの定理をWhittakerに従い説明する。

§1. Liouville, Arnoldの定理.

定理1 (Liouville)

Hamilton系

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

$$H = H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t)$$

において、相異なる n 個の互いに involutive である第1積分

$F_i(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t)$ ($i=1, 2, \dots, n$) が存在すれば、この系は求積法によって解くことができる。

ここで、 F_i と F_j が互いに involutive であるとは、

$$\{F_i, F_j\} = 0 \quad (\text{Poisson bracket}) \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

証明 $q_i \ (i=1, 2, \dots, n)$ を任意定数とし.

$$F_i(q, p, t) = q_i \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

と置く. これを p について解いたものを

$$p_i = f_i(q, a, t)$$

とする. $F_i - q_i \ (i=1, 2, \dots, n)$ は互いに involutive である.

よって $p_i = f_i \ (i=1, 2, \dots, n)$ も互いに involutive である.*

従って

$$\{p_i - f_i, p_j - f_j\} = 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

即ち

$$\frac{\partial f_i}{\partial q_j} - \frac{\partial f_j}{\partial q_i} = 0. \quad \dots \dots \dots (1)$$

$$\begin{aligned} \text{又.} \quad -\frac{\partial H}{\partial q_i} &= \dot{p}_i = \dot{f}_i \\ &= \frac{\partial f_i}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial f_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \\ &= \frac{\partial f_i}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial f_i}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{\partial f_i}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} - \sum_j \frac{\partial f_i}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad \dots \dots \dots (2)$$

$$= -2. \quad H_1 = H_1(q, a, t) = H(q, f(q, a, t), t).$$

$$(1), (2) \text{ は } f_1 dq_1 + \dots + f_n dq_n - H_1 dt$$

がある関数 $V(q, a, t)$ の完全微分であることとを示す.

$V(q, a, t)$ の (q, p, t) の変数にわたる全微分

$$dV = f_1 dq_1 + \dots + f_n dq_n - H_1 dt + \sum_i \frac{\partial V}{\partial a_i} da_i$$

に於て $a_i = F_i(q, p, t)$ を代入すれば、我々は (q, p, t) に関する恒等式を得る:

$$dV - \sum_i \frac{\partial V}{\partial a_i} dF_i = p_1 dq_1 + \dots + p_n dq_n - H dt.$$

これは微分形式

$$\sum p_i dq_i - H dt$$

を変数 (q, p, t) によつて表わせば次の形になることを示す:

$$-\sum_i \frac{\partial V}{\partial a_i} dF_i + dV \quad \text{--- (3)}$$

Hamilton系は変分方程式

$$\delta \int \sum p_i dq_i - H dt = 0$$

に同値であることに注意すれば

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial a_i} \right) = 0$$

が得る。これは $\frac{\partial V}{\partial a_i} \ (i=1, \dots, n)$ が積分であることに等しいことを示す。

f. e. d.

*) $u_i \ (i=1, \dots, n) \in \mathfrak{L}$ は involutive のこと。

$S = \{ u_1 = \dots = u_n = 0 \}$ 上 $v=w=0$ とすれば

$$\{0, \omega\} = 0 \quad \text{in } S$$

定理 2. (Arnold)

(M, Ω, H) を Hamilton 系とし, $(M = T^*N \quad \dim N = n)$
 $F_1 \equiv H, F_2, \dots, F_n \in C(M)$ と次の性質をみたす n 積分とする.

$$(i) \quad \{F_i, F_j\} = 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, n), \quad \frac{\partial (F_1, \dots, F_n)}{\partial (p_1, \dots, p_n)} \neq 0$$

$$(ii) \quad J = J_f \equiv \{p \in M; F_i(p) = f_i, i = 1, 2, \dots, n\}$$

$$f = (f_1, f_2, \dots, f_n) \in \mathbb{R}^n$$

とすると、 J_f 上で $dF_1, \dots, dF_n$ は 1 次独立

$$(iii) \quad \left| \frac{\partial I}{\partial f} \right| \neq 0 \quad (\text{証明中の b) で定義されるもの}).$$

このとき、もし J_f がコンパクト、連結ならば、

$$(1) \quad J_f \cong T^n \quad \text{i.e. } n \text{ 次元トーラス } T^n \text{ に同相}$$

$$(2) \quad T^n \times D^n \quad (D^n \subset \mathbb{R}^n) \text{ なる形をした } J_f \text{ の近傍がとれ}$$

この近傍は、作用-角変数 $(I, \varphi) \quad (I \in D^n, \varphi \in T^n)$

で表わされ、変換 $(I, \varphi) \rightarrow (p, q)$ は正準変換であ

り、次の性質をもつ: $F_i = F_i(I_1, I_2, \dots, I_n)$

証明 (記号その他は今西氏の "Hamiltonian Systems I" に参照)

$$(a) \quad X_i \equiv X_{dF_i} \quad \text{i.e.} \quad dF_i = X_i \lrcorner \Omega \quad \text{とする.}$$

$$(i) \text{ より } [X_i, X_j] = 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

$$L_{X_i} F_j = \{F_j, F_i\} = 0 \quad \text{であるから}$$

$$(X_i)_p \in T_p(J) \subset T_p(M) \quad \forall p \in J$$

(ii) より J 上 $X_1, X_2, \dots, X_n$ は 1 次独立

$\therefore$ もし J がコンパクト・連結であれば、よく知られて
いるように、 T^n に同相である。

(b) (ii) より J_f の近傍には、直積の構造が入る。

$$N(J_f) \cong T^n \times D^n \ni (x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n) \\ y^i = F_i^*(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n)$$

$$T_i(f) \equiv \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_i(f)} \omega$$

$$\left(\gamma_i(f) \equiv \{ (x, y) : y = f, x_j^i = 0 \text{ for } j \neq i, 0 \leq x^i \leq 2\pi \} \right.$$

トラス J_f の基本サイクル

と定義すれば、後定 (iii) から $f_i = f_i(I_1, I_2, \dots, I_n)$ とお
ける。

(c) 補題 ω : closed 1-form on J_f i.e.

$$\oint_{\partial P} \omega = 0 \quad (\forall P: 2\text{-chain on } J_f)$$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \oint_{\partial P} \omega &= \oint_{\Gamma} d\omega = \int_P \Omega = \Omega(Y, Z), \quad Y = \sum a_i X_i \\ &= \sum a_i b_j \Omega(X_i, X_j) = \sum a_i b_j dF_i(X_j) \quad Z = \sum b_j X_j \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$(d) \quad S(I, \xi) \equiv \int^{\xi} \omega.$$

$$\left(\begin{array}{l} \omega = p d\xi = p(I, \xi) d\xi \quad (\because \text{後述 (i) より}) \\ \text{積分は } J_f = J_{f(I)} \text{ 上 1-形式.} \end{array} \right.$$

ω は関数とある. 局所的な正変換 $(p, \xi) \rightarrow (I, \phi)$

$$\text{を考える: } p = \frac{\partial S}{\partial \xi}, \quad \phi = \frac{\partial S}{\partial I}$$

$\forall I$ に對し $S(I, \xi)$ は補題から局所的な関数である. ξ の微分は大域的な 1-form ($\in J_f$) である. 従って $d\phi$ も大域的な 1-form である.

± 2

$$\oint_{\gamma_j} d\phi_i = \oint_{\gamma_j} d\left(\frac{\partial S}{\partial I_i}\right) = \frac{d}{dI_i} \oint_{\gamma_j} dS = \frac{d}{dI_i} (2\pi I_j) = 2\pi \delta_{ij}.$$

$\therefore \phi_i$ は 1 -形式 J_f 上の角変数である.

q.e.d.

§2. 積分不可能性, Poincaré の定理.

$$M = T^*N, \quad N = T^n \text{ と } \mathbb{C}.$$

$H(p, \xi) = H_0(p) + \mu H_1(p, \xi) + \dots$ と (p, ξ, μ) 上の関数と解析関数と $\mathbb{C}$.

$$A: p \mapsto \frac{\partial H_0}{\partial p} \equiv \omega(p): B^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: \text{diff}^\infty \text{ (i.e. } |\frac{\partial^2 H_0}{\partial p^2}| \neq 0)$$

$$H_1(p, \xi) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^2} B_m(p) e^{i \langle m, \xi \rangle}$$

とす.

$$[m] \in \mathbb{Z}^2 / \sim \quad (m \sim m' \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, m_1 = km'_1, m_2 = km'_2)$$

$$S_{[m]} \equiv \{ p \in B^2; \langle \omega(p), m \rangle = 0, m \in [m] \}$$

$$T_{[m]} \equiv \{ p \in B^2; B_m(p) \neq 0, \exists m' \in [m] \}$$

と置く。 $\bigcup S_{[m]}$ の点 p を secular points と呼ぶ。

定理 (Poincaré) 上の設定の下に

$$\bigcup_{[m] \in \mathbb{Z}^2 / \sim} (S_{[m]} \cap T_{[m]}) \supset S : \text{dense in } B^2$$

とすれば、 (p, g, μ) に属して 1 価解析関数 (H, H) の才 1 積分 $\Phi = \Phi(p, g, \mu)$ は H の関数である。

証明

$$(a) \quad \Phi = \Phi_0(p, g) + \mu \Phi_1(p, g) + \dots$$

$$\Phi_0 \equiv \sum_m A_m(p) e^{i \langle m, g \rangle}$$

$$\Phi_1 \equiv \sum_m C_m(p) e^{i \langle m, g \rangle} \quad \text{とか}$$

$\{H, \Phi\} = 0$ より μ は関数展開

$$\{H_0, \Phi_0\} = 0, \quad \{H_1, \Phi_0\} + \{H_0, \Phi_1\} = 0$$

(b) $\Phi_0 = \Phi_0(p)$ i.e. Φ_0 は p のみに依存する:

$$\{H_0, \Phi_0\} = 0 \text{ より } A_m(p) \cdot \langle m, \omega(p) \rangle = 0 \quad (\forall m)$$

$\therefore \exists m \neq 0, \exists p_0, A_m(p_0) \neq 0$ とすれば p_0 の近傍で $\langle m, \omega(p) \rangle = 0$

とすれば $A: p \mapsto \omega(p)$: diffeomorphism に矛盾。

(c) $\Phi_0 = \psi(H_0)$ i.e. Φ_0 is H_0 of constant value:

$$\{H_1, \Phi_0\} + \{H_0, \Phi_1\} = 0 \quad \text{by (b) is '}'$$

$$B_m(p) \cdot (m, \frac{\partial}{\partial p}) \Phi_0 = C_m(p) (m, \frac{\partial}{\partial p}) H_0 \quad (\psi_m)$$

$p \in S_{cm} \cap T_{cm} \subset S'$ is true.

$$\text{i.e. } \langle \omega(p), m \rangle = (m, \frac{\partial}{\partial p}) H_0 = 0 \quad \text{hence } B_m(p) \neq 0 \quad \forall m \in [m]$$

$$(m', \frac{\partial}{\partial p}) \Phi_0 = 0$$

$$\therefore S \perp Z \quad d\Phi_0 = k dH_0 \quad \text{or} \quad \frac{\partial(H_0, \Phi_0)}{\partial(p_1, p_2)} = 0 \quad (\text{on } S')$$

so Jacobian is constant on S' is B^2 is dense in S' .

$$\frac{\partial(H_0, \Phi_0)}{\partial(p_1, p_2)} \equiv 0 \quad \text{on } B^2$$

(d) $\Phi = \psi(H)$ is (p.g.m.) is true (2.1) is satisfied for (H, H)

of 1st order.

$$\Phi = \psi(H) = \mu \Phi' \quad (\because \mu = 0 \quad \text{is true if } \text{left} = \Phi_0 - \psi(H_0) = 0)$$

is true.

$$\Phi' = \Phi'_0 + \mu \Phi'_1 + \dots \quad \text{by using the above discussion}$$

is

$$\Phi = \psi(H) \quad \text{is true.}$$

g.e.d.

参考文献

- [1] V.I. Arnold, A. Avez : Problèmes ergodiques de la
mécanique classique ; Gauthier-Villars, Paris (1967)
(和訳) 古典力学のエルゴード問題
- [2] L. Landau, E. Lifshitz : 力学 (東京図書)
- [3] H. Poincaré : Méthode nouvelle de la mécanique céleste.
I. II. III. (IVの和訳あり)
- [4] E. Whittaker : Analytical dynamics ; Cambridge (1927)
- [5] 丹羽・大槻・宮原 : 古典力学のエルゴード問題
Seminar on Probability Vol 30 (1969)