

- 1 多変量正規分布での推定量の許容性
- 2 多変量正規分布に関するミニマックス不変予測域

大阪市大 商学部 石井 吾郎

§1. 序

1 については多変量正規分布に関し普通用いられている平均ベクトル及び共分散行列の推定量が許容的なものであるかと云うことについての Stein [11], [12] の結果を少し修正した形で紹介する。その内容は石井[4], [5] とほとんど同様であるのでここには書かない。そこで

2 についてのみ記述する。 §2 では分布形を正規分布とはかぎらず ミニマックス不変予測域の一般論を述べる。 §3 において多変量正規分布の 線形モデルに対する予測問題に §2 の 結果を適用する。尚ほ詳しくは Ishii [7] を見られたい。

§2. ミニマックス不変予測域

$X = (X_1, X_2, \dots, X_m)$ と $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_m)$ とは互に独立ではあるが同じ母数 θ を持つ分布に従う確率変数と

する。 X は観測可能な確率変数で、 Y は未来の確率変数であるとしよう。 $\mathcal{X} = \{X\}$, $\mathcal{Y} = \{Y\}$, X を観測したとき $\mathcal{Y}$ の中にある可測集合 S_X を作り

$$(1) \quad \forall \theta \quad P_\theta \{Y \in S_X\} \geq 1 - \varepsilon$$

であつて且つ S_X がある意味でなるべく狭いものを求めたい。

$n = 1$ のときには Fraser — Guttman [2], [3] の β -expectation tolerance region の考え方と一致する。

$n > 1$ のとき Ishii — Kudo [6] で 1 変量正規分布の線形模型に対し予測域を作つた。 $n > 1$ で且つ正規分布でない他の分布に対する予測域、及び多変量正規分布の線形模型に対する予測域も Ishii [7] で扱つてゐる。この paper で使う方法は [6] [7] の不変原則と Stein [10], Wijsman [13] の random orthogonal transformation である。

以下の記号を用いる。

$$\mathcal{X} = \{X = (X_1, X_2, \dots, X_m)\}$$

$$\mathcal{Y} = \{Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)\}$$

$$\Theta = \{\theta\}$$

$$\mathcal{P} = \{f_\theta; \theta \in \Theta, f_\theta = p(x, \theta) g(y, \theta)\}, \quad p(x, \theta) g(y, \theta)$$

は $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ 上の σ -有限な測度に関する確率密度。

$\mathcal{Z} = \{Z; Z = Z(X), \text{ 最小十分統計量}\}$, $p(x, \theta)$ から導かれる Z の確率密度を $t(Z, \theta)$ とする。

$$A = \{ A(Y) ; 0 \leq A(Y) \leq 1 \text{ なる可測関数} \} \quad A(Y)$$

は randomized prediction region, $A(Y)$ がある集合の指示関数になるとその集合を予測域という.

$$G = \{ g \} \quad \mathcal{X} \text{ 上の変換群}$$

$$\hat{G} = \{ \hat{g} \} \quad \mathcal{Y} \text{ 上の変換群}$$

$$\mathring{G} = \{ \mathring{g} \} \quad \mathcal{Z} \text{ 上の変換群で } \mathring{g}Z(x) = Z(gx) \text{ をみたすもの}$$

$$\bar{G} = \{ \bar{g} \} \quad \Theta \text{ 上の変換群}$$

$$\tilde{G} = \{ \tilde{g} \} \quad \mathcal{A} \text{ 上の変換群で } \tilde{g}A(Y) = A(\hat{g}^{-1}Y) \text{ をみたすもの}$$

$G, \hat{G}, \mathring{G}, \bar{G}, \tilde{G}$ の間の関係は次の関係で $\leftrightarrow$ 同型, $\rightarrow$ 準同型であるとする.

$$g \rightarrow \mathring{g} \leftrightarrow \bar{g} \rightarrow \hat{g} \leftrightarrow \tilde{g}$$

仮定 1. Θ は $\bar{G}$ の下で等質空間である. Θ のある点を固定して, それを θ_0 とする.

仮定 2. $\mathcal{Z}$ と $\mathring{G}$ には 1:1 の対応があり, 且つ $\mathcal{Z}$ は $\mathring{G}$ の下で等質空間である. $\mathring{G}$ の単位元に対応する $\mathcal{Z}$ の元を Z_0 とかく.

仮定 3. $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ 上の σ 有限な測度 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ に対し変換 $g, \hat{g}, \mathring{g}$ に対するヤコビアン $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ があつて

$$(i) \quad \lambda_1(dgx) = \Gamma_1(g)\lambda_1(dx), \quad \lambda_2(d\hat{g}Y) = \Gamma_2(\hat{g})\lambda_2(dY), \\ \lambda_3(d\mathring{g}Z) = \Gamma_3(\mathring{g})\lambda_3(dZ)$$

$$(ii) \quad p(x, \bar{g}^{-1}\theta) = p(gx, \theta) \Gamma_1(g), \quad g(Y, \bar{g}^{-1}\theta) = g(\hat{g}Y, \theta) \Gamma_2(\hat{g}) \\ t(z, \bar{g}^{-1}\theta) = t(\hat{g}z, \theta) \Gamma_3(\hat{g})$$

この仮定より

$$\Gamma_1(gg') = \Gamma_1(g) \Gamma_1(g'), \quad \Gamma_2(\hat{g}\hat{g}') = \Gamma_2(\hat{g}) \Gamma_2(\hat{g}'), \quad \Gamma_3(\hat{g}\hat{g}') = \Gamma_3(\hat{g}) \Gamma_3(\hat{g}')$$

そこで2つの損失関数を定義する.

$$L_1(\theta, A(\cdot)) = \int_Y (1 - A(Y)) g(Y, \theta) \lambda_2(dY)$$

$$L_2(\theta, A(\cdot)) = L_2(\bar{g}\theta, A(\cdot)) = \Gamma_2(\hat{g}^{-1}) \int_Y A(Y) \lambda_2(dY) \\ = \Gamma_2(\hat{g}^{-1} \hat{g}') \int_Y A(\hat{g}'Y) \lambda_2(dY)$$

L_1 は $A(Y)$ の中に Y が含まれる確率を評価するもので, L_2 は $A(Y)$ の広さを評価するものである. L_2 の第3項に $\Gamma_2(\hat{g}^{-1})$ がついてゐる理由は: 例えば X, Y が実数のとき $X \rightarrow aX, Y \rightarrow aY$ なる変換を施したときには予測域も当然 a 倍になるが損失は大きくなつたわけではないから $\frac{1}{a}$ をかけておくのが合理的であらう. この標本考えを一般化したわけである.

この損失関数 L_1, L_2 は

$$L_1(\bar{g}\theta, \bar{g}A) = L_1(\theta, A)$$

$$L_2(\bar{g}\theta, \bar{g}A) = L_2(\theta, A)$$

なる関係をみたしている。則ち損失関数は G -不変である。

X を観測したとき, δ の $A(Y)$ をとるかをきめるのが予測方式である。

$$\delta: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{A}$$

を予測関数と呼ぶ。予測関数 δ を採用したときの リスク

$$r_1 = E(L_1(\theta, \delta(x))) \quad \text{につき}$$

$$(1) \quad \forall \theta \in \Theta, \quad r_1(\theta, \delta) = \iint_{\mathcal{X} \times \mathcal{Y}} (1 - \psi(x, y)) p(x, \theta) q(y, \theta) \lambda_2(dy) \lambda_1(dx) \\ \leq \varepsilon$$

但し $\psi(x, \cdot) = \delta(x)$ のとき, δ を水準 $1 - \varepsilon$ の予測域という。水準 $1 - \varepsilon$ の予測域の中で r_2 のリスク $r_2 = E(L_2(\theta, \delta(x)))$ につき

$$(2) \quad r_2(\theta, \delta) = \Gamma_2(\hat{g}^{-1}) \iint_{\mathcal{X} \times \mathcal{Y}} \psi(x, y) p(x, \bar{g}\theta_0) \lambda_2(dy) \lambda_1(dx)$$

$$\text{但し } \bar{g}\theta_0 = \theta$$

$\delta = \delta_0$ が $\sup_{\theta \in \Theta} r_2(\theta, \delta)$ の Minimum を与えているとき δ_0 を水準 $1 - \varepsilon$ のミニマックス予測域であるという。

$Z(x)$ は最小十分統計量であるから $\psi(x, y)$ としては Z と Y の関数になっているもののみを考える。すなわち $\psi(x, y) = \varphi(Z, y)$ 。 Z が十分統計量であつて且つ $\hat{g}Z(x) = Z(gx)$ なる性質を持つときには $\mathcal{X}$ 上の G -不変な決定方式を $\mathcal{Z}$ 上の $\hat{G}$ -不変な決定方式に持ち送みうる。丘本[9]によると最

最小十分統計量はこの性質をもつ。損失関数が G -不変であるので G -不変な決定方式を採用することにする

$$\delta_0 \in \{\psi : \psi(x, Y) = \psi(gx, \hat{g}Y)\}$$

であり、更に最小十分統計量と Y との関数で且つ G -不変なものの中から δ_0 を選ぶことにすると

$$\delta_0 \in \{\varphi : \varphi(Z, Y) = \varphi(\hat{g}Z, \hat{g}Y)\}$$

このようなものの中でミニマックスなものが見つかれば、それをミニマックス不変予測域と呼ぶ。以下においてミニマックス不変予測域を求める。

$$\hat{g}Z = Z_0. \quad \text{なる } \hat{g} \text{ を } \hat{g}_Z^{-1} \text{ とかくことにする.}$$

$$(3) \quad \varphi(Z, Y) = \varphi(Z_0, \hat{g}_Z^{-1}Y) = \Phi(\hat{g}_Z^{-1}Y)$$

$$W = \hat{g}_Z^{-1}Y \quad \text{とかく}$$

δ として (3) なる φ を採用したときの第 1 のリスク r_1

につき (1) は

$$r_1 = \int \int_Z \int_Y \varphi(Z, Y) g(Y, \theta) t(Z, \theta) \lambda_2(dY) \lambda_3(dZ) \geq 1 - \varepsilon$$

$$= \int \int_Z \int_Y \varphi(Z_0, \hat{g}_Z^{-1}Y) g(Y, \theta) t(Z, \theta) \lambda_2(dY) \lambda_3(dZ) \geq 1 - \varepsilon$$

$$\int \int_Z \int_Y \varphi(Z_0, W) g(\hat{g}_Z W, \hat{g}_Z^{-1}\theta_0) t(Z, \hat{g}_Z^{-1}\theta_0) \Gamma_2(\hat{g}_Z) \lambda_2(dW) \lambda_3(dZ) \geq 1 - \varepsilon$$

$$\int \int_Z \int_Y \Phi(W) g(\hat{g}_Z W, \theta_0) t(\hat{g}_Z Z, \theta_0) \Gamma_2(\hat{g}) \Gamma_2(\hat{g}_Z) \Gamma_3(\hat{g}) \lambda_2(dW) \lambda_3(dZ) \geq 1 - \varepsilon$$

フビニの定理を用いて

$$(4) \quad \int \int_{Y \times Z} \Phi(w) g(\hat{g}_z^{-1} w, \theta_0) t(z', \theta_0) \Gamma_2(\hat{g}_{z'}) \lambda_3(dz') \lambda_2(dw) \geq 1 - \varepsilon$$

但し $z' = \hat{g} z, \quad \hat{g}_{z'} = \hat{g} \hat{g}_z$

ここで

$$(5) \quad h(w) = \int_Z g(\hat{g}_z^{-1} w, \theta_0) t(z, \theta_0) \Gamma_2(\hat{g}_z) \lambda_3(dz)$$

とおくと, $h(w)$ は $w = \hat{g}_z^{-1} \gamma$ の密度関数で (それは θ とは無関係である) あり. このとき (4) は

$$(6) \quad \int_Y \Phi(w) h(w) \lambda_2(dw) \geq 1 - \varepsilon$$

である. 次に第2のリスト γ_2 につき (2) は

$$\begin{aligned} \gamma_2 &= \Gamma_2(\hat{g}^{-1}) \int \int_{Z \times Y} \varphi(z, \gamma) t(z, \bar{g} \theta_0) \lambda_2(d\gamma) \lambda_3(dz) \\ &= \Gamma_2(\hat{g}^{-1}) \int_Z \Gamma_2(\hat{g}_z^{-1}) \int_Y \varphi(z_0, \hat{g}_z^{-1} \gamma) t(z, \bar{g} \theta_0) \lambda_2(d\gamma) \lambda_3(dz) \\ &= \Gamma_2(\hat{g}^{-1}) \int_Z \Gamma_2(\hat{g}_z^{-1}) \int_Y \Phi(w) t(z, \bar{g} \theta_0) \lambda_2(dw) \Gamma_2(\hat{g}_z) \lambda_3(dw) \end{aligned}$$

$$(7) \quad = \Gamma_2(\hat{g}^{-1}) \int_Y \Phi(w) \lambda_2(dw)$$

条件 (6) をみたしなから (7) を最小にする $\Phi(w)$ はネイマン-ピアッソンの Lemma と同じ考えにより

$$\Phi(w) = \begin{cases} 1 & h(w) > c \text{ のとき} \\ \gamma & h(w) = c \text{ のとき} \\ 0 & h(w) < c \text{ のとき} \end{cases}$$

であり, C 及び γ は (6) をみたすようにとる. $P(h(w)=C) = 0$ のときには

$$(8) \quad S_x = \{Y : h(w) > C, w = \hat{g}_z^{-1} Y, Z = Z(x)\}$$

なる S_x がミニマックス不変予測域を与える. 以上のことを定理の形にまとめると

定理 1. 仮定 1-3 がみたされているとき水準 $1-\varepsilon$ のミニマックス不変予測域は 次の S_x で与えられる.

$$S_x = \{Y; h(w) > C, w = \hat{g}_z^{-1} Y, Z = Z(x)\}$$

ここに $h(w)$ は (5) 式で与えられ, C は (6) が成立するようにとる.

この定理で与えられたミニマックス不変予測域がミニマックス予測域である為には尚お若干の仮定が必要である. そのことについては [8][6][7] を見うれたり.

§ 3. 多変量線形模型における予測域.

§ 2 の結果を多変量線形模型に適用して見よう. 次の記号を用いることにする.

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{m1} & \cdots & x_{mp} \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ y_{n1} & \cdots & y_{np} \end{bmatrix}$$

$m \times p$ $n \times p$

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{m1} & \cdots & p_{ms} \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} q_{11} & \cdots & q_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ q_{n1} & \cdots & q_{ns} \end{bmatrix}$$

$m \times s$ $n \times s$

$$\text{rank } P = \text{rank} \begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} = k \leq s < m$$

$$\exists U : n \times m \quad Q = UP.$$

$$\xi = \begin{bmatrix} \xi_{11} & \cdots & \xi_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_{s1} & \cdots & \xi_{sp} \end{bmatrix}$$

$s \times p$

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \cdots & \varepsilon_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ \varepsilon_{m1} & \cdots & \varepsilon_{mp} \\ \vdots & & \vdots \\ \varepsilon_{m+n,1} & \cdots & \varepsilon_{m+n,p} \end{bmatrix}$$

$(m+n) \times p$

ε_i を ε の i 行とすると

$\varepsilon_i, i=1, 2, \dots, m+n$ は互

に独立で 各 ε_i は

$$N(0, \sigma^2)$$

に従う。

このとき 次の関係式が成り立っていると仮定する。

$$(1) \quad \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} \xi + \varepsilon$$

(1) なる線形模型において X を観測して Y の予測域を作す。

$$(2) \quad g_{\alpha, \beta} : X \rightarrow X\alpha + P P_1 \beta$$

$$\hat{g}_{\alpha, \beta} : Y \rightarrow Y\alpha + Q P_1 \beta$$

但し α は $p \times p$ 三角行列 $\alpha_{ii} > 0$, $\alpha_{ij} = 0 \quad i > j$

β は $k \times p$ 行列

P_1 は P の k コの線形独立な行ベクトルの転置
行列よりなる $s \times k$ 行列

なる変換を考える.

$$G = \{g_{\alpha, \beta}\}, \quad \hat{G} = \{\hat{g}_{\alpha, \beta}\}$$

は

$$g_{\alpha_1, \beta_1} g_{\alpha_2, \beta_2} X = g_{\alpha_1, \beta_1} (X\alpha_2 + P P_1 \beta_2) = X\alpha_2\alpha_1 + P P_1(\beta_2\alpha_1 + \beta_1)$$

であるから

$$g_{\alpha_1, \beta_1} g_{\alpha_2, \beta_2} = g_{\alpha_2\alpha_1, \beta_2\alpha_1 + \beta_1}$$

なる乘法に従う変換群である.

P の列ベクトルで張られる R^m の部分空間を $\angle(P)$ とする.
 $\angle(P)$ への射影作用素を C とすると, X を観測したときの最
小十分統計量として

$$(3) \quad Z(X) = (Z_1(X), Z_2(X)) = (CX, X'(I-C)X)$$

を得る. $\Sigma = \{Z(X)\}$ 上に $g_{\alpha, \beta}$ より導かれる変換は

$$\hat{g}_{\alpha, \beta} Z = (Z_1\alpha + P P_1 \beta, \alpha' Z_2 \alpha) = Z(g_{\alpha, \beta} X)$$

である. 前節の ψ, φ は

$$\psi(x, Y) = \varphi(Z, Y)$$

$$= \varphi(Z_1, Z_2, Y) = \varphi(Z_1 \alpha + P P_1 \beta, \alpha' Z_2 \alpha, Y \alpha + Q P_1 \beta)$$

となる. ここで $g_{\alpha, \beta}$ として

$$\alpha \text{ を } \alpha = K^{-1} \text{ 但し } Z_2 = K' K, K \text{ は三角行列}$$

$$\beta \text{ を } Z_1 \alpha + P P_1 \beta = 0$$

にとると

$$(4) \quad \varphi = \varphi(0, I_p, (Y - U Z_1) K^{-1}) = \Phi((Y - U Z_1) K^{-1})$$

$$(5) \quad = \Phi(W)$$

$$\text{但し } W = (Y - U Z_1) K^{-1}$$

前節の定理1によれば W の密度関数 $h(W)$ を求めることが出来れば, それより予測域を作ることが出来るわけである. よって以下で $h(W)$ を求める.

Y, Z_1, Z_2 は互に独立で $\bar{N}(Q \xi, \sigma^2 \otimes I_m), \bar{N}(P \xi, *)$ ウィンシャート分布 $W(m-k, \sigma^2)$ に従う.

$$\gamma \text{ を三角行列で } \gamma \sigma \gamma' = I_p$$

なるものとし, $Y^* = Y \gamma, U Z_1^* = U Z_1 \gamma, Z_2^* = \gamma' Z_2 \gamma$ と変換すると, それらは

$$(6) \quad \bar{N}(Q \xi \gamma, I_p \otimes I_m), \bar{N}(Q \xi \gamma, I_p \otimes U C U'), W(m-k, I_p) \text{ に従う.}$$

$$H = K \gamma \quad \text{とかくと}$$

$$Z_2^* = H' H$$

$$(Y^* - U Z_1^*) H^{-1} = (Y - U Z_1) K^{-1}$$

であるから (4), (5) の Y, UZ_1, Z_2 を (6) に従うものとして扱
 つかうてよい. $Y - UZ_1$ の分布は

$$Y - UZ_1 : \bar{N}(0, I_p \otimes (I_m + UC U'))$$

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & \cdots & k_{1p} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & k_{pp} \end{bmatrix} \text{ は } W(m-k, I_p) \text{ のバートレット}$$

分解であるから k_{ij} は互に独

立てその分布は

$$k_{ii} : d.f = m - i - k + 1 \text{ のカイ分布}$$

$$k_{ij} : N(0, 1) \quad i \neq j$$

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & k_{1p} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & k_{p-1,p} \\ \hline 0 & & k_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} & \cdots & k_{1,p-1} & 0 \\ & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & & k_{p-1,p-1} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{p-1} & k_{1,p-1} \\ & k_{p-1,p} \\ \hline 0 & k_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K^{-1} = \begin{bmatrix} K_1^{-1} & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{p-1} & -k_{1,p-1} \\ & \vdots \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{p-1} & 0 \\ \hline 0 & k_{pp}^{-1} \end{bmatrix}$$

$$W = [W_1, \dots, W_p] = [Y - UZ_1] K^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} w_{11} & \cdots & w_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ w_{n1} & \cdots & w_{np} \end{bmatrix} = [W_1, \dots, W_{p-1}, V_p] \begin{bmatrix} I_{p-1} & 0 \\ \hline 0 & k_{pp}^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\text{ここに } V_p = \begin{bmatrix} v_{1p} \\ \vdots \\ v_{np} \end{bmatrix} = [W_1, \dots, W_{p-1}, (Y - UZ_1)_p] \begin{bmatrix} -k_{1p} \\ \vdots \\ -k_{p-1,p} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$(Y - UZ_1)_p$ は 行列 $Y - UZ_1$ の第 p 列を示す.

$W_1, \dots, W_{p-1}$ を与えたときの V_p の分布は (条件付分布)

$V_p : N(0, \Sigma_p)$ 但し $W_1, \dots, W_{p-1}$ を与えたとき

ここに

$$\Sigma_i = I_n + UC U' + \overline{W}_{(i-1)} \overline{W}_{(i-1)}'$$

$$\overline{W}_{(i)} = [W_1, \dots, W_i] = \begin{bmatrix} w_{11} & \dots & w_{1i} \\ \vdots & & \vdots \\ w_{n1} & \dots & w_{ni} \end{bmatrix}, \quad \overline{W}_{(0)} = 0$$

$W_1, \dots, W_{p-1}$ を与えたときの V_p と k_{pp}^2 の同時分布は

$$\frac{|\Sigma_p|^{-\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \exp -\frac{1}{2} V_p \Sigma_p^{-1} V_p' \frac{1}{2^{\frac{m-p-k+1}{2}} \Gamma(\frac{m-p-k+1}{2})} e^{-\frac{k_{pp}^2}{2}} (k_{pp}^2)^{\frac{m-p-k+1}{2}-1}$$

である. $W_p = k_{pp}^{-1} V_p$ であるから上式で変数変換して積分することにより $W_1, \dots, W_{p-1}$ を与えたときの W_p の条件付分布は.

$$\begin{aligned} (7) \quad h(W_p | W_1, \dots, W_{p-1}) \\ = \frac{|\Sigma_p|^{-\frac{1}{2}} \Gamma(\frac{m+n-p-k+1}{2})}{\pi^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{m-p-k+1}{2})} (1 + W_p' \Sigma_p^{-1} W_p)^{\frac{m+n-p-k+1}{2}} \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} (8) \quad h(W) &= h(W_p | W_1, \dots, W_{p-1}) h(W_{p-1} | W_1, \dots, W_{p-2}) \dots h(W_1) \\ &= \frac{|\Sigma_p|^{-\frac{1}{2}} \dots |\Sigma_1|^{-\frac{1}{2}} \Gamma(\frac{m+n-p-k+1}{2}) \dots \Gamma(\frac{m+n-k}{2})}{\pi^{\frac{np}{2}} \Gamma(\frac{m-p-k+1}{2}) \dots \Gamma(\frac{m-k}{2}) (1 + W_p' \Sigma_p^{-1} W_p)^{\frac{m+n-p-k+1}{2}} \dots (1 + W_1' \Sigma_1^{-1} W_1)^{\frac{m+n-k}{2}}} \end{aligned}$$

これより

$$(9) \quad S_X = \left\{ Y : \frac{|\Sigma_P|^{-\frac{1}{2}} \cdots |\Sigma_1|^{-\frac{1}{2}}}{(1 + W_P' \Sigma_P^{-1} W_P)^{\frac{m+n-p-k+1}{2}} \cdots (1 + W_1' \Sigma_1^{-1} W_1)^{\frac{m+n-k}{2}}} > \text{const} \right\}$$

なる集合がミニマックス不変予測域を与える。

注意 1. $\text{rank } P = \text{rank} \begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix}$ なる仮定は $E(Y)$ の線形推定可能性を保証する仮定である。

注意 2. $p=1$ のときには (9) の S_X は

$$S_X = \left\{ Y : W_1' \Sigma_1^{-1} W_1 = \frac{(Y - U(X))' \Sigma_1^{-1} (Y - U(X))}{X' (I_m - C) X} < \text{const} \right\}$$

$\text{const} = F_{m-k}^n(\varepsilon) \times \frac{n}{m-k}$ なる楕円体になる。この形を [6] であつかった。

注意 3. $P = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$, $Q = [1 \cdots 1]$ のときには X_i

が同じ分布よりの独立 m 個の標本で、それより未来の確率変数の予測域を作ることになる。このときの予測域を作って見るとそれは Fraser-Guttman の tolerance region と一致しない。その理由は σ^2 の損失関数の相異による。

注意 4. X, Y に対する変換 (2) に P_1 なるものが入っているのは (σ, ξ) が最小十分母数ではなく (σ, β)

が最小十分母数であるからである。Barankin [1]

Ref.

1. Barankin (1960) Sufficient parameter. Ann. Inst. stat. math. vol 12
2. Fraser - Guttman (1956) Tolerance region. A.M.S. 27
3. Guttman (1959) Optimum tolerance region. A.M.S. 30
4. 石井 (1967) 最小2乗推定は許容的でない, 大阪市大商学部報告 89号
5. 石井 (1967) Inadmissible minimax invariant estimator 京大数理研講究録 27
6. Ishii - Kudo (1963) Tolerance region. J. Math. Osaka City Univ. 14
7. Ishii Minimax invariant prediction region. Ann. Inst. stat. math. 次号
8. Kudo (1955) Minimax invariant est. Nat. Sci. Rep. Ochanomizu Univ. 6
9. 丘本 (1964) 十分性と不変性 大阪統計談話会報告 8
10. Stein (1956) Multivariate analysis. Tech. Rep. Stanford Univ.
11. Stein (1956) Inadmissibility of the usual estimator Proc. Third Berkeley Symp. Math. Statist. Prob.

- 12 Stein - James (1960) Estimation with quadratic loss. Proc.
Fourth Berkeley Symp Math Statist. Prob.
- 13 Wijsman (1959) Random orthogonal transformation.
A.M.S. 28.