

熱方程式の基本解の漸近状態

池田 信行 (N. Ikeda)

1. 序. Riemannian manifold (M, g) 上の熱方程式の基本解は M と g に関する豊富な情報を持っており、その情報は $t \downarrow 0$ または $t \uparrow \infty$ の漸近状態を考察することにより引出せることは良く知られている。例えば、Kac ([15]) や、McKean-Singer ([23]) の研究以来盛んに考察されてくる、Laplace-Beltrami 作用素のスペクトルの漸近分布と幾何学的量の関係は $t \downarrow 0$ の時のことから知ることの出来る典型的な例である。また $t \uparrow \infty$ の時の性質は確率論や統計力学等で広く用いられている ([46]) の報告ではそれと違った形の $t \downarrow 0$ の時の漸近状態に関する問題について述べる。その問題の発表は Buslaev ([8]) による研究であるが、厳密な証明をつけることの出来る結果は現在の所非常に少ないので、問題の性格、特徴および関連して派生する技術的なことの概観に重点をおいて述べる。従って筋を重視し、通常の意味での証明は充分期待されるが、必ずしも実現されていなくても、畢竟の事にはおいてもせぬから話を進める。

Buslaev の研究の話に進む前に通常良く知られていることの概観から始める。 M を滑らかな多様体とし、常に connected,

σ -compact, orientable 等必要な性質は仮定せしめようとする。 g は M 上に定義された Riemannian metric で連続ではあるが、一般には必ずしも滑かさは仮定しない。 g に対応する Laplace-Beltrami 作用素を Δ とする。この時 (一般化した意味での) 熱方程式

$$(1.1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta u$$

が考えられる。 g に対応する Riemannian volume m を基準にして、対称で連続な (1.1) の基本解

$$(1.2) \quad p : (0, \infty) \times M \times M \ni (t, x, y) \rightarrow p(t, x, y) \in \mathbb{R}_+$$

が存在する, (例えば [1], [2] 参照)。ただし必ずしも一意的でないのでの次の意味で minimal なものをとる: 任意の compact な台を持つ非負の連続関数 f に対して, $u(0+, x) = f(x)$

なる任意の (1.1) の解 $u(t, x)$ に対して

$$u(t, x) \geq \int_M f(y) p(t, x, y) m(dy), \quad (t, x) \in (0, \infty) \times M$$

が成立する。いま (M, g) が完備とすれば, g の滑かさは

112 は非常に少ない仮定の下で, $x, y \in M, x \neq y$ に対して,

$$(1.3) \quad -\log p(t, x, y) \sim p(x, y)^2 / 2t, \quad t \downarrow 0$$

が成立する。ここで $p(x, y)$ は x と y の geodesic distance

である。さらには M_1 を M の compact な集合とすれば, x, y

$\in M_1$ なる範囲では (1.3) は一様に成立している。詳細は

1) 2) は Varadhan [28], [29] 参照. 1) 3) $x, y \in M$ に対し,
 $\Omega_{x,y} = \{ \phi; \phi: [0,1] \rightarrow M, \text{連続で, しかも絶対連続であり, その速} \\
\text{度ベクトル } \dot{\phi} \text{ が 2 乗可積分} \}$ とすれば, その任意の元 ϕ
 1) 2) に対し作用積分 E が

$$(1.4) \quad E[\phi] = \int_0^1 g_{\phi(s)}(\dot{\phi}(s), \dot{\phi}(s)) ds$$

で与えられる. (1.3) の結果は基本解 p の $t \downarrow 0$ の時の漸
 近状態の主要項は作用積分 E の critical point = geodesic で
 支配されることを示している. 次は主要項からの偏差の問題
 になるが, もし g が滑か (すなわち C^∞) ならば R^d や
 hyperbolic space 等基本解が具体的に書き下せる時 ([40])
 と類似の結果が成立することが知られている. そのことはつ
 いては古くは Monakshisundaram-Pleijel ([24]) の結果が存
 在であるが, 最近では非常に多くの結果がある. 証明方法まで
 はめていくのはこの註に最も関係するものは Molchanov ([25]) の
 研究である. 例えば x と y を結ぶ minimal geodesic が
 一意存在個で, $(x \neq y)$, x と y は互に非 $\perp$ であり non-
 conjugate であれば, 正の関数 $H: R_+^1 \rightarrow R_+^1$ が存在し,

$$(1.5) \quad p(t, x, y) \sim \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \right)^d \exp \left\{ -P(x, y)^2 / 2t \right\} H(P(x, y)), \quad t \downarrow 0$$

が成立する. ここで D を充分小さな領域とすれば, $x, y \in D$ ならば

上の関係は一樣に成立する。(1.5) が成立するための条件および出て来る量は作用積分の critical point = geodesic による Jacobi 場に関連している。すなわち作用積分の critical point における二次変分に関する。g の滑かさを弱めて行く時 (1.5) が成立する程度を求めるとは1つの問題である。これらの事情については Azencott の一連の研究がある。例えば [3], [4] 参照。

Molchanov による (1.5) の証明を見れば、作用積分の二次変分が定義出来た位置に g の滑かさが弱まると事情が一変する可能性が予見される。実際彼の証明によれば主要項が geodesic で規制されることは $\mathbb{R}^n$ の空間で多数の法則により平均が定まるのと類似の事情が起きることにより、これらの偏差は中心極限定理的なものによって定まって来る。従って確率論における極限定理で平均からの偏差について成立する最も古典的な事実の類似が示される。すなわち parameter がある範囲にある限りは中心極限定理として共通の性格のものが成立し、違いは量的な関係だけに現われ、その限度を ϵ と parameter ϵ とは違った性格の法則が成立する。しかもこの違いはまたある parameter で表示される。Buslaev の研究は事実この様な現象が存在することを示唆するものであり、この報告の目的はこの事情に関連す

ることを可能な限り数学らしく述べることである。

2. Buslaevの主張。 Neumannの境界条件をみたす熱方程式を境界を持たない Riemannian manifold で取扱う時には滑らかなさの弱い Riemannian metric が現われることはよく知られている。その様な事情はスペクトルの漸近分布の研究でも考慮されている, (例えば [23] 参照)。Buslaev ([8]) は真に凸な領域による diffraction の問題を D の外部領域における Neumann 条件をみたす熱方程式の基本解の漸近評価の主要項からの偏差を求めることに帰着した。この言い換えかどの様な場合には, どれ位詳しい評価があれば保証されるかは興味あることだが, ここではそのことは忘れて熱方程式の問題のみを考える。

D を $\mathbb{R}^d$ の有界で真に凸な領域で滑らかな境界を持つものとする。 M^+ をその外部領域とし, Σ 上で平坦な $\mathbb{R}^d$ の計量 g^+ を考える。 Riemannian manifold (M^+, g^+) 上の熱方程式 (1.1) を Neumann の境界条件

$$(2.1) \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0$$

を考える。いま M^+ の homeomorphic copy M^- を考え ∂M^+ と ∂M^- を同一視し N とし, 多様体 $M = M^+ \cup N \cup M^-$ 上に

(M, g) が (M^+, g^+) の symmetric double になる様子は Riemannian metric g とすれば, Neumann条件の時の基本解は (M, g) における熱方程式 (1.1) の基本解によって簡単な形で表わされる。従ってこの (M, g) 上の熱方程式を考えるとすればより、 M の g は連続ではあるが、 D が真に凸なことの反映として、 N で normal 方向には滑かでない、 T 度 Lipschitz 連続になっている。Buslaev の主張を (M, g) の問題として整理して述べる次の形になる: $x, y \in N, x \neq y$ を固定する。

(M, g) で表して x と y を結ぶ minimal geodesic γ が唯一つとす。このとき

$$(2.2) \quad -\log p(t, x, y) \sim \frac{p(x, y)^2}{2t} + \frac{\lambda_1 \bar{\Phi}_\gamma(x, y)}{2t^{1/3}}, \quad t \downarrow 0$$

となる。ここで

$$(2.3) \quad \bar{\Phi}_\gamma(x, y) = \int_0^1 |K(\dot{\gamma}(s))|^{2/3} ds$$

で、 $\dot{\gamma}$ は γ の速度ベクトルで、 K は $\mathbb{R}^d$ に於ける ∂D の第2基本形式 $\beta: T(N) \times T(N) \rightarrow T(N)^\perp$ により

$$(2.4) \quad K(V(s)) = 2\beta(V(s), V(s))$$

で定められる。ここで $V(s)$ は $\dot{\gamma}$ にまつ T -ベクトル場とする。

また λ_1 は固有値問題

$$(2.5) \quad \frac{d^2}{dx^2} u - xu = -\lambda u \quad x \in (0, \infty), \quad \frac{d}{dx} u(0+) = 0$$

の第1固有値であり, $\lambda_1 > 0$ である。

(M, g) で N の第2基本形式が恒等的に0になることはなく, $|K(\sigma(s))| > 0$, $0 \leq s \leq 1$ である, とは3が N は totally geodesic な部分多様体である。 g が滑かたれば, この様子はおきないが, g が滑かでないのこのことは矛盾ではない。従って上に示した σ は (M, g) で少なくとも geodesic になっている。このことから (1.3) で主張している通り, (2.2) でも主要項は作用積分の critical point = geodesic で規制されていることがわかる。この場合は critical point における作用積分の任意の方向からの変分はとれないが, 片側変分に相当するものは定義出来, それは関連する量が, 主要項からの偏差を支配している。実際 $\sigma_j(x, y)$ についてはこのことは明らかであり, λ_1 と τ の中 λ_1 が g の Lipschitz 連続性に依存していることは次節で明らかにする。

(2.2) の数学的な証明は D が球の場合以外は知られていない, ([12] 参照)。しかしながら (2.2) についての Buslaev の説明は簡単ではあるが説得力のあるものである。彼は N の近傍における Riemannian metric の展開が滑かな場合と違つたことが現われることを指摘し, この局所的な量が大局的な量として集積する事情を数理論理学で用いられている "continuum integral" の概念を用いて説明している。詳しく

は Buslaev [8], I, §5 参照。

3. 問題の定式化と主要な結果. Buslaev が提起したことの解決にはほとんど遠いが, (2.2) で D が R^d の球の場合をいくみ, §1 で述べた目的には役立つ1つの定式化を次に与える。

$M_i, i=1, 2$, は滑かな d_i 次元の多様体とし, いづれも §1 に述べた条件は必要を限りみたしていいとする。それらの直積空間を $M = M_1 \times M_2$ とし, 自然な射影 $\pi_i: M \rightarrow M_i, i=1, 2$ を考へる。 $g_i, i=1, 2$ は M_i 上の滑かな Riemannian metric とし, また任意に固定した $x_1 \in M_1$ に対し, M_2 上の Riemannian metric $\hat{g}_{x_1}$ が対応していいとする。

[仮定] 1. M の Riemannian metric g は次の形で定まるとする。任意の $x \in M$ と任意の $X, Y \in T_x(M)$ に対し,

$$(3.1) \quad g_x(X, Y) = (g_1)_{\pi_1(x)}((\pi_1)_*(X), (\pi_1)_*(Y)) + \hat{g}_x((\pi_2)_*(X), (\pi_2)_*(Y)),$$

ただし, $V_1, V_2 \in T_{\pi_2(x)}(M_2)$ に対し

$$(3.2) \quad \hat{g}_x(V_1, V_2) = (\hat{g}_{\pi_1(x)})_{\pi_2(x)}(V_1, V_2)$$

とする。また $(\pi_i)_*$ は写像 π_i の differential とする。

[仮定] 2. M_1 の定長 ≤ 0 と Σ の normal 近傍 U と

正の連続関数 $a: U \times M_2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ が存在し, 任意の $(\xi, \eta) \in U \times M_2$ に対し

$$(3.3) \quad (\hat{g}_\xi)_\eta(v_1, v_2) = a(\xi, \eta)^{-1} (g_\xi)_\eta(v_1, v_2), \quad v_1, v_2 \in T_\eta(M_2)$$

とある。さらに ξ_0 を中心とするある normal coordinate

$\xi = (\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^{d_1})$ に対し a は次の形に表わされる:

$$(3.4) \quad a(\xi, \eta) = 1 - \sum_{i=1}^{d_1} K_i^{(1)}(\eta) |\xi^i|^\alpha + \sum_{i=1}^{d_1} K_i^{(2)}(\xi, \eta) |\xi^i|^2, \quad \eta \in M_2.$$

ただし, 関数 $K_i^{(1)}: M_2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ は滑かであり, 正であり,

関数 $K_i^{(2)}: M \rightarrow \mathbb{R}$ は滑かとする。さらに

$$0 < \alpha < 2$$

が成立しなくてはならない。

Σ は [仮定] 2 の ξ_0 に対し

$$N = \{(\xi_0, \eta) \mid \eta \in M_2\}$$

とおく。 $x, y \in N$ に対する基本解 $p(t, x, y)$ の漸近評価を示す際, (1.3) によつて, 考察する N の近傍に制限出来る。従つてある意味では一般性を失わず次のことを仮定出来る。

[仮定] 3。 N は totally geodesic な (M, g) の部分多様体である。

[注意] 3.1. [仮定] 1 と [仮定] 2 の (3.3) をみたす典型的な例は Bishop-O'Neill [5] によつて Riemannian manifold の正の関数による warped product と呼ばれるものは (M, g) がなつてゐる場合である。すなわち正の連続関数

$$(3.5) \quad a: M_1 \longrightarrow \mathbb{R}_+^1$$

が存在し、任意の $x \in M$ と任意の $X, Y \in T_x(M)$ に対して

$$(3.1)' \quad g_x(X, Y) = (g_1)_{\pi_1(x)}((\pi_1)_*(X), (\pi_1)_*(Y)) + a(\pi_1(x))^{-1} (g_2)_{\pi_2(x)}((\pi_2)_*(X), (\pi_2)_*(Y))$$

となつてゐる。さらに [仮定] 2 に代つて $\xi_0 \in M$ と $\mathbb{R}$ の近傍 U および U における normal coordinate $\xi = (\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^d)$ に対して、 a が次の形に表わされるとする:

$$(3.4)' \quad a(\xi) = 1 - \sum_{i=1}^{d_1} K_i^{(1)} |\xi^i|^\alpha + \sum_{i=1}^{d_2} K_i^{(2)}(\xi) |\xi^i|^2,$$

ここで $K_i^{(1)} > 0$ の関数 $K_i^{(2)}: M_1 \ni \xi \longrightarrow K_i^{(2)}(\xi) \in \mathbb{R}^1$ は滑かであるとする。

このとき [仮定] 2 がみたされる。更に

$$(3.6) \quad 0 < a(\xi) < 1 = a(\xi_0), \quad \xi \in M_1 \setminus \{\xi_0\}$$

を仮定すれば [仮定] 3 が自動的にみたされる。

例 3.1. 注意 3.1 で示した場合の特別の場合として

Buslaev の設定で D が $\mathbb{R}^d$ の球の場合がいくまゐる。こ

の場合 $M^+ = \mathbb{R}^d \setminus \bar{D}$ とし、 M^+ の平坦な Riemannian metric

を g^+ とする。 R^d の極座標 $(x, \theta^1, \theta^2, \dots, \theta^{d-1})$ をとり, M^+ の座標を

$$x^1 = x-1, \quad x^i = \theta^{i-1}, \quad i = 2, 3, \dots, d$$

で決める。この座標により M^+ は $[0, \infty) \times S^{d-1}$, (S^{d-1} は R^d の中の $d-1$ 次元球面), と同一視される。この座標で表した M^+ の Riemannian metric を (g_{ij}^+) とすれば

$$g_{11}^+ = 1 \quad g_{ij}^+ = 0 \quad j = 2, 3, \dots, d$$

$$g_{ij}^+ = a(x^1)^2 \bar{g}_{ij} \quad i, j = 2, 3, \dots, d$$

とする。 $\bar{g}_{ij}$ は

$$(3.7) \quad a(x^1)^2 = (1+x^1)^2$$

で $(\bar{g}_{ij})$ は S^{d-1} の標準的な Riemannian metric とする。従って (3.7) の関数を 0 に対称に拡張した $(1+|x|)^2$ も同様に $a(x)^2$ と置けば (M^+, g^+) の symmetric double は R^1 と球面 S^{d-1} の関数 $a(x)^2$ による warped product になる。この時は, (3.6) は成立している。

現在の所, まだ完全な証明は得られていないが, 解決が期待される二つの形の問題として定式化される。もしこれが肯定的であれば⑤の事情は相当に解明される。

[問題]. [仮定] 1, 2, 3 の下で, もし $\frac{1}{2} < \alpha < 2$ ならば, 次の

のことが成立することを示せ: $x, y \in N$, $x \neq y$ を固定し,
次の条件がみたされるとする,

(a) (N, g) で x と y を結ぶ, 長さ 1 の minimal geodesic が存在する,

(b) x と y は (N, g) で $\exists z$ $x = z \neq y$ non-conjugate である.

この時

$$(3.8) \quad -\log p(t, x, y) \sim \frac{p(x, y)^2}{2t} + \frac{\lambda_1 \bar{\Phi}_g(x, y)}{2t^\beta}, \quad t \downarrow 0$$

と成る. ここで

$$\bar{\Phi}_g(x, y) = \sum_{i=1}^{d_1} \int_0^1 \left| \beta_{g(s)}^{\ddot{v}}(\dot{g}(s), \dot{g}(s)) \right|^{\frac{2}{2+\alpha}} ds$$

$$(3.9) \quad \beta_x^{\ddot{v}}(X, Y) = K_0^{(0)}(\pi_2(x)) (g_2)_{\pi_2(x)}(X, Y), \quad X, Y \in T_x(N), x \in N$$

$$\beta = (2-\alpha)/(2+\alpha)$$

とする. ただし上の式の第2行で $X, Y \in T_x(N)$ は $T_{\pi_2(x)}(M_2)$ の元と同一視してある. また λ_1 は次の固有値問題:

$$(3.10) \quad \frac{d^2}{dx^2} u - x^\alpha u = -\lambda u \quad x \in (0, \infty), \quad \frac{d}{dx} u(0+) = 0$$

の第1固有値である.

注意 3.2. (N, g) は (M_2, g_2) と同一視出来るので,
上記の (a), (b) の条件は滑かな多様体の場合の結果から定

義可能である。

注意 3.3. 上の問題が $\frac{1}{2} < \alpha < 2$ としたのは, $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ の場合には (3.8) が成立する場合が全く知られておらずである。ただし, Δ と 1 階微分の項だけ違う作用素 L を考え,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} L u$$

の基本解が (3.8) の右辺の評価を持つものを作ることは, $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ の場合も可能である。

注意 3.4. (3.8) の右辺の主要項からの偏差は定性的には (2.2) の場合と同一の性格のもので, 滑らかな場合とは違う性質のものである。しかも g の滑らかさの度合いを示す α は $\frac{1}{2} < \alpha < 2$ の範囲では (3.9) の関係によつて β に反映する。つまり形式的には $\alpha \uparrow 2$ と近づけると $\beta = 0$ になり, 漸近問題 によく見られるように $\frac{1}{t^0}$ の order を $\log t$ と考えれば, order の関係は滑らかなものに近くなるものが出る来る。

注意 3.5. λ_1 も g の滑らかさの次数を表わす定数 α より一定の規則で定まっていける。尚 $\lambda_1 > 0$ とみることには知られていない。(例えば [9] の結果からわかる)。

現在の所厳密な証明が得られず, 比較的体系的と思われけるのはつぎに述べる場合だけである ([12], [13] 参照)。

[主要な結果]. $M_1 = \mathbb{R}^{d_1}$ で g_1 は $\mathbb{R}^{d_1}$ の平坦な metric とする。関数 a は (3.5), (3.4)', (3.6) をみたすとする。
 (M, g) が関数 a^{-1} による (M_1, g_1) と (M_2, g_2) の warped product ならば, 上記の問題は肯定的に解決される。

[注意] 3.6 問題の考察を N の近傍に閉じることが出来るので, [条件] 1, 2, 3 が (3.5), (3.4)', (3.6) をみたす a に対し成立し, $M_1 = \mathbb{R}^{d_1}$ で g_1 が $\mathbb{R}^{d_1}$ の平坦な metric ならば問題の肯定的に解決されることを上記の結果は示している。

現在知られている上記の結果の証明は (M, g) が warped product であることに基本的に依存している。一般性を失わずに $\gamma_0 = 0 \in \mathbb{R}^{d_1}$ とし,

$$N = \{ (0, x_2) : x_2 \in M_2 \}$$

とする。 $\mathbb{R}^{d_1}$ 上の作用素

$$(3.11) \quad L = \frac{1}{2} a(x)^{d_2/2} \sum_{i=1}^{d_1} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(a(x)^{-d_2/2} \frac{\partial}{\partial x^i} \right)$$

を示す。この時

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L u$$

の基本解 $\bar{p} : (0, \infty) \times M_1 \times M_1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ は連続で正である。11

ま

$$W^{d_1}(t) = \{w; w: [0, t] \ni s \rightarrow w(s) \in \mathbb{R}^{d_1}, \text{ continuous, } w(0) = w(t) = 0\}$$

と置き, L に対応する, 0 より出発し, t で 0 に帰る pinned 拡散過程の $W^{d_1}(t)$ 上の確率を $Q_{0,t}$ とする。この時 Markov 過程論の skew product の方法を用いれば, $x = (0, x^2)$, $y = (0, y^2) \in N$ に対し z , $\phi_t(w) = \int_0^t a(w(s)) ds$, $w \in W^{d_1}(t)$ とおけば,

$$(3.12) \quad p(t, x, y) = \int_{W^{d_1}(t)} g(\phi_t(w), x_2, y_2) Q_{0,t}(dw) \bar{p}(t, 0, 0)$$

なる表現が得られる。ここで $g: (0, \infty) \times M_2 \times M_2 \rightarrow \mathbb{R}^1$ は

(M_2, g_2) 上の熱方程式の基本解とする。つまり 0 より出発

し, 時刻 t で 0 に帰る $\underbrace{d_1\text{-次元}}_{\wedge}$ pinned Brownian motion の確率を $P_{0,t}$ とすれば, (3.12) と (3.11) より

$$(3.13) \quad p(t, x, y) = \int_{W^{d_1}(t)} g(\phi_t(w), x_2, y_2) P_{0,t}(dw) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\right)^{d_1} (1+o(1))$$

が得られる。この段階で $\frac{1}{2} < \alpha < 2$ なる条件を用いる。こ

こで g は (1.5) を適用し, [仮定] 3 を用いれば

$$(3.14) \quad p(t, x, y) = \int_{W^{d_1}(t)} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\right)^d \exp\left\{-\frac{p(x, y)^2}{2\phi_t(w)}\right\} P_{0,t}(dw) H(p(x, y)) (1+o(1))$$

が得られる。これは Brown 運動の scaling に関する性質を用いると,

$$(3.15) \quad p(t, x, y) = \int_{W^{d_1}(1)} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\right)^d \exp\left\{-\frac{p(x, y)^2}{2t\phi_1(w_t)}\right\} P_{0,1}(dw) H(p(x, y)) (1+o(1))$$

が得られる。ここで $W_t(s) = \sqrt{t} W(s)$, $0 \leq s \leq 1$ かつ $W_t \in W^{d(1)}$

の元を定める。つまり、有限次元空間 W 上の Lebesgue 測度に対する積分の漸近評価の際には有効な役割を果たす Laplace の方法に相当することを、 $W^{d(1)}$ 上の Wiener 測度 $P_{0,1}$ による積分に対して適用すれば、原理的には単純だが、簡単ではない計算の積み重ねの結果、(3.15) より、任意に大きい K に対し

$$\begin{aligned}
 p(t, x, y) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \right)^d \exp \left\{ - \frac{p(x, y)^2}{2t} \right\} \\
 (3.16) \quad &\times \int_{W^{d(1)}} \exp \left\{ - \frac{p(x, y)^2}{2t^{(2-\alpha)/2}} \sum_{i=1}^d K_{ii}^{(1)} \int_0^1 |w^{(i)}(s)|^2 ds \right\} P_{0,1}(dw) \\
 &\times H(p(x, y)) (1 + o(1)) + O(\exp\{-Kt^\beta\})
 \end{aligned}$$

が成立することが示される。ただしこの場合の Laplace の方法に代りては Schilder [27] 等が示されたものと類似はしているが、そのままは適用出来ず、この場合特有の工夫が必要である。(3.16) より結論に進むには有名な Feynman-Kac の公式を用いればよい(四参照)。

注意 3.7. 厳密な証明が知られている場合で上に述べたものは N の曲率に相当するものが定数の場合だけである。しかし Warped product の方法と何回か組合せて用いることにより、それが定数でない場合にも (3.8) と同性質の漸近評価を示せることがある。ただしこの場合の Riemannian

manifold は先には定式化 (T-枠組) から は はみ出し て (もうか、
 その枠組の中のものに非等距離に近いものが得られる。例えば R^3
 の単位円筒の外部領域 $M^+ = (1, \infty) \times S^1 \times R^1$ を考える。例 3.1 の
 場合で $d=2$ の場合には相当する座標 (x^1, x^2) と Riemannian
 metric を $(1, \infty) \times S^1$ に考える。この metric を $\tilde{g}^+$ で与え
 れば、Riemannian manifold $((0, \infty) \times S^1, \tilde{g}^+)$ が得られる。
 つぎに正の連続関数 $b: R^1 \times S^1 \rightarrow R^1$ 次の条件を満たすもの
 を考える: (1) $b(\xi, \eta) = b(-\xi, \eta)$, $(\xi, \eta) \in R^1 \times S^1$, (2) 任意に
 固定した $\eta \in S^1$ に対し $b(\xi, \eta)$ は $|\xi|$ に対し単調減少で、
 $(0, \infty)$ で $\xi=0$ に対し滑らか、(3) $b(0, \eta) = 1$, $\eta \in S^1$, (4) $\frac{\partial}{\partial \xi} b(\xi, \eta)|_{\xi=0} = K(\eta)$
 が存在し、 S^1 上で滑らかで、1 か未満に負の値をとる。
 $((0, \infty) \times S^1, \tilde{g}^+)$ の symmetric double と R^1 の関数 b によ
 る warped product を考えれば、上記の問題の定式化から は
 はみ出るが、(3.8) と同じ性質の漸近評価は示される。この
 場合は x を固定した時 (但し $x = (0, x^2, x^3)$ の形の点)、 $y =$
 $(0, y^2, y^3)$ を結ぶ minimal geodesic は x^2 と y^2 が S^1 上で
 交差するならば 2 本で、そうでなければ 1 本である。このため
 に関数 $K(\eta)$ のとり方によつては一般には (3.8) の右辺の第
 2 項の係数は y に不連続になる。この様に主要項からの偏
 差を表わす項の係数の連続性は minimal geodesic の集合
 の構造に密接に関連している。ある意味で運動の相の変化を

係数の不連続性が反映する, ([13]).

4. parametrix について. Hadamard の parametrix は基本解の構成だけでなく, 漸近評価にとっても有効な働きをもちことはよく知られてゐる. (1.5) の証明も解析的方法によるものはこの方法によつてゐる. よく用ゐられるのは, Monakshisundaram-Pleijel ([24]) の parametrix である. これは, 局所解には

$$(4.1) \quad p_m(t, x, y) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \right)^d \exp \left\{ -\frac{p(x, y)^2}{2t} \right\} (U_0(x, y) + U_1(x, y)t + \cdots + U_n(x, y)t^n)$$

の形で与えられる. ここで $U_0(x, y)$ は $U_1(x, y) \equiv 0$ とし, 微分方程式

$$(4.2) \quad \gamma \frac{dU_k}{d\gamma} + \frac{\gamma}{2} \frac{d \log \sqrt{G}}{d\gamma} U_k + k U_k = \Delta U_{k+1}, \quad k=1, 2, \dots, n$$

が順次定められる. ここで G は normal coordinate で表した Riemannian metric の行列で, $\frac{d}{d\gamma}$ は x より出発した geodesic にとつて T =微分とする. (4.1) と基本解の差は積分方程式によつて評価される. $t \downarrow 0$ の時の漸近評価と云う立場から見るならば, この役割にあつて (4.1) と (3.15) の右辺

$$(4.3) \quad \int_{W^d(0)} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \right)^d \exp \left\{ -\frac{p(x, y)^2}{2t \phi_1(w_t)} \right\} P_{0,1}(dw) + (P(x, y))$$

は Laplace の方法を介在させれば類似の働きをする。その意味で (4.3) は §3 の warped product の場合の熱方程式に対する parametrix と考えられる。parametrix をこの様になく考えた時、それを Wiener 空間上の積分で書くことの意味、および有効性が次に問題になる。この立場で最も徹底して、非常に興味深いのは最近の Bismut の研究である。([6], [7] 参照)。彼は Riemannian metric が滑かむ時は、Wiener 空間上の解析だけで、その上に漸近評価に有効な parametrix を Wiener 空間上の積分を用いて構成した。我々は (4.2) を得るのに、 g が滑かむ時の (1.5) の評価を使ったが、これらの部分を Bismut の結果でおきかえるならば、 g が滑かでないことも warped product の場合は Wiener 空間上の解析だけで parametrix が構成出来て (3.15) に到達出来ることになる。この様に parametrix の構成に $\Delta/2$ に対応する運動の性質と作用積分最小化の原理を直接的に反映させる方法が、 g が滑かでない時に有効な働きをするかどうかを知るために、まず g が滑かむ時の Bismut の考えの要点を反復してやる。

説明を簡単にするために $M = \mathbb{R}^d$ で、その上のベクトル場で滑かな $A_0, A_1, A_2, \dots, A_r$ が存在し、 Δ が

$$(4.4) \quad \frac{1}{2}\Delta = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^r A_k^2 + A_0$$

と表わされるとする。つぎに

$W_0^r = \{w; w: [0,1] \rightarrow R^r: \text{連続}, w(0)=0\}$
 とし, (Stratonovich 型) 確率微分方程式

$$(4.5) \quad dx(t) = \sum_{k=1}^r A_k(x(t)) \circ dw^k(t) + A_0(x(t))dt$$

の $x(0)=x$ なる解 $x(t, x, w)$ を考える, (詳しくは [4] 参照).
 いまベクトル場 $A_0, A_1, \dots, A_r$ はすべての次数の微分が連続かつ有界であることとを仮定する. しかも (4.4) の作用素が正値としてなりとすることになるので, 写像

$$X(t, x): W_0^r \ni w \longrightarrow x(t, x, w) \in R^d$$

による Wiener 測度 P^w の image measure $P(t, x, dy)$ は Riemannian volume m についで密度関数 $p(t, x, y)$ を持ち, これが基本解になっていることが Malliavin の結果より Wiener space 上の解析だけで示される ([20], [21], [4] 参照). 以下 (3.8) 程度の漸近評価には A_0 は関係しないことに注意し, 作用素

$$(4.6) \quad L = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^r A_k^2$$

に対する方程式

$$(4.7) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = Lu$$

の基本解について考える. これも同じ記号 $p(t, x, y)$ で書く.

対応する確率微分方程式は (4.5) で $A_0 = 0$ の場合である。すなわち

$$(4.8) \quad dx(t) = \sum_{k=1}^n A_k(x(t)) \circ dW^k(t)$$

の場合である。解との他に関する記号は (4.5) の時と同じものを用いる。 W_0^n の部分空間

$$(4.9) \quad H = \{ h \in W_0^n ; h \text{ の各成分は絶対連続で微分は 2 乗可積分} \}$$

に、内積

$$(4.10) \quad \langle h_1, h_2 \rangle = \sum_{k=1}^n \int_0^1 \dot{h}_1^k(s) \dot{h}_2^k(s) ds, \quad h = (h_1, h_2, \dots, h_n) \in H$$

を定め Hilbert 空間が得られる。ここで $\dot{h}$ は h の速度ベクトル。(4.8) に対応した常微分方程式

$$(4.11) \quad \dot{\phi}(s) = \sum_{k=1}^n A_k(\phi(s)) \dot{h}^k(s)$$

を考慮し、 $\phi(0) = x$ なる解を $\phi(t, x, h)$ で表わす。 $x, y \in \mathbb{R}^d$ に対し、

$$(4.12) \quad K_y^x = \{ h \in H ; \phi(1, x, h) = y \}$$

とおく。一方 H 上に作用積分

$$(4.13) \quad I[h] = \langle h, h \rangle / 2 \quad h \in H$$

を導入し、

$$(4.14) \quad E[y] = \begin{cases} \inf_{h \in K_y^x} I[h] & K_y^x \neq \emptyset \\ \infty & K_y^x = \emptyset \end{cases}$$

とするとき、

$$(4.15) \quad E[\dot{y}] = I[h_0], \quad h_0 \in K_y^x$$

なる唯一つの h_0 が存在するとする。このことは Riemannian manifold z が x と y を結ぶ minimal geodesic が唯一つの仮定に相当し、 h_0 を求めることは z の minimal geodesic の R^d への展開を求めることに相当してゐる。 $\phi(1, x, h) = (\phi^1(1, x, h), \phi^2(1, x, h), \dots, \phi^d(1, x, h))$ の $h_0 \in K_y^x$ での変分 $D\phi_{\dot{h}_0}^i(1, x, h)$ を H の元と同一視し、 h_i^* , $i=1, 2, \dots, d$ とする。典型的な場合はこれらのベクトルが 1 次独立な場合でこのことを仮定する。これらで生成される H の部分空間を H_2 , H の中における H_2 の補空間を H_1 とする。 $H = H_1 \oplus H_2$ なる直和分解に分解して、 W_0^Y の pseudo-orthogonal な分解

$$(4.16) \quad W_0^Y = W_1 \oplus W_2$$

が得られる。すなわち $W_2 = H_2$ として、 $H_2 \subset W^*$ と考え、 $W_1 = \{w \in W_0^Y; h_i^*(w) = 0, i=1, 2, \dots, n\}$ としなくてはなる。この分解に対応して W_0^Y 上の Wiener 測度 P^W が W_1 上の Gauss 測度 P_1 と W_2 上の有限次元の Gauss 測度 P_2 の直積に分解される (例えば [6], [22], [26] 等参照)。この様にして h_0 で $\phi(1, x, h)$ を動かす方向 (H_2 による方向) と動かさぬ方向 (H_1 の方向) に Wiener 測度 P^W が分解され、動かす方向は有限次元で、Lebesgue 測度と絶対連続で、密度関数も作用積分

分を用い具体的に表示される。このことが parametrized の構成
で、Laplace の方法と組合せると有効な計算が可能な具体的な形
が得られる理由の 1 つになっている。さらにベクトル場は
完全に条件を仮定すれば、 H_1 の 0 の近傍 $\tilde{U}_0$ と $\mathbb{R}^d$ の y の
近傍 V_y と写像 $\tilde{G} : H_1 \times V_y \rightarrow H_2$ が存在し、任意の $h_1 \in \tilde{U}_0$
と任意の $z \in V_y$ に対し

$$(4.10) \quad z = \phi(1, x, h_0 + h_1 + \tilde{G}(h_1, z))$$

となることを陰関数の定理より示される。 W_0^Y 上の関数
 $X(1, x, W)$ は W に関し一般には連続でずらぬので、このこ
とから証明に導かれるのではなから、確率微分方程式の解で
あることから、完全な仮定をベクトル場 $A_1, A_2, \dots, A_T$ におけ
ば、 W_1 の 0 の近傍 U_0 と写像 $G : W_1 \times V_y \rightarrow W_2 = H_2$ が存
在し、任意の $W_1 \in U_0$ と任意の $z \in V_y$ に対し

$$(4.11) \quad z = X(1, x, h_0 + W_1 + G(W_1, z))$$

となる。しかも $\tilde{G}$ と G の対応は自然なものである (詳しく
は Bismut [6] や Malliavin [22] 参照)。つまり、 L に対
応する拡散過程の測度で、特に $X(0, x, W) = x$, $X(t, x, W) = y$ と条件
つけたものを $Q_{x,y}^t$ とすれば、 $t \downarrow 0$ の時に、おおまかに言
って "非常に早い速度で" $\{\phi(s/t, x, h_0) : 0 \leq s \leq t\}$ なる曲
線のまわりには集中し、その近傍以外は無視出来ることが期待
される。大胆な言い方をすれば、以上のことを念頭に入れ

(4.8) の確率微分方程式のかかりに,

$$(4.19) \quad dX(s) = \sum_{k=0}^N A_k(X(s)) \circ (\# dw^k(s))$$

たす確率微分方程式を考えれば、基本解の parametrix を Wiener 空間上に P_1 による積分の形によつて与えることが出来、Laplace の方法と組合せると $t \downarrow 0$ の漸近評価に充分な情報を与える。ここにはその詳細を述べることが出来ないが、Bismut [6] の (4.57) 式および (5.21) 式参照。以上の推論には正当化を必要とする技術的な問題が残されており、それを実行出来るのは Bismut ([6]) 自身が述べている様に非常に限られた場合である。例えば (4.17) と (4.18) の対応や、(4.8) と (4.19) の解の関係等、Malliavin calculus を W_0^Y 上に進める時に多くの困難を伴う。また一般の Riemannian manifold では Δ が (4.4) の形に表現されるので、正規直交化した frame の bundle 上に持ち上げて考える必要がある ([6], [4] 参照)。

いづれにしても、いくつかの方法の組合せでなく、Wiener 空間上の解析として一貫した方法で、 $t \downarrow 0$ の時の漸近評価の parametrix の構成法の筋書きの1つが Bismut [6] により与えられたこととなる。なおこの話を一般に進めるためには、Malliavin calculus の全面的な検討が必要となるが、その

作業が重要な部分にかかわるものと思われ、研究が最近補完
 的 ([18]) によつて進められてつある。

最後はこの Bismut の考えを g がなめらかであり、時に
 適用出来るかどうかをみるために非常に簡単な例を一つ考
 えてみる。

例 4.1. $M = \mathbb{R}^2$, $M_1 = \mathbb{R}^1$, $M_2 = \mathbb{R}^2$ で、通常の座標で表
 して、
 (4.20) $g_{11} = 1, \quad g_{22} = a(x)^{-1}, \quad g_{12} = g_{21} = 0$

とする。 a は仮定 3.2, 3.3 で与えた条件を満たす
 とし、 $\frac{1}{2} < \alpha < 2$ とする。この例は一般には厳密な証明が
 与えられていない場合になつてゐる。この時の Δ は

$$(4.21) \quad \Delta = \sqrt{a(x)} \frac{\partial^2}{\partial x^1} \left(\frac{1}{\sqrt{a(x)}} \frac{\partial}{\partial x^1} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(a(x) \frac{\partial}{\partial x^2} \right)$$

であたされる。従つて drift の変換と呼ばれる確率論の方
 法を用いると、(3.8) 程度の漸近評価には

$$(4.22) \quad L = \frac{\partial^2}{\partial x^1 \partial x^1} + a(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2 \partial x^2}$$

に對する方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} L u$$

の基本解 $p(t, x, y)$ の漸近評価を示さんとす。この時基礎
 となる測度は $m(dx) = a(x)^{-1/2} dx^1 dx^2$ にとる。 $L/2$ に對する

る拡散過程は確率微分方程式

$$(4.23) \quad \begin{aligned} dX^1(s) &= dW^1(s) \\ dX^2(s) &= \alpha(X^1(s), X^2(s)) dW^2(s) \end{aligned}$$

により与えられる。ここで $\alpha(x) = \sqrt{a(x)}$ である。したがって、 $x_1 \in \mathbb{R}^1$ を固定すると、

$$\alpha(x_1, \cdot) : \mathbb{R}^1 \ni x_2 \rightarrow \alpha(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^1$$

はただ一つの関数である。いま $x = (0, x^2) \in \mathbb{R}^2$ より出発した (4.23) の解を $X(t, x^2, w) = (X^1(t, x^2, w), X^2(t, x^2, w))$ とすれば、 $w(t) = (w^1(t), w^2(t))$ とするとき、

$$(4.24) \quad X^1(t, x^2, w) = w^1(t), \quad 0 \leq t < \infty$$

とある。いまもし $a(x^1, x^2)$ が x^2 に無関係で x^1 だけの関数ならば §3 の skew-product の方法が用いられる。しかし一般にはこの方法は用いることが出来ない。いま $\{w^1(s); 0 \leq s < \infty\}$ で生成される σ -field を $\mathcal{F}$ とし、 $\mathcal{F}$ で条件付た Malliavin calculus を (4.24) に注意して用いると、

$$\mu_{t, x^2}^{w^1}(dy) = P^w[X^2(t, x^2, w) \in dy / \mathcal{F}]$$

で定まる確率 $a(0, y)^{-1/2} dy$ に関し密度関数 $g(t, x^2, y; w^1)$ を持ち、 $(t, x^2, y) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$ について滑らかである。このことから §3 の記号を用いて、 $x = (0, x^2)$, $y = (0, y^2)$ に対し

$$(4.25) \quad p(t, x, y) = \int_{W'(t)} g(t, x^2, y^2; w) P_{0,t}(dw') \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}$$

が示される。この関係式は (3.13) と類似なものである。これから (3.14) に進むことはもはや明らかではな。そこで、 $X^2(t, x^2, w)$ の満たす方程式

$$(4.26) \quad dX^2(t) = \alpha(w'(t), X^2(t)) dW^2(t)$$

を、 w' を固定して考え、すなわち w' が条件ついた Bismut の考えに基づいた推論を進めることを期待される。 α は第2変数について滑らかであるので、滑らかが欠けている部分は w' を条件付けておく限りでは残る。いま滑らかな場合の h_0 を w' を固定した (4.26) 式に代入して計算すれば

$$\dot{h}_0(t) = p(x, y) \left\{ \int_0^1 \alpha(w'(s), \phi_s(x^2, h_0; w')) ds \right\}$$

で与えられる。ここで $p(x, y) = |x^2 - y^2|$ であり、 ϕ_s は $\dot{\phi}(t) = \alpha(w'(t), \phi(t)) \dot{h}(t)$, $h \in H$ の $\phi(0) = x^2$ なる解とする。いま条件付いた場合の Bismut の考えを進めることが出来る、すなわち w' について “ある意味で” 漸近評価が行えるから、(4.25) より $x = (0, x^2)$, $y = (0, y^2)$ に対し

$$(4.27) \quad p(t, x, y) \sim \int_{W'(1)} \exp \left\{ -p(x, y)^2 / (2t \int_0^1 \alpha(\sqrt{t} w'(s), \phi_s(x^2, h_0; \sqrt{t} w')) ds) \right\} \\ \times P_{0,1}(dw') \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}$$

が導かれることが期待される。もしこの結果を認めるならば、(3.8)の形の漸近評価を得るための計算は§3の場合と同様である。言うまでもなく、(4.25)より(4.27)に進むには解決すべき技術的な問題が数多く残されているが、期待感の持てる話の筋にはなっている。尚この例ですべての場合よく進むならば本質的には§3の問題で、 $M_1 = \mathbb{R}^{d_1}$ で g_1 が $\mathbb{R}^{d_1}$ の平坦な metric の場合には肯定的な答が得られることになる。

6. 結び。先に述べた問題のたゞ方は $\alpha=1$ 以外の場合以外は現在の所、他の問題との関連がつかず、人工的で形式的なひるげ方になっている。また本来の Buslaev の問題の特別の場合しかふくまぬ限り臭いが好ましくなる。しかしながら、既に述べた様にこの範囲でも解決しようとするれば、Wiener 空間上の解析としては解決すべき多くのことがあるという意味で興味がある様に思える。Buslaev の場合を完全に調べるには座標変換を上手に行っても、Wiener 空間上の解析としてはもう一段困難と思えることが出て来る。

滑かな時とそうでない時の違いは、Riemannian metric を局所的に座標 $(x_1, x_2, \dots, x_d)$ で展開した時、^(後者の場合は) $|x|^\alpha$, $0 < \alpha < 2$ なる項が座標を上手にとつても codimension 1 の部分多様体上の近傍で残ることである。この量が大局的に見た時、どのような形で集積し無視出来るものになるかを解析する方法を確立するのが、ここが論じている型の問題である。

References

1. D. G. Aronson, Isolated singularities of solutions of second order parabolic equations, Arch. Rat. Mech. Anal., 19 (1965), 231-238.
2. D. G. Aronson, Bounds for the fundamental solution of a parabolic equation, Bull. Amer. Math. Soc., 73 (1967), 890-896.
3. R. Azencott, Grandes déviations et applications, Cours de Probabilité de Saint Flour, Lect. Notes in Math., n° 774, Berlin, Springer, 1978.
4. R. Azencott et., Géodésiques et diffusions en temps petit, Astérisque 84-85, Société Math. de France, 1981.
5. R. L. Bishop and B. O'Neil, Manifolds of negative curvature, Trans. Amer. Math., 145 (1969), 1-49.
6. J. M. Bismut, Large deviations and the Malliavin calculus, Birkhäuser, 1984.
7. J. M. Bismut, The Atiyah-Singer theorems for classical elliptic operators : A probabilistic approach, to appear in Jour. Funct. Anal.
8. V. S. Buslaev, Continuum integrals and the asymptotic

- behavior of the solutions of parabolic equations as $t \rightarrow 0$, Applications to diffraction, Topics in Math. Physics, 2 (1968), ed. by M. Sh. Berman.
9. M.D. Donsker and S.R.S. Varadhan, Asymptotic evaluation of certain Wiener integrals for large time, Functional integration and its applications, Proc. international conf. at Cumberland Lodge, Windsor Great Park, London, 1974, ed. by A.M. Arhus, 15-33.
 10. B. Gaveau, Principe de moindre action, Propagation de la chaleur, estimés sous-elliptiques sur certains groupes nilpotents, Acta Math. 139 (1977), 96-153.
 11. J. Hadamard, Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques.
 12. N. Ikeda, On the asymptotic behavior of the fundamental solution of the heat equation on certain manifolds, Proc. Taniguchi intern. Symp. on Stochastic Analysis, Katata and Kyoto, 1982, Kinokuniya, 1984.
 13. N. Ikeda, Short time asymptotics for fundamental solutions of diffusion equations and curvature of hypersurfaces, The talk at A.M.S. Summer Conf. 1983 at Bolder.

14. N. Ikeda and S. Watanabe, Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes, Kodansha, 1981
15. M. Kac, Can one hear the shape of a drum? Amer. Math. Monthly 73 (April, 1966), 1~23
16. M. Kac, Integration in Function spaces and some of its applications, Accademia Nazionale dei Lincei scuola normale superiore, Pisa, 1980
17. M. Kac, Probability, Number theory and Statistical Physics, Selected Papers ed. by K. Borchowski and D. Donsker, MIT Press, 1979
18. S. Kusuoka, Malliavin calculus based on Brownian motion and Bismut's formula, preprint.
19. E. E. Levi, Sull'equazione de calore, Annali di Math., (3a), 14 (1902), 187-264.
20. P. Malliavin, Stochastic calculus of variations and hypoelliptic operators, Proc. Intern. Symp. S.D.E., Kyoto, 1976, ed. K. Itô, Kinokuniya, 1978.
21. P. Malliavin, C^k -hypoellipticity with degeneracy, Stochastic Analysis, ed. by A. Friedman and M. Pinsky, 199-214, 327-340, Academic Press, New York, 1978

22. P. Malliavin, Implicit functions in finite covark on the Wiener space, Proc. ^{Taniguchi} Intern. conf. on Stochastic Analysis, Katata and Kyoto, 1982, Kinokuniya, ed. by K. Itô, 1984.
23. H.P. McKean and I.M. Singer, Curvature and eigenvalues of the Laplacian, Jour. Diff. Geometry 1 (1960), 43-69.
24. S. Minakshisundaram and A. Pleijel, Some properties of the eigenfunctions of the Laplace operators on Riemannian manifolds, Can. Jour. Math. 1 (1949), 242-256.
25. S.A. Molchanov, Diffusion processes and Riemannian geometry, Russian Math. Survey, 30 (1975), 1-63.
26. I. Shigekawa, Derivatives of Wiener functionals and absolute continuity of induced measure, J. Math. Kyoto Univ., 20 (1980), 263-289.
27. M. Schilder, Some asymptotic formulas for Wiener integrals, Trans. Amer. Math. Soc., 125 (1966), 63-85.
28. S.R.S. Varadhan, Asymptotic probabilities and differential equations, Comm. Pure. Appl. Math., 19 (1966), 161-186.
29. S.R.S. Varadhan, On the behavior of the fundamental solution of the heat equation with variable coefficients, Comm. Pure. Appl. Math., 20 (1967), 431-455.