

2次元 W_u 方程式と準超幾何関数の特異点

名古屋大学 青木和彦
三菱財団研究員 井口和基

§ 1. W_u 方程式と準超幾何関数 (QHGF) ([8], [5])

W_u 方程式は, 統計物理学における異種粒子の分数排
他統計を支配する方程式として導入されたものである([1],
[2], [3], [4].)

$\beta' = \begin{pmatrix} \beta_{11}', & \beta_{12}' \\ \beta_{21}', & \beta_{22}' \end{pmatrix}$ を 2×2 の実行列と
するとき, W_u の方程式は

$$\begin{cases} w_1 - 1 = \sum_1 w_1^{\beta_{11}'} w_2^{\beta_{21}'} \\ w_2 - 1 = \sum_2 w_1^{\beta_{12}'} w_2^{\beta_{22}'} \end{cases} \quad (1.1)$$

と表わされる. $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ の原素での正則解

$$\begin{cases} w_1 = F_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \\ w_2 = F_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \end{cases} \quad (1.2)$$

がただひとつ存在する.

$$f(w) = B - (B - \beta'_{11})w_2 - (B - \beta'_{22})w_1 + G w_1 w_2$$

$$B = \beta'_{11}\beta'_{22} - \beta'_{12}\beta'_{21}, \quad G = (1 - \beta'_{11})(1 - \beta'_{22}) - \beta'_{12}\beta'_{21}$$

とおく. QHGF ([4], [5], [6])

$$F_{\beta'}(\alpha, \alpha; \mathbf{z}, \mathbf{z}) = \sum_{\nu_1, \nu_2 \geq 0} \frac{\Gamma(\alpha + \beta'_{11}\nu_1 + \beta'_{12}\nu_2) \Gamma(\alpha + \beta'_{21}\nu_1 + \beta'_{22}\nu_2)}{\Gamma(\alpha + \beta'_{11}\nu_1 + \beta'_{12}\nu_2) \Gamma(\alpha + \beta'_{21}\nu_1 + \beta'_{22}\nu_2)} \frac{z_1^{\nu_1} z_2^{\nu_2}}{\nu_1! \nu_2!} \quad (1.3)$$

は、原点の近傍で収束するべき級数である。このとき、次の恒等式が得られる。

$$\frac{w_1^{\alpha} w_2^{\alpha}}{f(w)} = F_{\beta'}(\alpha, \alpha; \mathbf{z}, \mathbf{z}) \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} w_1^{\alpha} w_2^{\alpha} &= B F_{\beta'}(\alpha, \alpha; \mathbf{z}, \mathbf{z}) - (B - \beta'_{11}) F_{\beta'}(\alpha, \alpha+1; \mathbf{z}, \mathbf{z}) \\ &\quad - (B - \beta'_{22}) F_{\beta'}(\alpha+1, \alpha; \mathbf{z}, \mathbf{z}) + G F_{\beta'}(\alpha, \\ &\quad \quad \quad (1.5) \end{aligned}$$

(1.1) は、又、写像 $\Upsilon: \mathbb{R}_{>0}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\Upsilon \begin{cases} z_1 = \frac{w_1 - 1}{w_1^{\beta'_{11}} w_2^{\beta'_{21}}} \\ z_2 = \frac{w_2 - 1}{w_1^{\beta'_{12}} w_2^{\beta'_{22}}} \end{cases} \quad (1.6)$$

を定義する。連関数 (1.2) を求めることは、写像 Υ の逆

を求めることに他ならない。 Γ のヤコビアンが 0 になることと

$$y(w) = 0 \quad (4.7)$$

は同値である。 $\beta_2' \beta_2' G \neq 0$ のとき、(4.7) は 実

$\left(\frac{B - \beta_{11}'}{G}, \frac{B - \beta_{22}'}{G} \right)$ を中心とする 双曲線を表す。

以下 次の問題を考察する。

Q1. 写像 Γ の特異点の形状について、 Γ の逆像の
実の個数について。

Q2. 関数 (4.2) 及び $F_{\beta'}(\alpha, \alpha; \Sigma, \Sigma)$ の特異点で
のぶるまゝとモノドロミーの構造について。

Q3. $F_{\beta'}(\alpha, \alpha; \Sigma, \Sigma)$ の対称性について。

§2. W_u の方程式の対称性

W_u の方程式に働く群 G は、 $\mathcal{O}_3$ を 3 次の
対称群として、 $\mathcal{O}_3 \times \mathcal{O}_3$ と $\mathbb{Z}_2$ との半直積に同型であ
る。

$$G \cong (\mathcal{O}_3 \times \mathcal{O}_3) \rtimes \mathbb{Z}_2$$

G の位数は 72. 各 $\mathcal{O}_3$ と $\mathbb{Z}_2$ の生成元は

$$\mathcal{G}_3 = \langle \sigma_1, \tau_1 \rangle, \langle \sigma_2, \tau_2 \rangle$$

$$\mathcal{G}_2 = \langle \sigma_0 \rangle$$

$\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \tau_1, \tau_2$ は行列 β' による変換であって、次で与えられる。

$$\sigma_0 \beta' = \begin{pmatrix} \beta'_{22} & \beta'_{21} \\ \beta'_{12} & \beta'_{11} \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 \beta' = \begin{pmatrix} 1 - \beta'_{11} & -\beta'_{12} \\ \beta'_{21} & \beta'_{22} \end{pmatrix}$$

$$\sigma_2 \beta' = \begin{pmatrix} \beta'_{11} & \beta'_{12} \\ -\beta'_{21} & 1 - \beta'_{22} \end{pmatrix}, \quad \tau_1 \beta' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\beta'_{11}} & \frac{\beta'_{12}}{\beta'_{11}} \\ -\frac{\beta'_{21}}{\beta'_{11}} & \frac{\beta'_{22}}{\beta'_{11}} \end{pmatrix}$$

$$\tau_2 \beta' = \begin{pmatrix} \frac{\beta'_{22}}{\beta'_{21}} & -\frac{\beta'_{12}}{\beta'_{21}} \\ \frac{1}{\beta'_{21}} & \frac{1}{\beta'_{22}} \end{pmatrix}$$

(但し $\sigma_2 = \sigma_0 \sigma_1 \sigma_0$, $\tau_2 = \sigma_0 \tau_1 \sigma_0$)

$\mathcal{G}_0 = \langle \sigma_0, \sigma_1 \rangle$ は位数 8 の部分群である。

$\mathcal{G} = \langle \sigma_0, \sigma_1, \tau_2 \rangle$ であって、基本関係式は

$$\sigma_0^2 = \sigma_1^2 = \tau_2^2 = e,$$

$$(\sigma_0 \sigma_1)^4 = (\sigma_0 \tau_2)^4 = (\sigma_1 \tau_2)^4 = e$$

$$\text{又 } (\sigma_1 \tau_2)^3 = (\tau_2 \tau_2)^3 = e$$

§3. β' の符号と 群 G による同値類

$$h_1 = B - \beta'_{11}, \quad h_2 = B - \beta'_{22} \quad \text{とおく.}$$

以下, 次の非退化条件をおく.

$$(N2) \quad BG \beta'_{11} \beta'_{22} (\beta'_{11} - 1)(\beta'_{22} - 1) h_1 h_2 \neq 0$$

Lemma 1. (N2)の下に, ある元 $\sigma \in G$ が存在して,

$$\sigma \beta' = \begin{pmatrix} \tilde{\beta}'_{11}, & \tilde{\beta}'_{12} \\ \tilde{\beta}'_{21}, & \tilde{\beta}'_{22} \end{pmatrix} \quad \text{は}$$

$$\tilde{\beta}'_{11} > 0, \quad \tilde{\beta}'_{22} > 0, \quad \tilde{\beta}'_{12} > 0, \quad \tilde{\beta}'_{21} > 0 \quad \text{をみたす.}$$

そこで,

$$\beta'_{11} > 0, \quad \beta'_{22} > 0, \quad \beta'_{12} > 0, \quad \beta'_{21} > 0 \quad (3.1)$$

を仮定してよい.

$$(i) \beta'_{11} > 1, \beta'_{22} > 1 \quad (ii) \beta'_{11} > 0, 1 > \beta'_{22}$$

$$(iii) 1 > \beta'_{11}, \beta'_{22} > 1 \quad (iv) 1 > \beta'_{11}, 1 > \beta'_{22}$$

と分ける. さらに, h_1, h_2 の符号によつて

$$(i) \text{ 等 } : \beta'_{11} > 1, \beta'_{22} > 1, \varepsilon_1 h_1 > 0, \varepsilon_2 h_2 > 0$$

($\varepsilon_1, \varepsilon_2 = \pm 1$) などと記す.

又, $I \quad G > 0, B > 0$, $II \quad G > 0, B < 0$
 $III \quad G < 0, B > 0$, $IV \quad G < 0, B < 0$

の4種に分ける。このとき,

Lemma 2. G による β' の符号の同値類
 は以下で与えられる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \textcircled{1} \quad I_{(i)}, I_{(iv)}, \overline{III}_{(ii)}-+, \overline{III}_{(iii)}+- \\ \textcircled{2} \quad \overline{II}_{(iv)}, \overline{III}_{(i)}++, \overline{III}_{(i)}-+, \overline{III}_{(i)}+- \\ \textcircled{3} \quad \overline{IV}_{(i)}, \overline{III}_{(ii)}--, \overline{III}_{(iii)}--, \overline{III}_{(iv)} \\ \quad \overline{IV}_{(iii)}, \overline{IV}_{(ii)} \\ \textcircled{4} \quad \overline{IV}_{(iv)}, \overline{III}_{(i)}-- \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} (\pm) \quad & \overline{I}_{(i)} = \overline{I}_{(i)}++, \quad \overline{I}_{(iv)} = \overline{I}_{(iv)}--, \\ & \overline{II}_{(iv)} = \overline{II}_{(iv)}--, \quad \overline{III}_{(i)} = \overline{III}_{(i)}-+ \cup \overline{III}_{(ii)}--, \\ & \overline{III}_{(iii)} = \overline{III}_{(iii)}+- \cup \overline{III}_{(iii)}--, \quad \overline{III}_{(iv)} = \overline{III}_{(iv)}--, \\ & \overline{IV}_{(i)} = \overline{IV}_{(i)}--, \quad \overline{IV}_{(ii)} = \overline{IV}_{(ii)}--, \quad \overline{IV}_{(iii)} = \overline{IV}_{(iii)}--, \\ & \overline{IV}_{(iv)} = \overline{IV}_{(iv)}-- \end{aligned}$$

§4. G に関する不変量

$$\Psi = GB \beta_1' \beta_2' (\beta_1' - 1) (\beta_2' - 1) h_1 h_2 \quad (4.1)$$

とあつて

$$\sigma_0 \Psi = \Psi, \quad \sigma_1 \Psi = \Psi \quad (4.2)$$

$$\tau_2 \Psi = -\beta_{22}'^{-1} \Psi$$

とめかす。 又

$$\Phi = \Phi_0 + 2\Phi_1 + 2\Phi_2 \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \Phi_0 = & -27 \beta_{11}'^2 \beta_{22}'^2 (\beta_{11}' - 1)^2 (\beta_{22}' - 1)^2 + \\ & + 18 \beta_{12}' \beta_{21}' (\beta_{11}' - 1)(\beta_{22}' - 1)(2\beta_{11}' - 1)(2\beta_{22}' - 1) \\ & + \beta_{12}'^2 \beta_{21}'^2 \{ -62\beta_{11}' \beta_{22}' (1 - \beta_{11}') (1 - \beta_{22}') + \\ & + 8(\beta_{11}' + \beta_{22}' - \beta_{11}'^2 - \beta_{22}'^2) + 1 \} + \beta_{12}'^4 \beta_{21}'^4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_1 = & \beta_{12}'^2 \beta_{21}' \beta_{11}' (\beta_{11}' - 1)(\beta_{22}' + 1)(2\beta_{22}' - 1)(\beta_{22}' - 2) \\ & + \beta_{21}'^2 \beta_{12}' \beta_{22}' (\beta_{22}' - 1)(\beta_{11}' + 1)(2\beta_{11}' - 1)(\beta_{11}' - 2) \\ & + \beta_{12}'^3 \beta_{21}'^2 (2\beta_{22}'^2 - 2\beta_{22}' - 1)(1 - 2\beta_{11}') \\ & + \beta_{12}'^2 \beta_{21}'^3 (2\beta_{11}'^2 - 2\beta_{11}' - 1)(1 - 2\beta_{22}') \\ & + \beta_{12}'^4 \beta_{21}'^3 (2\beta_{22}' - 1) + \beta_{21}'^4 \beta_{12}'^3 (2\beta_{11}' - 1), \end{aligned}$$

$$\Phi_2 = \beta_{12}'^4 \beta_{21}'^2 + \beta_{21}'^4 \beta_{12}'^2$$

とおくとき, $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \Phi$ はすべて

$$\sigma_0 \Phi = \Phi, \quad \sigma_1 \Phi = \Phi, \quad (4.4)$$

$$\sigma_2 \Phi = \beta_{22}'^{-1} \Phi$$

をみたす.

§5. Wu 写像の特異点

写像 T の特異点を ①, ②, ③, ④ の場合に個別的に示す.

写像 $T: \mathbb{R}_{>0}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ の特異点集合 (source において) は,

$$\Sigma: \varphi(w) = 0$$

で定義される双曲線である. Σ は

$$w_1 - \frac{\beta - \beta_{11}'}{G} = \frac{\beta_{21}'}{G} t, \quad w_2 - \frac{\beta - \beta_{22}'}{G} = \frac{\beta_{22}'}{G} t^{-1} \\ (-\infty < t < \infty) \quad (5.1)$$

の形にパラメータ表示される. 写像 T を Σ に制限したとき, $\Sigma = (\Sigma_1, \Sigma_2)$ 平面に像曲線

$T(\Sigma)$ が表示される. その特異点についてよく知られているように, 次の事実が成り立つ.

Lemma 3. 写像 Γ が安定ならば, $\Gamma(\Sigma)$ の特異点 は 尖点 (cusp), 結節点 (node) のみからなる (H. Whitney の定理).

尖点 は 次の3次代数方程式を解くことにより求められる.

$$0 = \frac{1}{\beta'_{22} - 1 + \beta'_{21}t} - \frac{\beta'_{11}}{B - \beta'_{11} + \beta'_{21}t} + \frac{1}{t} - \frac{1}{t + \frac{\beta'_{12}}{B - \beta'_{22}}} \quad (5.2)$$

実3次方程式は 少く共ひとつ実根を持つ. 実根が3個あるかどうかは (5.2) の判別式が正であるかどうかで判定すればよい. 結果は次の通り.

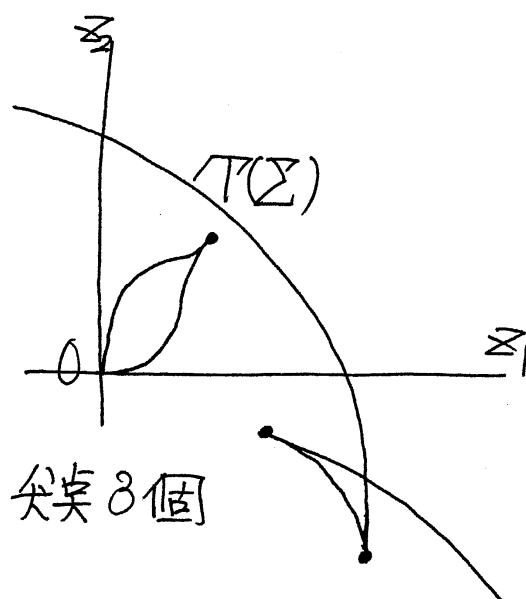
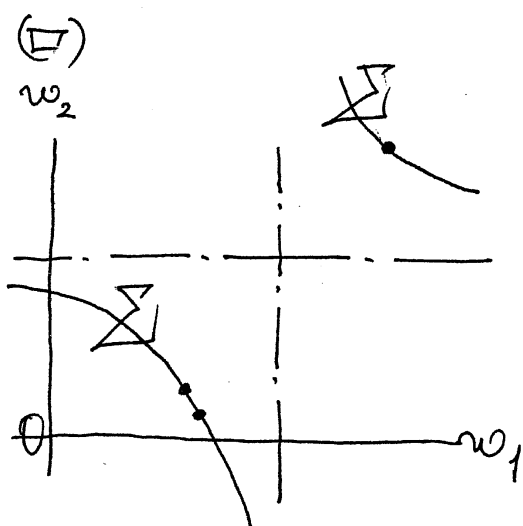
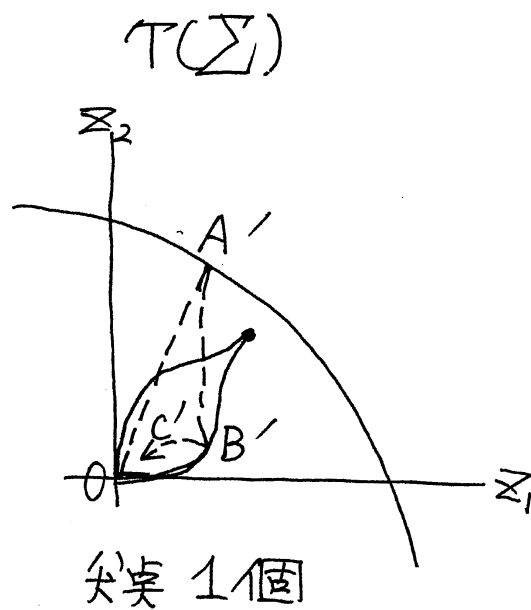
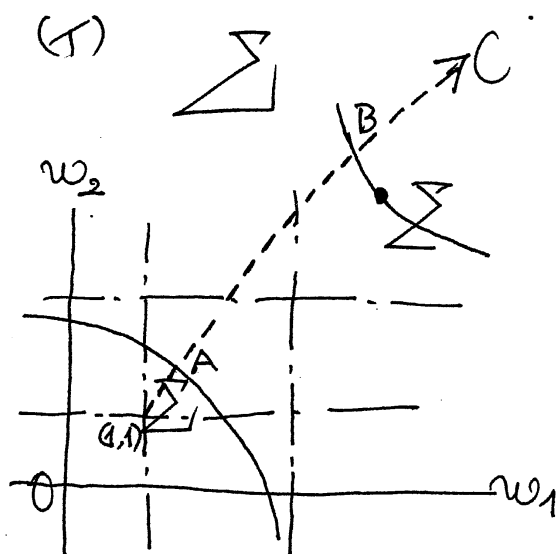
Prop 1. (5.2) が3個の実根を持つための必要十分条件は

$$\Phi(\beta'_{11}, \beta'_{22}, \beta'_{12}, \beta'_{21}) > 0$$

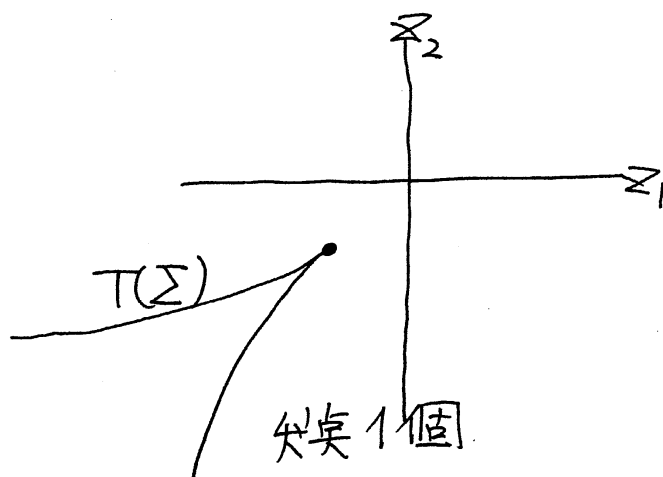
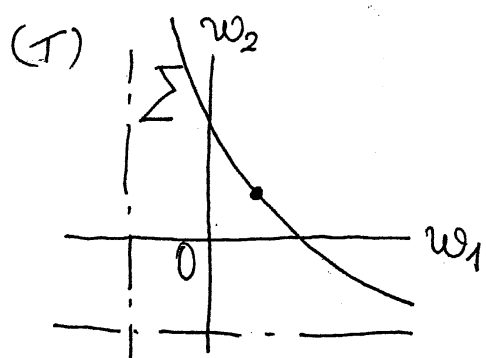
となることである.

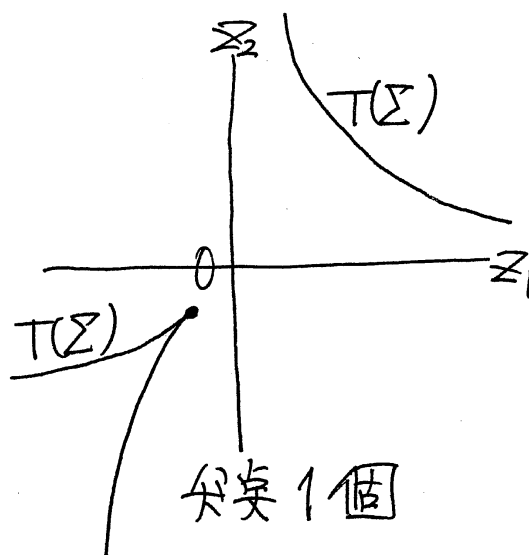
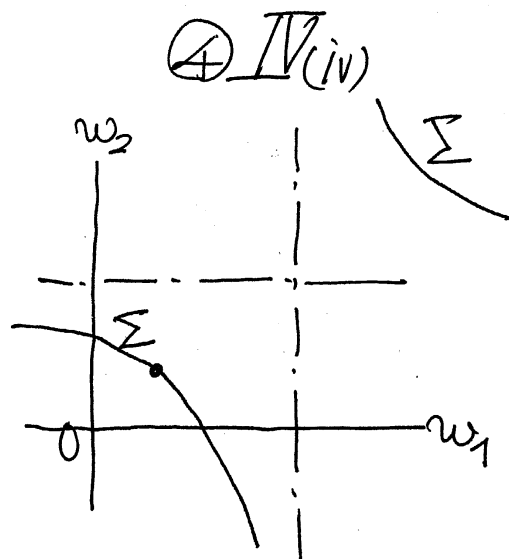
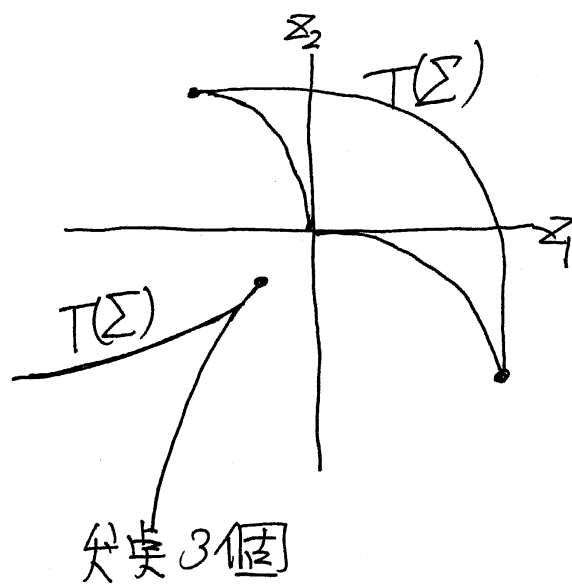
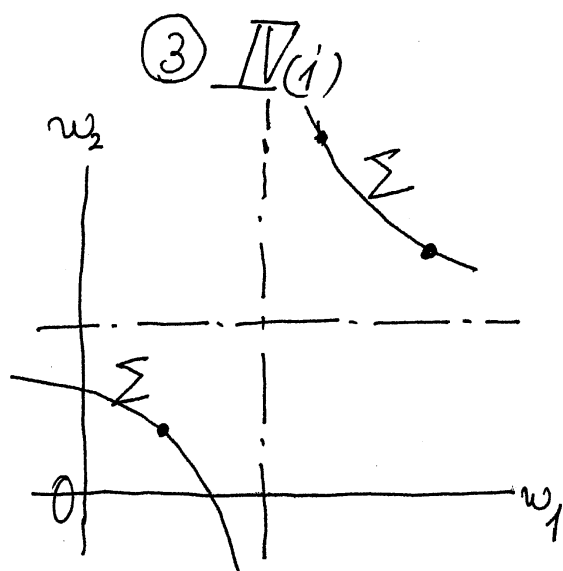
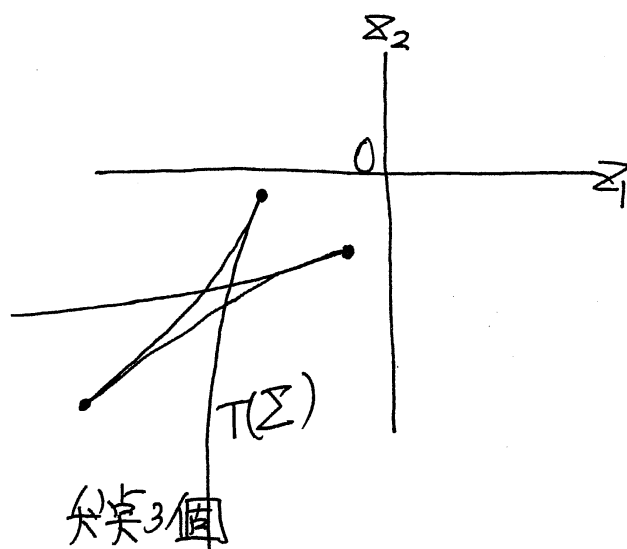
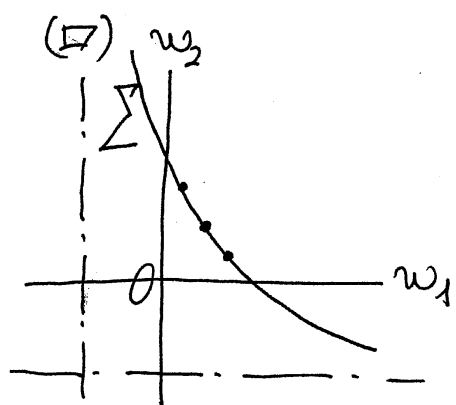
① ~ ④ の場合 K に予想される特異点 Σ と $\Gamma(\Sigma)$ は 次のように図示される.

① $I(i)$ の場合



② $II(iv)$





例えば ①(1) の $\mathbb{R}[K]$ において, 関数 (1.2) は $z=0$ ($w_1=w_2=1$) から解析接続を行なうとき, w が

$$(1,1) \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C$$

と変化するとき, z は

$$(0,0) \rightarrow A' \rightarrow B' \rightarrow C'$$

と変化し, 原点にもどって来る.

w 平面内で $w=(1,1)$ からの道を種々たどることによって, 関数 (1.2) の多価性の構造がわかり, モノドロミーが決定されるであろう.

QHGF (1.3) は, Gauss の超幾何関数における Kummer の関係式に類似した変換公式を持っている. 例えば,

$$\begin{aligned} F_{\beta'}(\alpha_1, \alpha_2; z_1, z_2) &= F_{\sigma_0 \beta'}(\alpha_2, \alpha_1; z_2, z_1) \\ &= F_{\sigma_1 \beta'}(1-\alpha_1, \alpha_2; -z_1, z_2) \\ &= \frac{1}{\beta_{z_2}'} (-z_2)^{-\frac{\alpha_2}{\beta_{z_2}'}} F_{\tilde{z} \beta'}\left(\alpha_1 - \frac{\alpha_2 \beta_{12}'}{\beta_{z_2}'}, \frac{\alpha_2}{\beta_{z_2}'}; \tilde{z}_1, \tilde{z}_2\right) \end{aligned}$$

但し

$$\tilde{z}_1 = z_1(-z_2)^{-\frac{\beta_{21}'}{\beta_{22}}}, \quad \tilde{z}_2 = -(-z_2)^{-\frac{1}{\beta_{22}}}$$

が成り立つ. これらの関係式を使って, (1.3) の大域的ふるまひが決定されるものと思われる.

[文 献]

- [1] B. Sutherland, *Jour. Math. Phys.*, 12(1971), No.2, 251-256 ; [2] F.D. Haldane, *Phys. Rev. Lett.* 67(1991), 937-940 ; [3] Y.-S. Wu, *Phys. Rev. Lett.* 73(1994), 922-925 ; [4] K. Iguchi, *Phys. Rev. B*, 58, No.11(1998), 6892-6911 ; [5] K. Aomoto and K. Iguchi, On quasi hypergeometric functions, to appear in *M.A.A.* [6] —, Singularity and Monodromy of QHGF, to appear in *Contemp. Math.* [7] —, Wu's equation and QHGF, to appear.

[謝辞] 福田拓生氏や石川剛郎氏からは有後な助言をいただいた.