

Schur Index and Schur Group

都立大 理 山田 俊彦

筆者の講演では, Schur index ならびに Schur group に関して最近えられたいくつかの結果について, [1], [3], [4], [7] を中心にして述べた。そこでは [5] において与えられた p 進体上の円分多環 (cyclotomic algebra) の index の公式が一つの中心的役割を演じている。[1], [3], [4] は既に印刷されているので, ここでは [7] で得られている結果を説明しよう。それは次の定理の精密化である。

定理 1 (Fein-Yamada [2]). G は有限群, χ は G の複素既約指標, $m = m_{\mathbb{Q}}(\chi)$ は χ の有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の Schur index, p は素数, そして m の p -part が $p^r > 1$ とする。そのとき p^{r+1} が G の exponent を割るか, p^r が G' (G の交換子群) の exponent を割る。さらに $p=2$ であるかまたは $p \neq 2$ で G の p -Sylow 群が abel ならば, p^{r+1} が G の exponent を割る。また p^{2r} は G の位数を割る。

さて l を素数, $\mathbb{Q}_l$ を l 進体, K を $\mathbb{Q}_l$ 上の円体, 即ちある 1

の中根 ζ' が存在して $\mathbb{Q}_\ell \supset \mathbb{k} \supset \mathbb{Q}_\ell$ とする. $\mathbb{k}$ 上の *cyclotomic algebra* とは 次のような接合積のことである:

$$(1) \quad B = (\beta, \mathbb{k}(\zeta)/\mathbb{k}) = \sum_{\sigma \in \mathcal{G}} \mathbb{k}(\zeta) u_\sigma, \quad (u_1 = 1),$$

$$(2) \quad u_\sigma x = \sigma(x) u_\sigma \quad (x \in \mathbb{k}(\zeta)), \quad u_\sigma u_\tau = \beta(\sigma, \tau) u_{\sigma\tau}.$$

ここで ζ は 1 の中根, $\mathcal{G}$ は $\mathbb{k}(\zeta)/\mathbb{k}$ の Galois 群, β は因子団で, その値は $\mathbb{k}(\zeta)$ に含まれる 1 の中根である. β は次のような積に書くことができる:

$$(3) \quad \beta(\sigma, \tau) = \alpha(\sigma, \tau) \gamma(\sigma, \tau), \quad (\sigma, \tau \in \mathcal{G}),$$

$\alpha(\sigma, \tau)$ は ℓ と素な位数の中根, $\gamma(\sigma, \tau)$ は 1 の ℓ 中根.

さて $\ell \neq 2$ としよう. $\mathbb{k}(\zeta)/\mathbb{k}$ の inertia group を $\langle \theta \rangle$, ϕ を Frobenius 置換とする. θ の位数 e は次のように書かれる:
 $e = \ell^t \cdot e'$, $e' \mid \ell - 1$. f を $\mathbb{k}/\mathbb{Q}_\ell$ の惰性次数とすると, 1 の $\ell^t - 1$ 乗根 $\zeta_{\ell^t - 1}$ は $\mathbb{k}$ にぞくする.

定理 2 (Yamada [5]). ℓ を奇素数, $\mathbb{k}$ を $\mathbb{Q}_\ell$ 上の円体,
 $(\beta, \mathbb{k}(\zeta)/\mathbb{k}) \sim (\alpha, \mathbb{k}(\zeta)/\mathbb{k}) \underset{\mathbb{k}}{\otimes} (\gamma, \mathbb{k}(\zeta)/\mathbb{k})$ を (1) - (3) で与えられる $\mathbb{k}$ 上の円分多環,

$$\delta = (\alpha(\theta, \phi)/\alpha(\phi, \theta)) \alpha(\theta, \theta) \alpha(\theta^2, \theta) \cdots \alpha(\theta^{e-1}, \theta)$$

とすると, $\delta = \zeta_{\ell^t - 1}^v$ (v はある整数) と書ける. そして円分多環 $(\beta, \mathbb{k}(\zeta)/\mathbb{k})$ の index は $e'/(v, e')$ に等しい.

系 3. 記法は定理 2 と同じとする. もし factor set β の

値がすべて ℓ と素な位数の 1 の中根で, かつ $e=e'$ とするならば, 円分多元環 $(\beta, k(\zeta)/k) = \sum_{\sigma \in G} k(\zeta) u_{\sigma}$ の位数は $[u_{\theta}, u_{\phi}] = u_{\theta} u_{\phi} u_{\theta}^{-1} u_{\phi}^{-1}$ の位数と $u_{\theta}^{\ell^f-1}$ の位数の最小公倍数を割り切る.

系 3 と Brauer-Witt の定理を用いると, ℓ 進体 $\mathbb{Q}_{\ell}$ 上の Schur index に関する次の定理が得られる.

定理 4. G を有限群, χ を G の既約指標, ℓ を奇素数, p を素数, χ の $\mathbb{Q}_{\ell}$ 上の Schur index $m_{\mathbb{Q}_{\ell}}(\chi)$ の p -part が $p^n > 1$ とする. そのとき p^{2n} は G の exponent を割るか, p^n は G' の exponent を割る. もし G の p -Sylow 群が abel なら, p^{2n} が G の exponent を割る. p^{2n} が G の exponent を割らなければ, p^{2n+1} が G の位数を割る.

次に 2 進体 $\mathbb{Q}_2$ の場合を考察してみよう. 既約指標 χ に対して $m_{\mathbb{Q}_2}(\chi) = 1$ の 2 であることはよく知られている.

定理 5. G を有限群, χ を G の既約指標とする. もし $m_{\mathbb{Q}_2}(\chi) = 2$ ならば 2^2 が G の exponent を割り, 2 が G' の exponent を割り, 2^3 が G の位数を割る.

注意. $\mathbb{R}$ を実数体とする. G が $m_{\mathbb{R}}(\chi) = 2$ なる既約指標 χ を持つ場合, 必ずしも 2 は G' の exponent を割らないし, また 2^3 は G の位数を割るとは必ずしもいえない. その例は $G = \langle a, b \rangle$, $a^6 = 1$, $b^2 = a^3$, $bab^{-1} = a^{-1}$ により与えられる.

さて $\mathbb{Q}$ 上での Schur index に関する上記の結果と, Fein-Yamada Theorem の一部分を用いて, 有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の Schur index に関する次の結果が得られる.

定理 6. G は有限群, χ は複素既約指標, $m_{\mathbb{Q}}(\chi)$ の p -part は $p^n > 1$ とする. そのとき p^{2n} が G の exponent を割るか, p^n が G' の exponent を割る. G の p -Sylow 群が abel ならば, p^{2n} が G の exponent を割る. p^{2n} が G の exponent を割らなければ, p^{2n+1} が G の位数を割る.

References

- [1] M. Benard, Schur indices and cyclic defect groups, Ann. of Math., 103 (1976), 283-304.
- [2] B. Fein and T. Yamada, The Schur index and the order and exponent of a finite group, J. Algebra, 28 (1974), 496-498.
- [3] G. J. Janusz, Generators for the Schur group of local and global number fields, Pacific J. of Math., 56 (1975), 525-546.
- [4] G. J. Janusz, The Schur group of an algebraic number field, Ann. of Math., 103 (1976), 253-281.
- [5] T. Yamada, Characterization of the simple compo-

- nents of the group algebras over the p -adic number field, *J. Math. Soc. Japan*, 23 (1971), 295-310.
- [6] T. Yamada, *The Schur subgroup of the Brauer Group*, *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 397, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1974.
- [7] T. Yamada, *More on the Schur index and the order and exponent of a finite group*, (preprint).