

強く相互作用し合っているボーズ粒子系の 集団運動の方法による記述

東京理科大学, 理学部, 物理学教室 五十嵐 靖 則
中 馬 國 喜
鈴 木 良 治

(1978年11月14日受理)

概要：強く相互作用し合っているボーズ粒子系の集団励起の性質を一般化された集団座標を用いて研究した。特に，フォノン領域での波長の十分長い部分の素励起スペクトルの形を理論的に調べヘリウムⅡにおけるフォノン・エネルギーは基底状態での粒子の零点運動に強く依存していることが判明した。これまでに受け入れられていた解釈とは異なった，液体ヘリウムⅡでのフォノン・エネルギー・スペクトルの主要項は零点運動と粒子間の相互作用に基づく粒子の平均運動エネルギーと，そして相互作用ポテンシャルのエネルギーからの寄与であることを提案する。我々はフォノン・エネルギーをこの様に解釈することによって，最近実験で指摘されているヘリウムⅡでのフォノンは異常分散を示すという事実を理論的に説明できるのではないかと信じている。

最後に，集団運動と個別運動とを分離して取り扱う方法として，朝永によって提案された方法を三次元の多重モードへ一般化する手法を見出したので紹介する。

§ 1. まえがき

強く相互作用し合っているボーズ粒子系の問題を理論的に解くことが大きな課題になっている。これまでに多くの人々によって，ボーズ粒子系の素励起スペクトルを求める研究がなされてきたが，まだ十分満足のいく理論は建設されていない。

弱く相互作用し合っている場合の理論は，ボゴリューボフ等^{7),8)}によって建設されたが，例えば He Ⅱ の問題には用いることができない。そこで，我々は強く相互作用し合っているボーズ粒子系の問題を集団運動の方法で解くことにする。

まず，§ 2.で我々は Percus¹⁾ によってフェルミ粒子系の問題に用いられた一般化された集団座標を，強く相互作用し合っているボーズ粒子系の問題に応用し，波長の十分長いフォノンのエネルギー・スペクトルを求めるのが目的であるので，粒子間の相関は

ほとんど無視できるので R.P.A. 近似²⁾を用いて計算を進める。§ 3.では絶対零度付近を考えると, 系の大多数の粒子は運動量零の状態にではないが, その近くに存在し, 運動量の大きな粒子からの寄与は少ないだろうという仮定の下に, § 2.で求めた分散関係を, 原点のまわりにマクローリン展開して解く。§ 4.では我々の求めた結果と他の理論や実験等との比較や議論が展開される。§ 5.では集団運動と個別運動とを分離して取り扱う方法として朝永³⁾によって提案された方法を三次元の多重モードへ一般化する方法を見いだしたので紹介する。

§ 2. 一般化された集団座標と素励起

良く知られている様に, 演算子 μ_k^+ が

$$[H, \mu_k^+] |0\rangle = \hbar \omega(k) \mu_k^+ |0\rangle \quad (2-1)$$

なる運動方程式を満足するならば $|k\rangle = \mu_k^+ |0\rangle$ は励起エネルギー $\hbar \omega(k)$ を持った, 励起固有状態となり, 系の独立な素励起は演算子 μ_k^+ によってもたらされることになり, この素励起の性質から系の性質が知れることになる。

式(2-1)で, H は全系のハミルトニアンで,

$$H = \sum_i \frac{\mathbf{P}_i^2}{2m} + \sum_{i < j} \sum_{\mathbf{k}'} V_{\mathbf{k}'} e^{i\mathbf{k}' \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)} \quad (2-2)$$

$V_{\mathbf{k}'}$ は二体ポテンシャルのフーリエ係数である。 $|0\rangle$ は系の基底状態の波動関数である。

従って, 問題は式(2-1)をできる限り良い近似で満足する μ_k^+ を見い出すことである。

強く相互作用し合っている粒子系で起こる運動について考えてみると, 一つの粒子が運動するよりも多数の粒子が同時に運動する(集団運動)方が, ポテンシャル・エネルギーの面で起こり易い場合がある。特に repulsive な core を持つ様な粒子系においては起こり易い。従って, 弱く励起している系を取り扱う方法として, この集団運動に目をつけてこの運動を量子力学的に取り扱って行くというやり方は, 少なくとも系の性質を理解する上で有益である^{4), 5)}

そこで, 強く相互作用し合っているボーズ粒子系での集団運動として, 粒子密度のゆ

らぎに着目してみる。この密度のゆらぎは音波として、系の中を伝わって行くであろう。この音波（フォノン）を記述する座標として、密度のフーリエ成分 $\rho_{\mathbf{k}} = \sum_i e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_i}$ が考えられる^{2), 3)} しかしながら、 $\rho_{\mathbf{k}}$ そのものは $\mathbf{K}$ の大きな所で Harmonic に振動しないし、又個別粒子の運動との分離がうまく取り扱えない。そこで我々は、この座標を modify した一般化された座標を用いることにする。

$$\mu_k^+ = \sum_l e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_l} G(\mathbf{P}_l) \quad (2-3)$$

この座標は Percus¹⁾ がフェルミ粒子系の電子気体の問題に用いたものである。Etters はこれに似た座標を第2量子化した形を用いてボーズ粒子系の問題を解いている。式(2-3)で、係数 $G(\mathbf{P}_l)$ は μ_k^+ が Harmonic に振動する様に決定する。即ち式(2-1)を満足する様に $G(\mathbf{P}_l)$ を決める。

$G(\mathbf{P}_l) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_n} = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_n} G(\mathbf{P}_l + \hbar \mathbf{K} \cdot \delta_{n,l})$ なる関係を用いて、 $[\mathbf{H}, \mu_k^+]$ を計算する。計算の結果は

$$\begin{aligned} [\mathbf{H}, \mu_k^+] &= \sum_i e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_i} \{ G(\mathbf{P}_i) \hbar \omega_k(\mathbf{P}_i) + \\ &+ \sum_{j \neq i} \sum_{\mathbf{k}'} V_{\mathbf{k}'} e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \cdot (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)} [G(\mathbf{P}_j) - G(\mathbf{P}_j - \hbar \mathbf{K}')] \} \end{aligned} \quad (2-4)$$

ここで、 $\omega_k(\mathbf{P}) = [(\mathbf{P} + \hbar \mathbf{K})^2 - \mathbf{P}^2] / 2m\hbar$ である。条件式(2-1)を満足するような μ_k^+ を採用するのであるから、(2-1)と(2-4)から、

$$\begin{aligned} \sum_i e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_i} \{ G(\mathbf{P}_i) \hbar [\omega(\mathbf{K}) - \omega_k(\mathbf{P}_i)] - \\ - \sum_{j \neq i} \sum_{\mathbf{k}'} V_{\mathbf{k}'} e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \cdot (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)} [G(\mathbf{P}_j) - G(\mathbf{P}_j - \hbar \mathbf{K}')] \} |0\rangle = 0 \end{aligned}$$

を満足するように $G(\mathbf{P}_i)$ を決めればよい。我々の目的は波長の十分長い ($\mathbf{K}$ の十分小さい) 励起エネルギーを求めるのであるから、実験¹⁰⁾ からも知られているように、粒子間の相関は無視できるので R.P.A. 近似²⁾ を用いることができ、 $\sum_i e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_i} \{ G(\mathbf{P}_i) \hbar [\omega(\mathbf{K}) - \omega_k(\mathbf{P}_i)] - \sum_{j \neq i} V_{\mathbf{k}} [G(\mathbf{P}_j) - G(\mathbf{P}_j - \hbar \mathbf{K})] \} |0\rangle = 0$ となる。整理すれば、

$$G(\mathbf{P}) [\hbar(\mathbf{K}) - \hbar \omega_k(\mathbf{P}) - V_{\mathbf{k}}] - G(\mathbf{P}_j - \hbar \mathbf{K}) V_{\mathbf{k}} - V_{\mathbf{k}} \sum_j [G(\mathbf{P}_j) - G(\mathbf{P}_j - \hbar \mathbf{K})] = 0$$

五十嵐靖則, 中馬 喜, 鈴木良治

となり上式を満足するように $G(\mathbf{P})$ を決定すればよい。ところで, $V_{\mathbf{k}} \propto \mathcal{Q}^{-1}$ (体積) $\therefore \mathcal{Q} \rightarrow \infty$ とすると, $V_{\mathbf{k}} \rightarrow 0$, 従って, $V_{\mathbf{k}}$ の単独の項は落ちて,

$$G(\mathbf{P}) [\hbar \omega(\mathbf{K}) - \hbar \omega(\mathbf{P})] - V_{\mathbf{k}} \cdot \sum_j [G(\mathbf{P}_j) - G(\mathbf{P}_j - \hbar \mathbf{K})] = 0 \quad (2-5)$$

となる。そこで, j に関する和を運動量 $\mathbf{P}$ を持つ粒子の数の和に置き換えれば,

$$\hbar [\omega(\mathbf{K}) - \omega_{\mathbf{k}}(\mathbf{P})] G(\mathbf{P}) = V_{\mathbf{k}} \cdot \sum_{\mathbf{s}} N_{\mathbf{s}} \{ G[\hbar \mathbf{s}] - G[\hbar(\mathbf{s} - \mathbf{K})] \}, \text{ 両辺 } \hbar [\omega(\mathbf{K}) - \omega_{\mathbf{k}}(\mathbf{P})]$$

で割れば

$$\begin{aligned} G(\mathbf{P}) &= (V_{\mathbf{k}}/\hbar) \sum_{\mathbf{s}} N_{\mathbf{s}} \{ [\omega(\mathbf{K}) - \omega_{\mathbf{k}}(\mathbf{P})]^{-1} G[\hbar \mathbf{s}] \\ &\quad - [\omega(\mathbf{K}) - \omega_{\mathbf{k}}(\mathbf{P})]^{-1} G[\hbar(\mathbf{s} - \mathbf{K})] \} \end{aligned} \quad (2-6)$$

と求まる。

そこで $\omega(\mathbf{K})$ を決める分散関係を求めることにする。(2-6) 式で $\mathbf{P} = \hbar \mathbf{s}'$ とおき, 又同様にして $\mathbf{P} = \hbar(\mathbf{s}' - \mathbf{K})$ とおき, $\sum_{\mathbf{s}} N_{\mathbf{s}}$ を辺々かけて和を取り, 引算すれば,

$$\begin{aligned} &\sum_{\mathbf{s}} N_{\mathbf{s}} [G(\hbar \mathbf{s}') - G[\hbar(\mathbf{s}' - \mathbf{K})]] \\ &= (V_{\mathbf{k}}/\hbar) \sum_{\mathbf{s}} \sum_{\mathbf{s}'} N_{\mathbf{s}} N_{\mathbf{s}'} \{ [\omega(\mathbf{K}) - \omega_{\mathbf{k}}(\hbar \mathbf{s}')]^{-1} \\ &\quad - [\omega(\mathbf{K}) - \omega_{\mathbf{k}}[\hbar(\mathbf{s}' - \mathbf{K})]]^{-1} \} \times \{ G[\hbar \mathbf{s}] - G[\hbar(\mathbf{s} - \mathbf{K})] \} \\ \therefore 1 &= (V_{\mathbf{k}}/\hbar) \sum_{\mathbf{s}} N_{\mathbf{s}} \{ [\omega(\mathbf{K}) - \omega_{\mathbf{k}}(\hbar \mathbf{s})]^{-1} - [\omega(\mathbf{K}) - \omega_{\mathbf{k}}[\hbar(\mathbf{s} - \mathbf{K})]]^{-1} \} \end{aligned}$$

ところで, $\omega_{\mathbf{k}}(\mathbf{P}) = [(\mathbf{P} + \hbar \mathbf{K})^2 - \mathbf{P}^2]/2m\hbar$ であるから,

$$\omega_{\mathbf{k}}[\hbar(\mathbf{s} - \mathbf{K})] = -[(\hbar(\mathbf{s} - \mathbf{K}))^2 - (\hbar \mathbf{s})^2]/2m\hbar$$

他方, $\omega_{\mathbf{k}}(-\hbar \mathbf{s}) = [(\hbar(\mathbf{s} - \mathbf{K}))^2 - (\hbar \mathbf{s})^2]/2m\hbar$

$$\therefore \omega_{\mathbf{k}}[\hbar(\mathbf{s} - \mathbf{K})] = -\omega_{\mathbf{k}}(-\hbar \mathbf{s})$$

従って, $1 = (V_{\mathbf{k}}/\hbar) \sum_{\mathbf{s}} N_{\mathbf{s}} \{ [\omega(\mathbf{K}) - \omega_{\mathbf{k}}(\hbar \mathbf{s})]^{-1} - [\omega(\mathbf{K}) + \omega_{\mathbf{k}}(\hbar \mathbf{s})]^{-1} \} =$

$$= (V_k/\hbar) \sum_s N_s \cdot 2\omega_k(\hbar s) / [\omega^2(K) - \omega_k(\hbar s)]$$

或は,

$$1 = (2V_k/\hbar) \sum_P N_P \left[\frac{\omega_k(P)}{\omega^2(K) - \omega_k^2(P)} \right] \quad (2-7)$$

なる $\omega(K)$ を決定する分散関係を得る。この式は Etlers⁶⁾ の得たものと同じである。

§ 3. フォノン・エネルギー

ボーズ粒子系の絶対零度付近を考えると、ボゴリユーボフ⁷⁾、ブルックナー・沢田⁸⁾、リー・ファン・ヤン⁹⁾ 等の弱く相互作用するボーズ粒子系の理論では、大多数の粒子が運動量零の状態に存在すると仮定されているが、我々は、運動量零の状態に多数の粒子が存在しないまでも、運動量が零の付近の状態に存在する粒子の数はかなりの数と考え²¹⁾、大きな運動量を持った粒子からの (2-7) 式への和の寄与は小さいとみなし、式 (2-7) のカッコ内を $P=0$ のまわりにマクローリン展開して積分方程式を解くことにする。

式 (2-7) を第一近似で解くと、励起エネルギーとして

$$\omega^2(K) = 2T_k N(V_k/\hbar) + T_k^2 \quad (3-1)$$

を得る。但し、 $T_k = \hbar k^2/2m$ である。

この結果はボゴリユーボフ等^{7), 20)}の結果と一致する。

第二次近似値まで精度を上げて解くと、

$$\begin{aligned} \omega^2(K) = & (V_k/\hbar) N T_k + T_k^2 + \{ [(V_k/\hbar) N T_k]^2 + \\ & + 8(V_k/\hbar^2) N T_k^2 \bar{T}_i \}^{1/2} + \frac{(8/3) T_k^2 \bar{T}_i / \hbar}{\{ [N(V_k/\hbar)]^2 + 8N(V_k/\hbar^2) \bar{T}_i \}^{1/2}} \end{aligned} \quad (3-2)$$

或は,

$$\begin{aligned} \omega^2(K) = & N(V_k/\hbar) T_k \left\{ 1 + \left[1 + 8 \cdot \frac{\bar{T}_i}{N V_k} \right]^{1/2} \right\} \\ & + (8/3) T_k^2 \frac{\bar{T}_i}{N V_k} \left[1 + 8 \cdot \frac{\bar{T}_i}{N V_k} \right]^{-1/2} \end{aligned} \quad (3-2')$$

五十嵐靖則，中馬 喜，鈴木良治

と求まる。

$$\text{もし, } \bar{T}_i / NV_k \ll 1 \quad (3-3)$$

ならば,

$$\omega^2(\mathbf{K}) = 2N(V_k/\hbar)T_k + 4T_k \cdot \bar{T}_i / \hbar + T_k^2 + (8/3)T_k^2 \cdot \bar{T}_i / NV_k \quad (3-4)$$

となり, Etters⁶⁾の結果と一致する。

ここで, $\bar{T}_i$ は $\langle \frac{1}{N} \sum_p N_p (P^2/2m) \rangle$ で一粒子当りの平均運動エネルギーであり, 基底状態での粒子の零点運動と粒子間の相互作用に基づく運動エネルギーと考えられる。

§ 4. 実験及び他の理論との比較

最近液体ヘリウム II における音波の伝播と減衰についての種々な実験的研究¹⁹⁾がなされ, 理論と実験とのくい違いが明らかにされている。Maris と Massey¹³⁾はこの理論と実験とのくい違いはフォノンの分散関係

$$\epsilon(\mathbf{P}) = CP(1 - \gamma P^2 - \delta P^4 + \dots)$$

において, 係数 γ が負の値を持つとすれば説明できることを指摘した。その後 Phillips と Waterfield, Hoffer¹⁴⁾ はヘリウム II の定積比熱の測定結果から γ の値が, $-41 \times 10^{-37} [g^{-2} \cdot cm^{-2} \cdot sec^2]$ という値を得, 液体ヘリウムのフォノンは異常分散になることを確認している。最近, 液体ヘリウム II のフォノンの問題について興味ある総合報告が, Maris¹⁵⁾によって, 又液体ヘリウムと固体ヘリウムについて実験から得られた新しい局面について Reatto¹⁶⁾によって報告が出ており, フォノンの異常分散について議論されている。

ところで, 我々の得たフォノン・エネルギーを与える式(3-2)又は(3-4)で, $\bar{T}_i = 0$ とすれば, ボゴリユーボフ等⁷⁾が得た弱く相互作用する場合のボーズ粒子系のエネルギー・スペクトルの結果と一致する。又, (3-3)式を満足する場合は Etters⁶⁾の得た結果と一致する。Etters はフォノン・エネルギーの主要項は $2T_k N(V_k/\hbar)$ の項で与えられ, $\bar{T}_i$ の項は小さな補正項で, フォノン・エネルギーの温度依存性を与える項であると考え, 式(3-4)からフォノン・エネルギーの温度依存性を議論した。Cowley と Wood¹⁰⁾ は, 液体ヘリウムによる中性子散乱の過去6年間にわたる実験結果の総合

強く相互作用し合っているボーズ粒子系の集団運動の方法による記述報告の中で、実験結果と理論との関係に言及し、Etters の理論は確かに温度依存性の面では成功したと言えるが、平均運動エネルギー $\bar{T}_i$ の項は、McMillan¹¹⁾ の estimate した結果を引用してけっして小さくはなく、絶対零度においても 14 [°K] にも達し、この項だけでもフォノンの速度の実験値を越える程であると指摘している。又この中で、Cowley-Wood は運動量零の状態に存在する粒子の数は全体の 10 % 程度であると述べている。

Mihara と Puff¹²⁾ もヘリウムの基底状態における一粒子当りの平均運動エネルギーの値を計算しているが、その結果では、10.2 [°K] を得ている。従って、 NV_k の項と $\bar{T}_i$ の項は同程度の大きさを持ち、 NV_k の方が少し小さい程である。従って Etters の仮定した式(3-3)の条件は成立していないように思える。従って、我々はフォノン・エネルギー・スペクトルの形は、式(3-2)又は(3-2')を持つと考えなくてはならない。

式(3-2)又は(3-2')で V_k は、ポテンシャルのフーリエ係数であるがヘリウムのポテンシャルが正確に知られていないので正確な議論はできないが、(3-2)又は(3-2')からフォノンの音速 C は、

$$C = \left[\frac{N}{2m} V_k \left\{ 1 + \left[1 + 8 \cdot \frac{\bar{T}_i}{NV_k} \right]^{1/2} \right. \right. \\ \left. \left. + (8/3) \frac{\hbar}{2m} T_k \cdot \frac{\bar{T}_i}{NV_k} \left[1 + 8 \cdot \frac{\bar{T}_i}{NV_k} \right]^{-1/2} \right\} \right]^{1/2} \quad (4-1)$$

と求まり、 V_k を、直径 a の core を持った剛体球のポテンシャル(斥力だけ)の場合は、 $V_k(K=0) = \frac{4\pi\hbar^2}{m} a$ で、 a として、2.6 [Å] を代入して、 C が V_k の項だけで与えられるとして音速を計算してみると、120 [m/s] 程度となり、実測のフォノン速度の半分の値しか与えない。従って、 V_k の項だけではフォノン速度は正しく説明できないことを意味しており、 $\bar{T}_i$ の項が必要であることを意味している。式(4-1)の主要項である第一項だけを取って、音速の実測値 240 [m/s] を与えるためには、 $\bar{T}_i$ は 10.2 [°K] 程度であれば良いことがわかる。この $\bar{T}_i$ の値は Mihara と Puff¹²⁾ が得ている値に近い。現実のヘリウムのポテンシャルは斥力だけではなく、弱い引力も持っているので、このことを考慮すると、 V_k の振舞は k の小さい所で k と共に上向きに大きくなる。

従って我々の得た式(4-1)から予想されることは、フォノンは異常分散を示す可能

性を持っている。

§ 5. 集団座標とそれに正準共役な運動量

集団運動と個別運動とを分離して取り扱う方法として, 朝永³⁾によって提案された方法を三次元の多重モードへ適用できる手法を見出したので紹介したい。

朝永の方法は, あまりにもシンプルでエレガントなので, これまで人々を近づけないでいた。他方では集団座標 ξ に正準共役な運動量 Π は存在しないという議論も起こった。

確かに, 密度演算子に厳密に正準共役な運動量は量子力学的に, ロンドン¹⁷⁾やフレーリッヒ¹⁸⁾等が示した様に, 存在しないであろう。しかしながら, 我々は多体問題は厳密に解けると考えるべきではない。必要な程度に厳密な方法で解ければ良いのである。以下で示すように我々は ρ_k に対して, $k < k_c$ と制限を加えるので, ロンドンやフレーリッヒ等の議論は問題にならない。

我々は朝永の方法に従って, 集団座標 ξ_p^k を

$$\xi_p^k = \sum_n e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_n}, \quad k < k_c \quad (5-1)$$

これに正準共役な運動量 Π_p^k が次の形で存在することが見い出された。

$$\begin{aligned} \Pi_p^k = & \Pi_p^t - \frac{1}{N} \sum_{q \neq k}^{k_c} \frac{(\mathbf{K} \cdot \mathbf{q})}{k^2} \bar{\rho}_{k-q} \Pi_q^t + \frac{1}{N^2} \sum_{q \neq k}^{k_c} \frac{(\mathbf{K} \cdot \mathbf{q})}{k^2} \bar{\rho}_{k-q} \cdot \sum_{l \neq q}^{k_c} \frac{(\mathbf{q} \cdot \mathbf{l})}{q^2} \bar{\rho}_{q-l} \Pi_l^t \\ & - \frac{1}{N^3} \sum_{q \neq k}^{k_c} \frac{(\mathbf{K} \cdot \mathbf{q})}{k^2} \bar{\rho}_{k-q} \cdot \sum_{l \neq q}^{k_c} \frac{(\mathbf{q} \cdot \mathbf{l})}{q^2} \bar{\rho}_{q-l} \sum_{m \neq l}^{k_c} \frac{(\mathbf{l} \cdot \mathbf{m})}{l^2} \bar{\rho}_{l-m} \Pi_m^t + \\ & + \frac{i}{2N^2 k^2} \sum_{q \neq 0}^{k_c} \frac{(\mathbf{K} \cdot \mathbf{q})}{q^2} \bar{\rho}_q \cdot \sum_n e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{q}) \cdot \mathbf{r}_n} (\mathbf{K} + \mathbf{q}) \cdot \mathbf{P}_n \\ & - \frac{i}{2N^2 k^2} \sum_{q \neq 0}^{k_c} \frac{(\mathbf{K} \cdot \mathbf{q})}{q^2} \bar{\rho}_q \cdot \sum_{l \neq 0}^{k_c} \frac{(\mathbf{K} + \mathbf{q}) \cdot \mathbf{l}}{l^2} \bar{\rho}_{k-q-l} \cdot \sum_n e^{-i\mathbf{l} \cdot \mathbf{r}_n} (\mathbf{l} \cdot \mathbf{P}_n) + \\ & + \frac{i}{2N^4 k^2} \sum_{q \neq 0}^{k_c} \frac{(\mathbf{K} \cdot \mathbf{q})}{q^2} \bar{\rho}_q \cdot \sum_{l \neq 0}^{k_c} \frac{(\mathbf{K} + \mathbf{q}) \cdot \mathbf{l}}{l^2} \bar{\rho}_{k-q-l} \sum_{m \neq l}^{k_c} \frac{(\mathbf{l} \cdot \mathbf{m})}{m^2} \bar{\rho}_{l-m} \cdot \\ & \cdot \sum_n e^{-i\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}_n} (\mathbf{m} \cdot \mathbf{P}_n) \end{aligned}$$

強く相互作用し合っているボーズ粒子系の集団運動の方法による記述

$$\begin{aligned}
 & -\frac{i}{2N^5 k^2} \sum_{\mathbf{q} \neq 0}^k \frac{(\mathbf{K} \cdot \mathbf{q})}{q^2} \bar{\rho}_{\mathbf{q}} \cdot \sum_{\mathbf{l} \neq 0}^{k_c} \frac{(\mathbf{K} + \mathbf{q}) \cdot \mathbf{l}}{l^2} \bar{\rho}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}-\mathbf{l}} \cdot \sum_{\mathbf{m} \neq \mathbf{l}}^{k_c} \frac{(\mathbf{l} \cdot \mathbf{m})}{m^2} \bar{\rho}_{\mathbf{l}-\mathbf{m}} \\
 & \cdot \sum_{\mathbf{r} \neq \mathbf{m}}^{k_c} \frac{(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})}{r^2} \cdot \bar{\rho}_{\mathbf{m}-\mathbf{r}} \cdot \sum_n e^{-i\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_n} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{P}_n) \quad k < k_c \quad (5-2)
 \end{aligned}$$

$$\text{但し, } \Pi_k^t = -\frac{i}{Nk^2} \sum_n e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_n} \left\{ (\mathbf{K} \cdot \mathbf{P}_n) - \frac{\hbar k^2}{2} \right\} \quad (5-3)$$

である。 $\Pi_p^{\mathbf{k}}$ と $\xi_p^{\mathbf{k}}$ との交換関係は

$$[\Pi_p^{\mathbf{k}}, \xi_p^{\mathbf{k}'}] = (\hbar/i) \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} + O(N^{-2}) \quad (5-4)$$

又 $\Pi_p^{\mathbf{k}}, \Pi_p^{\mathbf{k}'}$ との交換関係は,

$$[\Pi_p^{\mathbf{k}}, \Pi_p^{\mathbf{k}'}] = 0 + O(N^{-2}) \quad (5-5)$$

をそれぞれ満足している。

フォノン・フォノン散乱を取り扱うには N^{-1} の order まで厳密に取り扱える理論が必要であるが、我々の Π, ξ は、それを十分に満している。従って (5-1) と (5-2) の変数を用いて、朝永の方法に従って、ハミルトニアンを集団運動の部分と個別運動の部分というふうに分離することが可能となり、これまでに、理論的に十分に取扱えなかったフォノン・フォノン相互作用の性質とか、roton の性質等を議論できる道が開かれることになる。この新しく見いだされた Π と ξ を用いてハミルトニアンの分離と応用についての議論は次回に報告する予定である。

終りに、本研究に対して議論に加わって下さった東京理科大学鈴木研究室の中島晃氏、大学院生の諸氏に心から感謝の御礼を申し上げます。

参 考 文 献

- 1) J. K. Percus: The Many-body Problem, Chap. XII, p. 119 Interscience Publishers, John Wiley & Sons, New York, London 1963

この書物の中で次の様に述べられている。

“We adopt the Philosophy that the intrinsically complicated systems under consideration can only be solved approximately, ... ”

- 2) D. Pins and D. Bohm: Phys. Rev. **85** (1952) 338, Phys. Rev. **82** (1951) 625
- 3) S. Tomonaga: Prog. Theor. Phys. **13** (1955) 467, 482
- 4) 朝永振一郎 素粒子論研究 Vol. 7 (1955), 14. 原子核の Collective motion について
- 5) R. P. Feynman: Progress in Low Temperature Physics Vol. 1 (Edited C. J. Gorter) Chap. II (1955) p. 17, Phys. Rev. **91** (1953) 1301, Phys. Rev. **94** (1954) 262
- 6) R. D. Etters: Nuovo Cimento XLIV B (1966) 446, Phys. Rev. Lett. **16** (1966) 119
- 7) N. N. Bogoliubov: J. Phys. (U. S. S. R.) **11** (1947) 23
- 8) K. A. Brueckner and K. Sawada: Phys. Rev. **106** (1957) 1128
- 9) T. D. Lee and K. Huang and C. N. Yang: Phys. Rev. **106** (1957) 1135
- 10) R. A. Cowley and A. D. B. Wood: Canad. J. Phys. **49** (1971) 177
D. G. Henshaw and A. D. B. Wood: Phys. Rev. **121** (1961) 1266
A. D. B. Wood and R. A. Cowley: Phys. Rev. Lett. **24** (1970) 646
- 11) W. L. McMillan: Phys. Rev. **A138** (1965) 442
- 12) N. Mihara and R. D. Puff: Phys. Rev. **174** (1968) 221
- 13) H. J. Maris and W. E. Massey: Phys. Rev. Lett. **25** (1970) 220
- 14) N. E. Phillips and C. G. Waterfield and J. K. Hoffer: Phys. Rev. Lett. **25** (1970) 1260
- 15) H. J. Maris: Rev. Mod. Phys. **49** (1977) 341,
H. J. Maris: Phys. Rev. **A8** (1973) 2629,
R. K. Wehner: Phys. Rev. **A9** (1974) 2625,
R. N. Bhatt and W. L. McMillan: Phys. Rev. **A10** (1974) 1591
- 16) L. Reatto: Rivista Del Nuovo Cimento **5** (1975) 108
- 17) F. London: Rev. Mod. Phys. **17** (1945) 310
- 18) H. Fröhlich: Physica **34** (1967) 47, S. Nakajima and D. Yoshioka: Prog. Theor. Phys. **52** (1974) 733, M. Takahashi: Prog. Theor. Phys. **53** (1975) 386 この論文にはボーズ粒子系を記述する集団変数の正当性や, Sunakawa, Yamasaki, Kebukawa のハミルトニアン等を一次元の場合の Lieb, Liniger の厳密解と比較しながらその妥当性が検討されている。
- 19) B. M. Abraham, Y. Eckstein, J. B. Ketterson, J. H. Vignos: Phys. Rev. Lett. **16** (1966) 1039, R. K. Wehner and R. Klein: Phys. Rev. Lett. **23** (1969) 1372

強く相互作用し合っているボーズ粒子系の集団運動の方法による記述

- 20) N. N. Bogoliubov and D. N. Zubarev: Soviet Phys. (JETP) **1** (1955) 83
- 21) H. A. Mook, R. Scherm, and M. K. Wilkinson: Phys. Rev. **A6** (1972) 2268 この論文では ^4He の $1 \cdot 2$ [K] での中性子を用いた実験では運動量零の状態に存在する粒子は 2.4 %程度であることが報告されている。