

ARTHUR の予想について

平賀 郁

1. INTRODUCTION

この概説では主に J. Arthur [4],[5] に述べられている予想について解説を行う. 最初に、知られている実例を幾つか挙げることにする.

- 例 1. (E. Hecke [14, §13])
 p を $p \equiv 3 \pmod{4}$ をみたす奇素数とする. また、

$$\Gamma(p) = \{\gamma \in SL_2(\mathbb{Z}) \mid \gamma \equiv 1_2 \pmod{p}\},$$

とする. いま、 $k > 2$ を奇数とし、 $S_k(\Gamma(p))$ で、weight k の正則な cusp form 全体のなす空間をあらわすことにする. また、 $\mathbb{F}_p$ を有限体とし、 $SL_2(\mathbb{F}_p) \cong SL_2(\mathbb{Z})/\Gamma(p)$ を $S_k(\Gamma(p))$ へ自然に作用させる. ここで、 $SL_2(\mathbb{F}_p)$ の表現 π_+ と π_- を以下のように定める. まず、 $SL_2(\mathbb{F}_p)$ の Borel subgroup $B = TN$ を次のようにとる.

$$\begin{aligned} B &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{F}_p) \right\}, \\ T &= \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{F}_p) \right\}, \\ N &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{F}_p) \right\}. \end{aligned}$$

いま、 χ を $\mathbb{F}_p^\times/(\mathbb{F}_p^\times)^2$ の自明でない 1 次元 character とし、 B の 1 次元 character

$$B \ni \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \longrightarrow \chi(a),$$

も同じ χ であらわすことにする. また、 $\mathbb{F}_p$ の加法群の 1 次元 character φ を $\varphi(1) = \exp(2\pi\sqrt{-1}/p)$ により定め、

$$N \ni \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \varphi(b),$$

により N の 1 次元 character とみなす. このとき、誘導表現 $\text{Ind}_B^G(\chi)$ は二つの既約表現 π, π' の直和に分解し、 $\text{Ind}_N^G(\varphi)$ の直和因子にでてくるのは片方のみである. $\text{Ind}_N^G(\varphi)$ の直和因子にあらわれる方を π_+ とし、もう一方を π_- とする.

Theorem . $S_k(\Gamma(p))$ での $SL_2(\mathbb{F}_p)$ の表現 π_+ (resp. π_-) の multiplicity を m_+ (resp. m_-) とするとき、次のことが成り立つ.

$$m_+ - m_- = h_{\mathbb{Q}(\sqrt{-p})}.$$

但し、 $h_{\mathbb{Q}(\sqrt{-p})}$ は $\mathbb{Q}(\sqrt{-p})$ の類数である. ([41] 参照.)

● 例 2. (Labesse–Langlands [26])

$G = SL_2$ とその inner form のときに、endoscopic lift、multiplicity formula を扱っている. 例 1. はこの場合の特別な例である. 現在のところ、weak multiplicity 1 は完全には示されていないようである.

● 例 3. (Rogawski [33],[34])

$G = U(3)$ のときに、endoscopic lift、multiplicity formula を扱っている. 例 2. と同様に trace formula を stabilize している.

● 例 4. Saito–Kurokawa lift

PGL_2 から $PGSp_2$ への lift. J. Arthur [3] に例として挙げられている non-tempered packet の実例. 但し、表現の distribution character の関係は、non-archimedean local field については示されていない.

([32],[12],[3] 参照)

● 例 5. Duke–Imamoglu–Ibukiyama–Ikeda lift

PGL_2 から Sp_{2n} への lift. $L_{\mathbb{Q}}$ を hypothetical Langlands group とする. いま、

$$k \equiv n \pmod{2},$$

とし、Langlands parameter

$$\phi : L_{\mathbb{Q}} \longrightarrow SL_2(\mathbb{C}) \times L_{\mathbb{Q}},$$

が $SL_2(\mathbb{Z})$ に関する weight k の正則な cusp form に対応しているとする. また、 Sym_{2n-1} を $SL_2(\mathbb{C})$ の $2n$ 次の既約表現とする. $SL_2(\mathbb{C})$ と Sym_{2n-1} のどちらにも、非退化な不変交代形式が存在するので、 $L_{\mathbb{Q}} \times SL_2(\mathbb{C})$ を定義域とする写像 $\phi \boxtimes Sym_{2n-1}$ は $SO_{4n}(\mathbb{C}) \times L_{\mathbb{Q}}$ に像をもつ. ここで、 $SO_{4n}(\mathbb{C})$ の $SO_{4n+1}(\mathbb{C})$ への自然な埋め込みにより、次のような、 $L_{\mathbb{Q}} \times SL_2(\mathbb{C})$ から $SO_{4n+1}(\mathbb{C}) \times L_{\mathbb{Q}} = {}^L Sp_{2n}$ への Arthur parameter ψ が得られる.

$$\begin{array}{ccc} L_{\mathbb{Q}} & \xrightarrow{\phi_k} & SL_2(\mathbb{C}) \times L_{\mathbb{Q}} \\ \times & & \times \longrightarrow SO_{4n}(\mathbb{C}) \times L_{\mathbb{Q}} \\ SL_2(\mathbb{C}) & \xrightarrow{Sym_{2n-1}} & Sp_{2n}(\mathbb{C}) \end{array} \quad \begin{array}{c} \downarrow \\ SO_{4n+1}(\mathbb{C}) \times L_{\mathbb{Q}} = {}^L Sp_{2n} \end{array}$$

この Arthur parameter に対応するもののなかで、 $Sp_{2n}(\mathbb{Z})$ に関する、weight $k+n$ の正則な Siegel cusp form となるものが、Duke–Imamoglu–Ibukiyama–Ikeda lift である。 ([11] 参照。また、T. Ibukiyama も独立に Koecher–Maass series の形で存在を予想していた [15].) 最近、T. Ikeda [17] により lift の存在が証明された。この Arthur parameter に対応した global packet に属する正則でない保型表現も Arthur conjecture により存在が予想されるが、正則でない場合は、現在、存在は証明されていない。(この Arthur parameter ψ に対応する local A-packet は実数体の場合 J. Adams–J. Johnson [2] で構成されている。)

また、endoscopy の理論は prehomogeneous vector space の場合に何らかの類似がある可能性がある。 ([8, 特に、Kottwitz による preface], [16], [35] 参照.)

2. LOCAL LANGLANDS PARAMETER の復習

F を数体とし、 F_v を F の素点 v に対応する局所体とする。また、 G を F_v 上定義された connected reductive algebraic group とする。この論説では、twisted case は扱わない。(twisted case については、[4],[5],[24] 参照。) W_{F_v} を Weil group とし、 L_{F_v} を次のように定める。

$$L_{F_v} = \begin{cases} W_{F_v}, & v: \text{archimedean}, \\ W_{F_v} \times SU_2(\mathbb{R}), & v: \text{non-archimedean}. \end{cases}$$

また、 ${}^L G = \hat{G} \rtimes L_{F_v}$ を L -group とする。

${}^L G_1$ から ${}^L G_2$ への準同型写像 $\phi: {}^L G_1 \rightarrow {}^L G_2$ が下の図式を可換にすると、 ϕ は L_{F_v} 上の準同型写像であるという。

$$\begin{array}{ccc} {}^L G_1 & \xrightarrow{\phi} & {}^L G_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ L_{F_v} & \xlongequal{\quad} & L_{F_v} \end{array}$$

Definition 2.1. 写像 $\phi: L_{F_v} \rightarrow {}^L G$ が L_{F_v} 上の準同型写像で、しかも、 ϕ の像 $\phi(L_{F_v}) \subset {}^L G$ に含まれる元はすべて、その $\hat{G}$ 因子が *semisimple* であるとき、 ϕ は *admissible* な準同型写像であるという。

ϕ^0 を ϕ に対応する L_{F_v} から $\hat{G}$ への写像とすると、上の条件は

$$\phi^0(L_{F_v}) \subset \{g \in \hat{G} \mid g \text{ は semisimple}\},$$

とかける。(ϕ^0 は L_{F_v} の $\hat{G}$ に値をもつ 1-cocycle となる。) L_{F_v} -stable な $\hat{G}$ の subgroup $\hat{P}$ が $\hat{G}$ の parabolic subgroup であるとき、 ${}^L P = \hat{P} \rtimes L_{F_v} \subset {}^L G$ を ${}^L G$ の parabolic subgroup という。 $\mathcal{P}^* = \mathcal{P}^*({}^L G)$ を

${}^L G$ の parabolic subgroup 全体のなす集合とする. また、 $\mathcal{P} = \mathcal{P}({}^L G)$ を $\mathcal{P}^*({}^L G)$ のなかで、 G の F_v 上定義された parabolic subgroup に対応するものの全体のなす $\mathcal{P}^*$ の部分集合とする.

Definition 2.2. *Admissible* な準同型写像 ϕ が、全ての ${}^L P \in \mathcal{P}^* - \mathcal{P}$ に対し、条件 $\phi(L_{F_v}) \not\subset {}^L P$ をみたすとき、 ϕ は *relevant* であるという.

Local Langlands parameter 全体の集合 $\Phi(G)$ を

$$\begin{aligned} \Phi &= \Phi(G), \\ &= \{ \phi : L_{F_v} \longrightarrow {}^L G \mid \phi \text{ は admissible かつ relevant} \} / \text{Ad}(\hat{G}), \end{aligned}$$

により定義する. また、混乱が起きない場合、準同型写像 ϕ と対応する Φ の元を同一視することにする.

Definition 2.3. 三つ組み $(\hat{B}, \hat{T}, \{X_{\alpha}\}_{\alpha \in \hat{\Delta}})$ が次の条件をみたすとき、 $\hat{G}$ の *splitting* と呼ぶ.

1. $\hat{B}$ は $\hat{G}$ の *Borel subgroup*.
2. $\hat{T}$ は $\hat{B}$ の *maximal torus*.
3. $\hat{\Delta}$ を $(\hat{B}, \hat{T})$ に対応する *simple root* 全体のなす集合.
4. $X_{\alpha} \neq 1$ は $\alpha \in \hat{\Delta}$ に対応する *one parameter subgroup* の元.

Remark 2.4. 構成方法から明らかなように、 $\hat{G}$ には、 L_{F_v} -stable な *splitting* が存在している. いま、

$$1 \longrightarrow \hat{G} \longrightarrow \mathcal{G} \xleftarrow{\iota} L_{F_v} \longrightarrow 1,$$

を *split exact sequence* とする. このとき、 $\iota(L_{F_v})$ -stable な $\hat{G}$ の *splitting* は必ずしも存在しない. しかし、 G の、 z -extension G' (定義は *Definition 2.5* を参照) で、準同型写像 $\hat{j}: \hat{G} \rightarrow \hat{G}'$ が次の図式をみたす準同型写像 ${}^L j: \mathcal{G} \rightarrow {}^L G'$ に延長されるものが存在する. (G' は一意的に決まるわけではない.)

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G} & \xrightarrow{{}^L j} & {}^L G' \\ \downarrow & & \downarrow \\ L_{F_v} & \xlongequal{\quad} & L_{F_v} \end{array}$$

このとき、準同型写像 $\phi: L_{F_v} \longrightarrow \mathcal{G}$ は、

$${}^L j \circ \phi: L_{F_v} \xrightarrow{\phi} \mathcal{G} \xrightarrow{{}^L j} {}^L G',$$

により、 L_{F_v} から ${}^L G'$ への準同型写像とみなす.

Definition 2.5. G の central extension G'

$$1 \longrightarrow Z \longrightarrow G' \xrightarrow{j} G \longrightarrow 1,$$

が、次の条件をみたすとき、 G' は G の z -extension と呼ぶ。

1. Z は induced torus.
2. G' は connected center.
3. G' の semisimple part G'_{der} は simply-connected.

Conjecture 2.6. F の additive character φ を固定しておく. $\Pi = \Pi(G)$ を $G(F_v)$ の既約許容表現の "同値類" 全体のなす集合とする. 各 $\phi \in \Phi$ に対し、 L -packet $\Pi_\phi = \Pi_\phi(G)$ が存在し、次のことが成り立つ.

1. Π_ϕ は $\Pi(G)$ の有限な部分集合.
2. $\Pi(G)$ は Π_ϕ の disjoint union である.

$$\Pi(G) = \coprod_{\phi \in \Phi} \Pi_\phi.$$

3. $\pi \in \Pi_\phi$ と、 ${}^L G$ の表現 $r : {}^L G \longrightarrow GL_m(\mathbb{C})$ に対し、 L -function $L(s, \pi, r)$ と ϵ -factor $\epsilon(s, \pi, r, \varphi)$ が存在し、

$$\begin{aligned} L(s, \pi, r) &= L(s, r \circ \phi), \\ \epsilon(s, \pi, r, \varphi) &= \epsilon(s, r \circ \phi, \varphi), \end{aligned}$$

が成り立つ.

3. SL_2 の LOCAL L -PACKET.

必ずしも Arthur 予想の必要のない場合ではあるが、endoscopy と L -packet の実例として、 $G = SL_2$ の場合を述べる. また、この節の内容は、J.-P. Labesse–R. P. Langlands [26] による.

GL_2, SL_2 の L -group は、それぞれ

$$\begin{aligned} {}^L GL_2 &= GL_2(\mathbb{C}) \times L_{F_v}, \\ {}^L SL_2 &= PGL_2(\mathbb{C}) \times L_{F_v}, \end{aligned}$$

なので、Langlands parameter $\tilde{\phi} \in \Phi(GL_2)$ に対し、 $\tilde{\phi}^0$ を対応する $GL_2(\mathbb{C})$ への写像とすると、 $\tilde{\phi}^0$ は $GL_2(\mathbb{C})$ への準同型写像となる. また、 $\tilde{\phi}^0(SU_2(\mathbb{R})) = 1$ であるとき、 W_{F_v} への制限も同じ記号 $\tilde{\phi}^0$ で書くことにする. $\phi \in \Phi(SL_2)$ に対しても、同様に準同型写像 ϕ^0 を考える. いま $GL_2(F_v)$ の L -packet は全て 1 つの既約許容表現の "同値類" により構成されている. 準同型写像

$$\iota : GL_2(\mathbb{C}) \longrightarrow PGL_2(\mathbb{C}),$$

により、写像

$$\iota_* : \Phi(GL_2) \longrightarrow \Phi(SL_2),$$

が得られる. ここで、 $\tilde{\phi} \in \Phi(GL_2)$ に対し、 $\phi = \iota_*(\tilde{\phi}) = \iota \circ \tilde{\phi} \in \Phi(SL_2)$ とおくことにする. $\Pi_{\tilde{\phi}}(GL_2) = \{\pi\}$ とすると、 π の $SL_2(F_v)$ への制限 $\pi|_{SL_2}$ は multiplicity free で、その既約表現への分解を

$$\pi|_{SL_2} = \sigma_1 \oplus \sigma_2 \oplus \cdots \oplus \sigma_r,$$

($\sigma_1, \dots, \sigma_r$ は $SL_2(F_v)$ の既約表現) とするとき、 $r = 1, 2, 4$ であることがわかる. このとき、対応する SL_2 の L -packet は、

$$\Pi_{\phi}(SL_2) = \{\sigma_1, \dots, \sigma_r\},$$

となる.

以下、 F_v を non-archimedean local field とする. いま E_w を F_v の 2 次の拡大体とする. ここで、 N_{E_w/F_v} を norm map とし、 $E_w^1 = N_{E_w/F_v}^{-1}(1)$ とおく. いま、

$$\chi: W_{E_w} \longrightarrow E_w^\times \xrightarrow{\chi_0} \mathbb{C}^\times,$$

を W_{E_w} の 1 次元 character として、

$$\tilde{\phi}^0 = \text{Ind}_{W_{E_w}}^{W_{F_v}}(\chi),$$

$$\phi^0: W_{F_v} \xrightarrow{\tilde{\phi}^0} GL_2(\mathbb{C}) \longrightarrow PGL_2(\mathbb{C}),$$

とする. また、 $\tilde{\phi}^0, \phi^0$ は $SU_2(\mathbb{R})$ を単位元にうつすとする. よって、Langlands parameter $\tilde{\phi} \in \Phi(GL_2)$, $\phi \in \Phi(SL_2)$ が得られる. この節では、以上のようにして構成された $\tilde{\phi} \in \Phi(GL_2)$ を (E_w, χ) からの lift と呼ぶことにする. $GL_2(F_v)$ の部分群 G_{E_w} を

$$G_{E_w} = \{g \in GL_2(F_v) \mid \det g \in N_{E_w/F_v}(E_w^\times)\},$$

により定める. π を $\tilde{\phi}$ に対応する $GL_2(F_v)$ の既約許容表現とすると、 π の G_{E_w} への制限は、同値でない 2 つの既約表現の直和に分解する.

$$\pi|_{G_{E_w}} = \tilde{\sigma} \oplus \tilde{\sigma}'.$$

Langlands parameter $\tilde{\phi}$ に対して、次の 3 つの場合を考える.

●Case 1.

2 つの相異なる F_v の 2 次の拡大体 E_1, E_2 と W_{E_1} (resp. W_{E_2}) の 1 次元 character χ_1 (resp. χ_2) が存在し、 $\tilde{\phi}$ が (E_1, χ_1) の lift であり、しかも (E_2, χ_2) の lift でもある場合.

このとき、 χ_1^0 を、 χ_1 に対応する $E_1^\times$ の 1 次元 character とすると、 $\chi_1^0|_{E_1^1}$ は $(\chi_1^0|_{E_1^1})^2 = 1_{E_1^1}$ をみたす non-trivial な 1 次元 character となる. いま、 $\Pi_{\tilde{\phi}}(GL_2) = \{\pi\}$ とすると、 $\pi|_{SL_2}$ は、同値でない 4 つの既約表現の直和に分解する.

$$\pi|_{SL_2} = \sigma_1 \oplus \sigma_2 \oplus \sigma_3 \oplus \sigma_4.$$

また、

$$\begin{aligned}\pi|_{G_{E_1}} &= \tilde{\sigma}_1 \oplus \tilde{\sigma}_1', \\ \pi|_{G_{E_2}} &= \tilde{\sigma}_2 \oplus \tilde{\sigma}_2',\end{aligned}$$

とするとき、それぞれが、

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_1|_{SL_2} &= \sigma_1 \oplus \sigma_2, & \tilde{\sigma}_1'|_{SL_2} &= \sigma_3 \oplus \sigma_4, \\ \tilde{\sigma}_2|_{SL_2} &= \sigma_1 \oplus \sigma_3, & \tilde{\sigma}_2'|_{SL_2} &= \sigma_2 \oplus \sigma_4,\end{aligned}$$

と分解している. この場合の SL_2 の L -packet は

$$\Pi_\phi = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4\},$$

である.

•Case 2.

ある F_v の 2 次の拡大体 E_w と W_{E_w} の 1 次元 character χ が存在し、 $\tilde{\phi}$ が (E_w, χ) の lift となっており、しかも Case 1 ではない場合.

この場合、 $\chi^0|_{E_w^1}$ は trivial であるか (このとき、 π は principal series)、 $(\chi^0|_{E_w^1})^2 \neq 1_{E_w^1}$ である (このとき、 π は supercuspidal) .
いま、

$$\pi|_{G_{E_w}} = \tilde{\sigma} \oplus \tilde{\sigma}',$$

とすると、 $\sigma = \tilde{\sigma}|_{SL_2}$ も $\sigma' = \tilde{\sigma}'|_{SL_2}$ も既約表現であり、

$$\pi|_{SL_2} = \sigma \oplus \sigma'.$$

よって、 ϕ に対応する L -packet は

$$\Pi_\phi = \{\sigma, \sigma'\},$$

となる.

•Case 3.

Case 1 でも Case 2 でもない場合.

このとき、 $\sigma = \pi|_{SL_2}$ は既約で、対応する L -packet は

$$\Pi_\phi = \{\sigma\},$$

となる. $\phi|_{SU_2(\mathbb{R})} \neq 1$ ならば、 σ は Steinberg 表現である. F_v の剰余標数が 2 でなく、しかも $\phi|_{SU_2(\mathbb{R})} = 1$ ならば、 σ は既約な principal series か trivial 表現である. F_v の剰余標数が 2 で、しかも $\phi|_{SU_2(\mathbb{R})} = 1$ ならば、 σ は既約な principal series か trivial 表現、または supercuspidal 表現になる.

次に、Case.1 の場合をもう少し詳しくみる。この場合、 $E_0 = E_1 E_2$ とおくと、

$$\text{Gal}(E_0/F_v) = \{1, \tau_1, \tau_2, \tau_3 = \tau_1 \tau_2\} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},$$

となっている。但し、

$$\text{Gal}(E_0/E_1) = \{1, \tau_1\}, \quad \text{Gal}(E_0/E_2) = \{1, \tau_2\},$$

である。ここで、 $\{1, \tau_3\}$ に対応する F_v の 2 次の拡大体を E_3 とおく。また、 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C})$ の $PGL_2(\mathbb{C})$ での像を $\overline{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}$ であらわすことにする。

$$s_1 = \overline{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}, \quad s_2 = \overline{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}},$$

とする。いま、

$$\text{Im}(\phi^0) = \langle s_1, s_2 \rangle,$$

$$\phi^0(\tau_1 \cdot W_{E_0}) = s_1,$$

$$\phi^0(\tau_2 \cdot W_{E_0}) = s_2,$$

と仮定する。ここで、 ϕ の $\hat{G} = PGL_2(\mathbb{C})$ での centralizer を

$$\mathcal{S}_\phi = Z_{\hat{G}}(\phi(L_{F_v})),$$

とすると、

$$\mathcal{S}_\phi = \langle s_1, s_2 \rangle,$$

である。また、 $s \in \mathcal{S}_\phi$ に対し、 $\hat{G} = PGL_2(\mathbb{C})$ での centralizer を $\hat{G}_s = Z_{\hat{G}}(s)$ 、 $\hat{G}_s$ の単位元を含む連結成分を $\hat{G}_s^0$ とかくことにする。

$$\hat{G}_{s_1}^0 = \left\{ \overline{\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}} \mid x, y \in \mathbb{C}^\times \right\},$$

なので、 T_{s_1} を $\text{Res}_{E_1/F_v} \mathbb{G}_m$ の部分群 $N_{E_1/F_v}^{-1}(1)$ とすると、

$$\hat{G}_{s_1}^0 \cdot \phi(L_{F_v}) \cong {}^L T_{s_1},$$

であることがわかる。ここで、

$$\mathcal{H}_{s_1} = \hat{G}_{s_1}^0 \cdot \phi(L_{F_v}),$$

と定義する。同様に、 s_2 (resp. $s_3 = s_1 s_2$) に対しても、

$$T_{s_2} = N_{E_2/F_v}^{-1}(1), \quad \mathcal{H}_{s_2} = \hat{G}_{s_2}^0 \cdot \phi(L_{F_v}),$$

$$T_{s_3} = N_{E_3/F_v}^{-1}(1), \quad \mathcal{H}_{s_3} = \hat{G}_{s_3}^0 \cdot \phi(L_{F_v}),$$

とおくと、

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{s_2} &= \hat{G}_{s_2}^0 \cdot \phi(L_{F_v}) \cong {}^L T_{s_2}, \\ \mathcal{H}_{s_3} &= \hat{G}_{s_3}^0 \cdot \phi(L_{F_v}) \cong {}^L T_{s_3},\end{aligned}$$

であることが分かる。いま、

$$\pi|_{SL_2} = \sigma_1 \oplus \sigma_2 \oplus \sigma_3 \oplus \sigma_4,$$

とする。ここで、 $\chi_1: W_{E_1} \rightarrow \mathbb{C}^\times$ に Tate-Nakayama duality で対応する $E_1^\times$ の 1 次元 character を $T_{s_1}(F_v) \cong E_1^1$ に制限したものを、 θ_{s_1} とする。また、 $\text{Gal}(E_1/F_v) = \langle \tau \rangle$ とし、

$$\bar{\theta}_{s_1}(\tau(x)) = \theta_{s_1}(x), \quad \forall x \in T_{s_1}(F_v),$$

により 1 次元 character $\bar{\theta}_{s_1}$ を定義する。 s_2, s_3 に対しても同様に定める。 T_{s_i} , ($i = 1, 2, 3$) は SL_2 の torus と同型なので、 T_{s_i} の SL_2 への埋め込みを固定し、 SL_2 の subgroup とみなす。簡単のため、 T_{s_i} と同型な SL_2 の torus は、全て $SL_2(F_v)$ -conjugate であると仮定する。Harish-Chandra の定理により、 G の既約許容表現 σ の distribution character は G の regular semisimple element の集合の上の locally constant な類関数 Θ_σ であらわすことができる。

$\Theta_{\sigma_1}, \dots, \Theta_{\sigma_4}$ の関係は次のようになっている。 $\mathcal{H}_{s_i}$, ($i = 1, 2, 3$) に対し、 G の regular semisimple element の集合の上の類関数 $\Delta_{G, H_{s_i}}$ が存在し、

$$\sum_{j=1}^4 \langle s_i, \sigma_j \rangle \cdot \Theta_{\sigma_j}(x) = \begin{cases} 0, & \text{if } \{x\}_{GL_2} \cap T_{s_i}(F_v) = \emptyset, \\ \frac{(\theta_{s_i} + \bar{\theta}_{s_i})(x)}{\Delta_{G, H_{s_i}}(x)}, & \text{if } x \in T_{s_i}(F_v), \end{cases}$$

となる。但し、 $\{x\}_{GL_2}$ は x の $\text{Ad}(GL_2(F_v))$ -orbit とし、 $\langle s_i, \sigma_j \rangle = \pm 1$ ($i, j = 1, \dots, 4$) を、

$$\begin{aligned}s_1: & \langle s_1, \sigma_1 \rangle = +1, \quad \langle s_1, \sigma_2 \rangle = +1, \quad \langle s_1, \sigma_3 \rangle = -1, \quad \langle s_1, \sigma_4 \rangle = -1, \\ s_2: & \langle s_2, \sigma_1 \rangle = +1, \quad \langle s_2, \sigma_2 \rangle = -1, \quad \langle s_2, \sigma_3 \rangle = +1, \quad \langle s_2, \sigma_4 \rangle = -1, \\ s_3: & \langle s_3, \sigma_1 \rangle = +1, \quad \langle s_3, \sigma_2 \rangle = -1, \quad \langle s_3, \sigma_3 \rangle = -1, \quad \langle s_3, \sigma_4 \rangle = +1,\end{aligned}$$

とおいている。ところで、 π は

$$\begin{aligned}\pi|_{G_{E_1}} &= \tilde{\sigma}_1 \oplus \tilde{\sigma}_1', & \pi|_{G_{E_2}} &= \tilde{\sigma}_2 \oplus \tilde{\sigma}_2', \\ \tilde{\sigma}_1|_{SL_2} &= \sigma_1 \oplus \sigma_2, & \tilde{\sigma}_2|_{SL_2} &= \sigma_1 \oplus \sigma_3, \\ \tilde{\sigma}_1'|_{SL_2} &= \sigma_3 \oplus \sigma_4, & \tilde{\sigma}_2'|_{SL_2} &= \sigma_2 \oplus \sigma_4,\end{aligned}$$

と分解していたが、実は E_3 においても、

$$\pi|_{G_{E_3}} = \tilde{\sigma}_3 \oplus \tilde{\sigma}'_3,$$

$$\tilde{\sigma}_3|_{SL_2} = \sigma_1 \oplus \sigma_4,$$

$$\tilde{\sigma}'_3|_{SL_2} = \sigma_2 \oplus \sigma_3,$$

と分解している. 比べてみるとわかるように、 s_i に対し、 $\tilde{\sigma}_i$ に含まれるものが $\langle s_i, \sigma \rangle = +1$ で、 $\tilde{\sigma}'_i$ に含まれるものが $\langle s_i, \sigma \rangle = -1$ となるように定めている. ここで、 σ_1 は、 $\langle s_i, \sigma_1 \rangle = +1$, ($i = 1, 2, 3$) となるものだが、実は、 σ_1 の選び方は一意的ではない. ($\Delta_{G, H_{s_i}}$ をそれぞれ適当に ± 1 倍することにより、 $\sigma_1, \dots, \sigma_4$ のどれを選ぶこともできる.) また、 $s = 1$ のときは、 $\hat{G}_s^0 = \hat{G} = PGL_2(\mathbb{C})$ なので $\mathcal{H}_s = {}^L G$ とおく. このとき、

$$\langle 1, \sigma_1 \rangle = \langle 1, \sigma_2 \rangle = \langle 1, \sigma_3 \rangle = \langle 1, \sigma_4 \rangle = +1,$$

とする. このように定義すると、 σ_j に、 $\mathcal{S}_\phi$ から $\mathbb{C}$ への写像

$$\mathcal{S}_\phi \ni s \longrightarrow \langle s, \sigma_j \rangle,$$

を対応させることにより、 $\{\sigma_1, \dots, \sigma_4\}$ と $\mathcal{S}_\phi$ の 1 次元 character が 1 対 1 に対応する. 特に、 σ_1 は、 $\mathcal{S}_\phi$ の trivial character に対応するものである. 最後に、 L -packet $\Pi_\phi(SL_2)$ に対し、 $\{\Theta_{\sigma_1}, \dots, \Theta_{\sigma_4}\}$ を基底とする $\mathbb{C}$ 上の線形空間

$$\langle \Theta_{\sigma_1}, \Theta_{\sigma_2}, \Theta_{\sigma_3}, \Theta_{\sigma_4} \rangle,$$

を考えると、これは、 $s \in \mathcal{S}_\phi$ に対応する部分空間

$$\mathbb{C} \cdot \left(\sum_{j=1}^4 \langle s, \sigma_j \rangle \cdot \Theta_{\sigma_j} \right),$$

の直和となっている. ここで、 $GL_2(F_v)$ -invariant な vector のなす部分空間は $s = 1$ (つまり、 $\mathcal{H}_s = {}^L G$ の場合) に対応するものと一致している.

Remark 3.1. *Case.2* の場合も同様のことが成り立つ. このときは、 $\mathcal{S}_\phi \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ であり、 σ (resp. σ') と $\mathcal{S}_\phi$ の trivial な character (resp. sign character) が対応する.

4. ENDOSCOPY

もとに戻り、 G を connected reductive algebraic group とする. 前節の $\mathcal{H}_s$ は $G = SL_2$ の endoscopic datum を決めている. 一般には endoscopic datum は、次のように定義される.

Definition 4.1. G の endoscopic datum とは、4 つ組み

$$(H, \mathcal{H}, s, \xi),$$

で次の条件をみたすもののことである.

1. H は F_v 上定義された *quasi-split connected reductive algebraic group*.
2. 次のような *split exact sequence*

$$1 \longrightarrow \hat{H} \longrightarrow \mathcal{H} \xrightarrow{\quad} L_{F_v} \longrightarrow 1,$$

が存在し、これにより定義される写像 $L_{F_v} \longrightarrow \text{Out}(\hat{H})$ は ${}^L H$ に対応するものと一致する.

3. s は $\hat{G}$ の *semisimple element*.
4. $\xi: \mathcal{H} \longrightarrow {}^L G$ は L_{F_v} 上の準同型写像.
5. ξ の $\hat{H}$ への制限は、同型写像

$$\hat{H} \longrightarrow \hat{G}_s^0,$$

を導く. この同型写像により、 $\hat{H}$ を $\hat{G}$ の部分群と同一視する.

6. s は次の条件をみたす.

- (a) $\Gamma_v = \text{Gal}(\overline{F}_v/F_v)$ とし、 $Z(\hat{H})$ (*resp.* $Z(\hat{G})$) を $\hat{H}$ (*resp.* $\hat{G}$) の *center* とするとき、 s の $Z(\hat{H})/Z(\hat{G})$ での像 $\bar{s}$ は

$$\bar{s} \in [Z(\hat{H})/Z(\hat{G})]^{\Gamma_v},$$

をみたす. 但し、 $[\]^{\Gamma_v}$ は Γ_v -invariant な元全体のなす部分群. (L_{F_v} の $Z(\hat{H})$ への作用は Γ_v を経由することに注意.)

- (b) π_0 で *connected component* のなす群をあらわすことにする. *Exact sequence*

$$1 \longrightarrow Z(\hat{G}) \longrightarrow Z(\hat{H}) \longrightarrow Z(\hat{H})/Z(\hat{G}) \longrightarrow 1,$$

から、*exact sequence*

$$\pi_0(Z(\hat{H})^{\Gamma_v}) \longrightarrow \pi_0([Z(\hat{H})/Z(\hat{G})]^{\Gamma_v}) \longrightarrow H^1(F_v, Z(\hat{G})),$$

が得られるが [21]、このとき、 $\bar{s}$ の $H^1(F_v, Z(\hat{G}))$ での像は *trivial*.

Remark 4.2. 上の定義は、*local field* F_v でのものである. *Global field* F の場合は、最後の条件

「 $\bar{s}$ の $H^1(F_v, Z(\hat{G}))$ での像は *trivial*」

が

「 $\bar{s}$ の $H^1(F, Z(\hat{G}))$ での像は *locally trivial*」

に変わる. また、ここでの定義は *standard endoscopy* と呼ばれるものである. *Base change lift* 等には *twisted endoscopy* の概念が必要になる [24].

Definition 4.3. *Endoscopic datum* $(H, \mathcal{H}, s, \xi), (H', \mathcal{H}', s', \xi')$ が同値とは、 H と H' の間の同型写像と、 $\mathcal{H}$ と $\mathcal{H}'$ の間の同型写像、および、 $\hat{G}_s^0$ を $\hat{G}_{s'}^0$ にうつす $\text{Ad}(\hat{G})$ の元 $\text{Ad}(g)$ で、自然な条件をみたし、

しかも、 s と $\text{Ad}(g)^{-1}s'$ の $\pi_0([Z(\hat{H})/Z(\hat{G})]^{\Gamma_v})$ での像が等しくなるものが存在することである。(詳しくは [21] を参照.)

Definition 4.4. γ, γ' を $G(F_v)$ の *strongly regular semisimple elements* とする. γ, γ' が $G(\overline{F_v})$ -conjugate であるとき、 γ, γ' は *stably conjugate* であるという. また、 γ と *stably conjugate* な $G(F_v)$ の元全体のなす集合を γ の *stable conjugacy class* と呼ぶ.

γ の *stable conjugacy class* を $\{\gamma\}_{st}$ であらわすことにする.

Remark 4.5. γ が *strongly regular* でない場合にも *stable conjugacy class* は定義されている. また、 $SL_2(F_v)$ では *stable conjugacy class* は $\text{Ad}(GL_2(F_v))$ -orbit と一致している.

Remark 4.6. 互いに *conjugate* な 2 つの元は、*stably conjugate* になる. *Strongly regular semisimple element* γ の *stable conjugacy class* に含まれる *conjugacy class* 全体の集合 $\{\gamma\}_{st}/conj.$ と

$$\text{Ker}[H^1(F_v, G_\gamma) \rightarrow H^1(F_v, G)],$$

との間には自然な全単射が存在する.

いま、*strongly regular semisimple elements* γ, γ' が *stably conjugate* ならば、 G_γ と $G_{\gamma'}$ は同型になる. (同型写像は $\text{Ad}(G(\overline{F_v}))$ の元により得られる.) 以下では、 $G_{\gamma'}$ の上の Haar measure と、 G_γ 上の Haar measuer をこの同型により $G_{\gamma'}$ に引き戻したものが一致するように、torus の上の Haar measure をとることにする.

Remark 4.7. F_v を *non-archimedean local field* とする. γ は *strongly regular* なので、 G_γ は G の *maximal torus* となる. いま、 $\hat{G}_\gamma$ から $\hat{G}$ への埋め込みを固定し ($G_\gamma \subset G$ に対応したものをとる)、 $\hat{G}_\gamma$ を $\hat{G}$ の部分群とみなす. (一般に、 $\hat{G}_\gamma$ への L_{F_v} の作用は、 $\hat{G}$ の部分群としての作用と異なる.) Kottwitz の定理 [21] により、

$$H^1(F_v, G) \cong \pi_0(Z(\hat{G})^{\Gamma_v})^D,$$

が成り立つ. 但し、 D は *Pontrjagin dual*. よって、 $\{\gamma\}_{st}/conj.$ と

$$\text{Ker}[\pi_0(\hat{G}_\gamma^{\Gamma_v})^D \rightarrow \pi_0(Z(\hat{G})^{\Gamma_v})^D],$$

との間には自然な全単射が存在することがわかる. ここで、*endoscopic datum* が条件 $\bar{s} \in [\hat{G}_\gamma/Z(\hat{G})]^{\Gamma_v}$ をみたすと仮定する. すると、*endoscopic datum* の条件 4.1.6b から、 s が写像

$$\kappa_\gamma : \{\gamma\}_{st}/conj. \rightarrow \mathbb{C}^1,$$

を定義することが分かる. ($Z(\hat{H}) \subset \hat{G}_\gamma$ であることに注意.)

混乱が起きないときは、endoscopic datum $(H, \mathcal{H}, s, \xi)$ を endoscopic group H と呼ぶことにする. Endoscopic group H に対し、 $\Delta_{G,H}(\gamma_H, \gamma_G)$ を transfer factor とする. 但し、 γ_G (resp. γ_H) は G (resp. H) の strongly regular semisimple element. (定義については [29] を参照.) ここでは次のことを注意するにとどめる.

Remark 4.8.

1. もし、

$$\Delta_{G,H}(\gamma_H, \gamma_G) \neq 0,$$

が成り立つならば、 γ_H を γ_G へ移す H_{γ_H} から G_{γ_G} への F_v 上定義された同型写像が存在し、対応する $\hat{H}_{\gamma_H}$ と $\hat{G}_{\gamma_G}$ の間の同型写像が、 ξ から導かれるものと $\text{Ad}(\hat{G})$ をのぞいて一致する. 特に、 γ_H に対し、 $\Delta_{G,H}(\gamma_H, \gamma_G) \neq 0$ となる γ_G の conjugacy class は、有限個である. 一般に、この条件をみたすような strongly regular element γ_G が存在するとき、 γ_H は strongly G -regular であるという.

2. γ_H, γ'_H が stably conjugate で γ_G, γ'_G も stably conjugate ならば、

$$\Delta_{G,H}(\gamma'_H, \gamma'_G) = \kappa_{\gamma_G}(\gamma'_G) \Delta_{G,H}(\gamma_H, \gamma_G),$$

が成り立つ.

$C_c^\infty(G)$ を $G(F_v)$ 上の locally constant compactly supported function 全体のなす空間とする. $f^G \in C_c^\infty(G)$ の orbital integral を

$$I(\gamma_G, f^G) = \int_{G(F_v)/G_{\gamma_G}(F_v)} f^G(g \gamma_G g^{-1}) dg,$$

により定め、 $f^H \in C_c^\infty(H)$ の stable orbital integral を

$$I^{st}(\gamma_H, f^H) = \sum_{\gamma'_H \in \{\gamma_H\}_{st}/\text{conj.}} I(\gamma'_H, f^H),$$

により定める.

以後、次の予想が成り立っていると仮定する.

Conjecture 4.9. $f^G \in C_c^\infty(G)$ に対し、ある $f^H \in C_c^\infty(H)$ が存在し、全ての strongly G -regular element γ_H について、次をみたす.

$$I^{st}(\gamma_H, f^H) = \sum_{\{\gamma_G\}} \Delta_{G,H}(\gamma_H, \gamma_G) I(\gamma_G, f^G).$$

但し、右辺は G の strongly regular semisimple orbit について和をとっている.

Remark 4.10. Remark 4.6.1 より、右辺は有限和となっている. もし、 f^G の support が strongly regular semisimple elements 全体のなす部分集合に含まれていれば、 f^H の存在は簡単にわかる. 問題は、singular

element へ近づくときの挙動にある. この予想は、 F_v が archimedean ならば、D. Shelstad により証明されている. ([36] 参照.) F_v が non-archimedean ならば、J. L. Waldspurger により Lie 環の場合の fundamental lemma (lemma と呼ばれているが、conjecture である) から予想が従うことが示されている.

Definition 4.11. H 上の stable distribution とは、各点収束の意味で、strongly regular semisimple element の stable orbital integral の closed linear span に含まれる distribution のことである. つまり、distribution S が、全ての strongly regular semisimple element γ_H に対し $I^{st}(\gamma_H, f^H) = 0$ をみたす $f^H \in C_c^\infty(H)$ に対し、 $S(f^H) = 0$ をみたせば、 S は stable distribution である.

f^G に対し、 f^H のとり方は一意的ではないが、 f^H の stable orbital integral は f^H のとり方によらず、 f^G のみで決まる. よって、 H 上の stable distribution S に対して、 $S(f^H)$ は f^H のとり方によらず決まる.

Definition 4.12. S を H 上の stable distribution とする. このとき、 G 上の invariant distribution $\text{Tran}_H^G(S)$ を

$$\text{Tran}_H^G(S)(f^G) = S(f^H), \quad \forall f^G \in C_c^\infty(G),$$

により定義する.

Remark 4.13. $G = SL_2$ のとき、 s_i ($i = 1, 2, 3$) に対し、

$$\text{Tran}_{H_{s_i}}^G(\theta_{s_i}) = \sum_{j=1}^4 \langle s_i, \sigma_j \rangle \cdot \Theta_{\sigma_j},$$

が成り立っている.

5. LOCAL TEMPERED PACKET.

Definition 5.1. $\phi \in \Phi(G)$ の像 $\text{Im } \phi$ が bounded のとき、 ϕ を tempered な parameter と呼び、 $\Phi_{\text{temp}} = \Phi_{\text{temp}}(G)$ を tempered な parameter 全体のなす集合とする. このとき、 $\phi \in \Phi_{\text{temp}}$ に対し、 S_ϕ を、

$$s \cdot \phi(t) \cdot s^{-1} \cdot \phi(t)^{-1} \in Z(\hat{G}), \quad \forall t \in L_{F_r},$$

をみたし、しかも対応する $H^1(L_{F_r}, Z(\hat{G}))$ の元が trivial になる $s \in \hat{G}$ 全体のなす部分群とし、

$$S_\phi = S_\phi / (S_\phi^0 \cdot Z(\hat{G})),$$

と定義する. (一般の $\phi \in \Phi(G)$ に対しても同様に S_ϕ, S_ϕ が定義される.)

Remark 5.2. Global の場合は、 s の条件で

「対応する $H^1(L_{F_r}, Z(\hat{G}))$ の元が trivial」

のところを、

「対応する $H^1(L_F, Z(\hat{G}))$ の元が *locally trivial*」

に変更したものが S_ϕ となる. ($\mathcal{S}_\phi = S_\phi / (S_\phi^0 \cdot Z(\hat{G}))$ は同様.)

S_ϕ は有限群である. $G = SL_2$ のときは、 S_ϕ は可換群であったが、一般には、非可換な群になることがある. また、 G が *quasi-split* で、 ϕ が Borel subgroup からの *tempered* な誘導表現に対応するときには、 R -group を ${}^L G$ において実現したものとみなすことができる. S_ϕ の semisimple element s に対し、 $\mathcal{H} = \hat{G}_s^0 \cdot \phi(L_{F_v})$ とし、 $\xi = id|_{\mathcal{H}}$ とすることにより endoscopic datum を定義することができる. 以下、簡単のため $\mathcal{H} \cong {}^L H$ と仮定する.

Conjecture 5.3. $\phi \in \Phi_{temp}$ とする. $\pi \in \Pi_\phi$ に対し、 $\mathcal{S}_\phi$ の必ずしも既約とは限らない有限次元表現の *character*

$$\bar{s} \longrightarrow \langle \bar{s}, \pi \rangle \in \mathbb{C},$$

が対応し、次をみたす.

1. Θ_π を $\pi \in \Pi_\phi$ の *distribution character* とするとき、

$$\sum_{\pi \in \Pi_\phi} \langle 1, \pi \rangle \cdot \Theta_\pi,$$

は G 上の *stable distribution*.

2. H を s に対応する *endoscopic group* とし、 ϕ を $\mathcal{H}$ への *parameter* とみる. $f^H \in C_c^\infty(H)$ に対し、

$$f^H(\phi) = \sum_{\sigma \in \Pi_\phi(H)} \langle 1, \sigma \rangle \cdot \Theta_\sigma(f^H),$$

とおく. いま、 f^H が f^G と対応していれば、 f^G によらない定数 c が存在し、

$$f^H(\phi) = c \cdot \sum_{\pi \in \Pi_\phi} \langle \bar{s}, \pi \rangle \Theta_\pi(f^G),$$

がなりたつ.

Remark 5.4. $\mathcal{H} \cong {}^L H$ でないとき、5.3.2 は Remark 2.4 により H を H' にかえたものについての予想となる.

Remark 5.5. F_v が *archimedean* のときには、この予想は、[36] で証明されている. F_v が *non-archimedean* で G が *quasi-split* のときは、 Π_ϕ と $\mathcal{S}_\phi$ の既約表現全体とが、1対1に対応するとおもわれる. G が *quasi-split* でないときは、 G が SL_2 の *anisotropic* な *inner form* (*division algebra* の *reduced norm* が 1 の群) にすでに $\mathcal{S}_\phi$ の既約表現と対応しない例がある [26].

π と $\mathcal{S}_\phi$ の表現の character との対応は、一意的には決まらない. $G = SL_2$ のときの Case.1 の例でも、どの表現が $\mathcal{S}_\phi$ の trivial character に対応するかにより、4通りの可能性がある. われわれは、 G が quasi-split で F_v が non-archimedean のときに、 $\mathcal{S}_\phi$ の trivial character に対応するものを決めたい. その為に、次の予想を使う. ([26] での決め方とは異なっている.)

いま、 G を quasi-split とし、 F_v 上定義された Borel subgroup B の unipotent radical を N とする. N の generic な 1次元 character χ を固定する. G の既約許容表現 π が $\text{Ind}_N^G(\chi)$ に Whittaker model をもつとき、 π は χ -generic であるという. (これは、 G の splitting と F_v の additive character により決まる.)

Conjecture 5.6. (*Generic packet conjecture*)

G を quasi-split とする. $\phi \in \Phi_{\text{temp}}$ であれば、 Π_ϕ に、唯一つだけ χ -generic なものが存在する.

Conjecture 5.7. G が quasi-split であれば、 χ -generic なものが、 $\mathcal{S}_\phi$ の trivial character と対応するようにできる.

Remark 5.8. F_v が archimedean のときには、generic packet conjecture は証明されている. ([39] 参照.) F_v が non-archimedean のときには、 $G = GL_n$, $G = SL_n$ の場合が I. N. Bernstein–A. V. Zelevinski [9] により証明され、 $U(3)$ の場合が、S. Friedberg–S. Gelbart–H. Jacquet–J. Rogawski [13] (別の方法で T. Konno [20]) により証明されている.

6. LOCAL A-PACKET

Saito–Kurokawa lift の場合を考えると、 $\phi \in \Phi$ が non-tempered の場合、 L -packet だけでは、local にも global にもうまくいかないことが分かる. このため、J. Arthur により、 A -packet が考えられた. まず、 A -packet に対応する parameter を導入する. Arthur parameter の集合 $\Psi = \Psi(G)$ を、次の3つの条件をみたす L_{F_v} 上の準同型写像

$$\psi: L_{F_v} \times SL_2(\mathbb{C}) \longrightarrow {}^L G,$$

の $\hat{G}$ -orbit 全体のなす集合とする.

1. ψ は relevant. つまり、 ${}^L P \in \mathcal{P}^* - \mathcal{P}$ ならば $\text{Im } \psi \not\subset {}^L P$.
2. ψ の L_{F_v} への制限は admissible かつ bounded.
3. ψ の $SL_2(\mathbb{C})$ への制限は $\mathbb{C}$ 上定義された準同型写像.

$\psi \in \Psi$ に対し、 $\phi = \phi_\psi \in \Phi$ を

$$\phi: L_{F_v} \xrightarrow{\iota} L_{F_v} \times SL_2(\mathbb{C}) \xrightarrow{\psi} {}^L G,$$

により定める. ただし、 ι は、

$$\iota(w \times t) = (w \times t) \times \begin{pmatrix} |w|_{F_v}^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & |w|_{F_v}^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \quad w \in W_{F_v}, t \in SU_2(\mathbb{R}),$$

により定まる写像である. $\psi \in \Psi$ に対しても, Φ_{temp} の場合と同様にし
て, S_ψ , $\mathcal{S}_\psi$ を定義することができる. また, 自然な準同型写像

$$\mathcal{S}_\psi \longrightarrow \mathcal{S}_\phi,$$

は全射である. よって, $\Pi(\mathcal{S}_\psi)$ (resp. $\Pi(\mathcal{S}_\phi)$) を $\mathcal{S}_\psi$ (resp. $\mathcal{S}_\phi$) の
既約表現の character 全体のなす集合とすると, 写像

$$\Pi(\mathcal{S}_\phi) \longrightarrow \Pi(\mathcal{S}_\psi),$$

は単射である. また, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{C})$ に対し,

$$s_\psi = \psi \left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right),$$

とおく. s_ψ は S_ψ の center の元である.

$$s_\psi \in S_\phi^0,$$

なので, s_ψ の $\mathcal{S}_\phi$ での像は, 1 である. Tempered のときと同様に,
 $s \in \mathcal{S}_\psi$ に対しても, endoscopic datum $(H, \mathcal{H}, s, \xi)$ を定義することが
できる. 簡単のため, $\mathcal{H} \cong {}^L H$ と仮定する.

次が, Arthur 予想の local な場合である.

Conjecture 6.1. $\psi \in \Psi$ に対し, $\Pi(G)$ の有限な部分集合 Π_ψ と写像

$$\delta: S_\psi \times \Pi_\psi \longrightarrow \mathbb{C},$$

が存在し, 次の性質をみたす.

1. Π_ψ に属する既約許容表現は全て unitarizable.
2. G 上の distribution

$$\sum_{\pi \in \Pi_\psi} \delta(s_\psi, \pi) \cdot \Theta_\pi,$$

は stable distribution.

3. ψ を H の parameter とみなし, $f^H \in C_c^\infty(H)$ での 2 の distri-
bution の値を $f^H(\psi)$ とおく. このとき, f^H が $f^G \in C_c^\infty(G)$ に
対応しているとする, f^G によらない定数 c が存在し,

$$f^H(\psi) = c \cdot \sum_{\pi \in \Pi_\psi(G)} \delta(s_\psi s, \pi) \cdot \Theta_\pi(f^G),$$

が成り立つ. また, 各 $\pi \in \Pi_\psi$ に対して, δ は類関数になっ
てい

4. Normalization function と呼ばれる S_ψ の類関数

$$\rho: S_\psi \longrightarrow \mathbb{C}^\times,$$

が存在し, $\rho(s_\psi) = \pm 1$ で, しかも,

$$\delta(s, \pi) \rho(s)^{-1},$$

は s の $\mathcal{S}_\psi$ での像 $\bar{s}$ のみで決まる $\mathcal{S}_\psi$ から $\mathbb{C}$ への写像となる.
 $\pi \in \Pi_\psi$ に対し、 $\mathcal{S}_\psi$ の類関数を

$$\langle \bar{s}, \pi | \rho \rangle = \delta(s, \pi) \rho(s)^{-1},$$

により定める.

5. $\mathbb{R}_{\geq 0}[\Pi(\mathcal{S}_\psi)]$ を $\Pi(\mathcal{S}_\psi)$ の $\mathbb{R}_{\geq 0}$ 係数の有限和のなす $\mathcal{S}_\psi$ の類関数の集合とする. このとき、 $\pi \in \Pi_\psi$ に対し、 $\langle \cdot, \pi | \rho \rangle$ は $\mathbb{R}_{\geq 0}[\Pi(\mathcal{S}_\psi)]$ に含まれる.
6. $\pi \in \Pi_\psi$ に対し、 $\{1, \bar{s}_\psi\}$ の 1 次元 character $e_\psi(\cdot, \pi | \rho)$ が存在し、

$$\langle \bar{s}_\psi \bar{s}, \pi | \rho \rangle = e_\psi(\bar{s}_\psi, \pi | \rho) \langle \bar{s}, \pi | \rho \rangle,$$

が成り立つ.

Conjecture 6.2. G が *quasi-split* であるとする. このとき、上の予想に加え、次のことが成り立つと予想されている.

1. $\phi = \phi_\psi$ を ψ に対応する *Langlands parameter* とするとき、

$$\Pi_\phi \subset \Pi_\psi,$$

が成り立つ.

2. $\pi \in \Pi_\phi \subset \Pi_\psi$ ならば、 $\delta(s_\psi, \pi) = 1$.
3. *Generic packet conjecture* により、 Π_ϕ には、対応する *standard* 表現が χ -generic になる表現 π_χ が一つだけ存在する. いま、 $\pi \in \Pi_\psi$ に対し、

$$\langle \bar{s}, \pi | \pi_\chi \rangle = \langle \bar{s}, \pi | \rho \rangle \langle \bar{s}, \pi_\chi | \rho \rangle^{-1},$$

と定義する. このとき、横方向の写像を

$$\pi \longrightarrow \langle \cdot, \pi | \pi_\chi \rangle,$$

として、次の可換図式が得られる.

$$\begin{array}{ccc} \Pi_\psi & \longrightarrow & \Pi(\mathcal{S}_\psi) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \Pi_\phi & \longrightarrow & \Pi(\mathcal{S}_\phi) \end{array}$$

Remark 6.3. $\mathcal{H} \not\cong {}^L H$ のときは、*Remark 2.4* により H を H' にかえたものについての予想となる.

Remark 6.4. $G = U(3)$ のときは、*J. Rogawski* [33] によりこの予想は示されている.

Remark 6.5. Π_ψ は *enlarged packet* と呼ばれることもある.

Remark 6.6. $\psi|_{SL_2(\mathbb{C})} = 1$ のとき、 ϕ は *tempered* な *Langlands parameter* で、 $\Pi_\psi = \Pi_\phi$ となると予想される. 一般に Π_ψ は、*non-tempered* な表現と *tempered* な表現を同時に含みうる. よって、 Π_ψ 同士は、一般に *disjoint* ではない. また、一般に Π_ψ は *L-packet* の和集合にもなり得ない. (次の例 [33].)

例 (J. Rogawski [33])

$G = U(3)$ とする. F_v を non-archimedean local field とし、 G が F_v の 2 次の拡大体 E_w 上 split していると仮定する. $\text{Gal}(E_w/F_v) = \langle \tau \rangle$ とし、 τ が $\hat{G} = GL_3(\mathbb{C})$ に

$$\tau(g) = J^{-1} \cdot {}^t G^{-1} \cdot J,$$

で作用するとする. 但し、 $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ である. この作用により、 ${}^L G$ を定義する. 次に、 $\psi \in \Psi(G)$ を、以下のように定める. まず、

$$w_\sigma \in W_{E_w/F_v} - W_{E_w/E_w},$$

を固定する. 1 次元 character

$$\mu: E^\times \longrightarrow \mathbb{C}^1,$$

を $F^\times$ への制限が E_w/F_v の class character と一致するものとし、

$$\chi: E^\times \longrightarrow \mathbb{C}^1,$$

を $F^\times$ への制限が trivial character となる 1 次元 character とする. ここで、 ψ に対応する $\hat{G}$ への写像 ψ^0 を次のように定める.

$$\psi^0: SL_2(\mathbb{C}) \ni \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{12} \\ 0 & 1 & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{22} \end{pmatrix},$$

$$\psi^0: SU_2(\mathbb{R}) \ni t \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\psi^0: W_{E_w/E_w} \ni w \longrightarrow \begin{pmatrix} \mu(w) & 0 & 0 \\ 0 & \chi(w) & 0 \\ 0 & 0 & \mu(w) \end{pmatrix},$$

$$\psi^0: w_\sigma \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

このとき、

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_\psi &= \langle \bar{s}_\psi \rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \\ \mathcal{S}_\phi &= \{1\},\end{aligned}$$

となり、 $\Pi_\phi = \{\pi^n\}$ は non-tempered な表現 1 つだけからなる L -packet で、 $\Pi_\psi = \{\pi^n, \pi^s\}$ は、 π^n と supercuspidal 表現 π^s からなる A -packet となる。ここで、 $\pi_\chi = \pi^n$ であり、 δ, ρ は、次のようになる。

$$\begin{aligned}\delta(1, \pi^n) &= 1, & \delta(s_\psi, \pi^n) &= 1, \\ \delta(1, \pi^s) &= 1, & \delta(s_\psi, \pi^s) &= -1, \\ \rho(1) &= 1, & \rho(s_\psi) &= 1.\end{aligned}$$

$\Pi(\mathcal{S}_\phi)$ の $\mathcal{S}_\psi$ への inflation は、 $\mathcal{S}_\psi$ の trivial な character になり、これと π^n が対応し、 π^s が $\mathcal{S}_\psi$ の sign character と対応する。 s_ψ に対応する endoscopic datum を考えると、 $H = U(2) \times U(1)$ 、 $\mathcal{H} \cong {}^L H$ であり、 ψ を $\Psi(H)$ の元とみると、 $\Pi_\psi(H) = \{\pi_H\}$ は H の 1 次元表現 π_H のみからなる A -packet である。つまり、

$$\mathrm{Tran}_H^G(\Theta_{\pi_H}) = \Theta_{\pi^n} + \Theta_{\pi^s},$$

が成り立つ。また、 π^s を含む tempered な L -packet $\{\pi^s, \pi^d\}$ は π^s と discrete series π^d の 2 つからなる。

Remark 6.7. $F_v = \mathbb{R}$ のとき、*J. Adams–J. Johnson* [2] により、予想は条件付きで示された。このとき、 G が *split* でも、 Π_ψ から $\Pi(\mathcal{S}_\psi)$ への写像が単射ではない例がある。

例 (J. Adams–J. Johnson [2])

$F_v = \mathbb{R}$ とする。簡単のため、 G が quasi-split で compact な maximal torus T をもつと仮定する。また、 Π_ϕ の元が discrete series と同じ infinitesimal character を持つ場合のみを考える。 θ を T を fix する Cartan involution とし、対応する G の Lie algebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ の involution も θ であらわす。 $\mathfrak{q} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{u}$ を $\nu \in \mathfrak{t}$ により決まる $\mathfrak{g}$ の θ -stable parabolic subalgebra とし、 L を $\mathfrak{q}$ の G での stabilizer とする。よって、 L の Lie algebra は $\mathfrak{l}$ となり、 $T \subset L$ である。 $w \in W(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ に対し、 $\mathrm{Ad}(w)\nu$ により決まる θ -stable parabolic subalgebra を $\mathfrak{q}_w$ とする。もし必要であれば、 $\mathfrak{q}$ を $\mathfrak{q}_w$ で取り換えて、 L が quasi-split であると仮定する。ここで、 ${}^L L$ の ${}^L G$ への $L_{\mathbb{R}}$ 上の埋め込みを固定する。我々は $\psi \in \Psi(G)$ が次の条件をみたしていると仮定する。

1. ψ は ${}^L L$ を経由する。
2. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{C})$ の $\hat{L}$ での像は $\hat{L}$ の regular unipotent element である。

3. $\phi = \phi_\psi$ に対応する L -packet $\Pi_\phi(G)$ に属する表現は G のある discrete series と同じ infinitesimal character μ をもつ.

このとき、次の条件をみたす $\lambda \in \mathfrak{t}^*$ が存在する.

1. $2\rho = 2\rho(\mathfrak{l}) + 2\rho(\mathfrak{u})$ を positive root の和として、

$$\operatorname{Re}\langle \alpha, \lambda + \rho \rangle \geq 0, \quad \forall \alpha \in \Delta(\mathfrak{u}, \mathfrak{t}),$$

が成り立つ.

2. $A_q(\lambda) \in \Pi_\phi$. よって、特に $A_q(\lambda)$ は infinitesimal character $\mu = \lambda + \rho$ をもつ.

ここで、

$$S = W(G, T) \backslash W(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}) / W(\mathfrak{l}, \mathfrak{t}),$$

とする. このとき、

$$\Pi_\psi(G) = \{A_{q_w}(\operatorname{Ad}(w)\lambda) \mid w \in S\},$$

である.

7. GLOBAL PACKET.

以後、 G は F 上定義されているとし、 L_F を conjectural Langlands group とする. Local のときと同様に、Arthur parameter

$$\psi: L_F \times SL_2(\mathbb{C}) \longrightarrow {}^L G,$$

全体の集合 $\Psi(G)$ を考えることができる. (Definition 7.1で述べるように、 $\operatorname{Ad}(\hat{G})$ -orbit と異なる同値条件を考えるので、ここでは $\operatorname{Ad}(\hat{G})$ -orbit 全体の集合ではなく、準同型写像全体の集合とみる.) また、準同型写像

$$L_{F_v} \longrightarrow L_F,$$

により、 ψ から、local な Arthur parameter ψ_v を定義することができる. 以後、local なものは、 v をつけることにする. A_G を G の center の maximal F -split torus とする. 準同型写像

$$A_G \longrightarrow G,$$

から、 L_F 上の準同型写像

$${}^L G \longrightarrow {}^L A_G,$$

が得られる. よって、Arthur parameter ψ に対し、 A_G の 1 次元 character ζ が決まる. (ψ の条件により、 ζ は unitary character になる. 一般には、 ζ が unitary でない様に定義してもよい.) $\Psi(G, \zeta)$ を、対応する A_G の 1 次元 character が ζ となる Arthur parameter 全体のなす

集合とする. Local にも同様に、 $\Psi_v(G, \zeta_v)$ を定義することができる. また、 $L^2(G(F) \backslash G(\mathbb{A}), \zeta)$ を条件

$$f(\gamma ga) = \zeta(a)f(\gamma), \quad \forall \gamma \in G(F), \forall g \in G(\mathbb{A}), \forall a \in A_G(\mathbb{A}),$$

$$\int_{G(F) \cdot A_G(\mathbb{A}) \backslash G(\mathbb{A})} |f(g)|^2 < \infty,$$

をみたす L^2 -関数 f 全体のなす空間とし、 r をこの空間の上への $G(\mathbb{A})$ の右正則表現とする. $G(\mathbb{A})$ の表現 r の multiplicity formula を考えるとき、 ψ の $\hat{G}$ -conjugacy class を考えるのではうまくいかない. このため、次のような同値類を考える.

Definition 7.1. $\psi_1, \psi_2 \in \Psi(G, \zeta)$ が同値 ($\psi_1 \sim \psi_2$ とあらわす) であるとは、次の条件をみたす $g \in \hat{G}$ が存在することである. L_F の $Z(\hat{G})$ に値を持つ 1-cocycle $a(t)$ で対応する $H^1(L_F, Z(\hat{G}))$ の元が

$$\text{Ker}[H^1(L_F, Z(\hat{G})) \longrightarrow \oplus_v H^1(L_{F_v}, Z(\hat{G}))],$$

に属するものが存在し、

$$\psi_2(t \times u) = g^{-1} \psi_1(t \times u) g \cdot a(t), \quad \forall t \in L_F, \forall u \in SL_2(\mathbb{C}),$$

が成り立つ.

Remark 7.2. G が torus のときでも、Tate-Nakayama duality により、 $\Pi(G(\mathbb{A})/G(F))$ と 1 対 1 に対応するものは Arthur parameter の $\text{Ad}(\hat{G})$ -orbit ではなく $\Psi(G)/\sim$ である.

$\Psi(G, \zeta)$ のうち、 r の discrete spectrum に対応するもの $\Psi_0(G, \zeta)$ を次のように定義する.

$$\Psi_0(G, \zeta) = \{\psi \in \Psi(G, \zeta) \mid S_\psi^0 \in Z(\hat{G})\}.$$

以後、 $\pi = \otimes_v \pi_v$ と書くときは、有限個の素点をのぞいて π_v が unramified であるとする. Arthur parameter $\psi \in \Psi_0(G, \zeta)$ に対し、

$$\{\pi = \otimes_v \pi_v \mid \pi_v \in \Pi_{\psi_v}\},$$

のうちに r の discrete spectrum にあらわれるものを決めるため、次のように、 $\mathcal{S}_\psi$ の character $\epsilon_\psi(\bar{s})$ を定義する.

Definition 7.3. $\hat{\mathfrak{g}}$ を $\hat{G}$ の Lie algebra とする. $\psi \in \Psi_0(G)$ なので、 $S_\psi^0 \subset Z(\hat{G})$ が成り立つ. よって、 $s \in S_\psi$ の $\hat{\mathfrak{g}}$ への作用 $\text{Ad}(s) \curvearrowright \hat{\mathfrak{g}}$ は s の $\mathcal{S}_\psi$ への像 $\bar{s}$ のみによって決まる. $\mathcal{S}_\psi \times L_F \times SL_2(\mathbb{C})$ の $\hat{\mathfrak{g}}$ への作用 τ_ψ を

$$\tau_\psi(\bar{s} \times t \times u) = \text{Ad}(s \cdot \psi(t \times u)) \curvearrowright \hat{\mathfrak{g}}, \quad s \in S_\psi, t \in L_F, u \in SL_2(\mathbb{C}),$$

により定める. τ_ψ を $\mathcal{S}_\psi \times L_F \times SL_2(\mathbb{C})$ の $\hat{\mathfrak{g}}$ への表現とみると、これは完全可約なので、

$$\tau_\psi = \oplus_k \tau_k = \oplus_k (\lambda_k \otimes \mu_k \otimes \nu_k),$$

と既約表現の直和に分解される. 但し、 λ_k, μ_k, ν_k は、それぞれ $\mathcal{S}_\psi, L_F, SL_2(\mathbb{C})$ の既約表現である. $\tilde{\mu}_k$ を μ_k の *contragredient* 表現とし、 $\mu_k \simeq \tilde{\mu}_k$ と仮定すると、 L_F の表現 μ_k の ϵ -factor $\epsilon(\frac{1}{2}, \mu_k)$ は、

$$\epsilon(\frac{1}{2}, \mu_k) = \pm 1,$$

となる. ここで、 $\epsilon_\psi(\bar{s})$ を

$$\epsilon_\psi(\bar{s}) = \prod_k \det(\lambda_k(s)),$$

により定める. 但し、積は、次の3つの条件をみたす k についてとる.

1. $\mu_k \simeq \tilde{\mu}_k$.
2. $\epsilon(\frac{1}{2}, \mu_k) = -1$.
3. $\dim \nu_k$ は偶数.

Conjecture 7.4. $\pi = \otimes_v \pi_v$ が、全ての素点 v について $\pi_v \in \Pi_{\psi_v}$ をみたすとする. このとき、 $s \in \mathcal{S}_\psi$ に対し $\prod_v \delta(s_v, \pi_v)$ が定義され、しかも、 s の $\mathcal{S}_\psi$ での像 $\bar{s}$ のみによっている.

Definition 7.5. このとき、 $\bar{s} \in \mathcal{S}_\psi$ に対し、 $\langle \bar{s}, \pi \rangle$ を

$$\langle \bar{s}, \pi \rangle = \prod_v \delta(s_v, \pi_v),$$

により定義する. また、それ以外の $\pi = \otimes_v \pi_v$ に対しては、 $\langle \bar{s}, \pi \rangle = 0$ と定義する.

Conjecture 7.6. 有限個の素点をのぞき $\rho_v(s_v) = 1$ で、しかも、

$$\prod_v \rho_v(s_v) = 1,$$

が成り立つように ρ_v をとることができる.

よって、

$$\langle \bar{s}, \pi \rangle = \prod_v \langle \bar{s}_v, \pi_v | \rho_v \rangle,$$

が成り立つ.

Definition 7.7. $G(\mathbb{A})$ の既約表現 $\pi = \otimes_v \pi_v$ に対し、

$$m_\psi(\pi) = |\mathcal{S}_\psi|^{-1} \sum_{\bar{s} \in \mathcal{S}_\psi} \epsilon_\psi(\bar{s}) \langle \bar{s}, \pi \rangle,$$

と定義する.

Conjecture 7.8. $G(\mathbb{A})$ の unitarizable な既約表現 π に対し、 r の discrete spectrum における multiplicity を $m_0(\pi)$ であらわすことにする。このとき、

$$m_0(\pi) = \sum_{\psi \in \Psi(G, \zeta)/\sim} m_\psi(\pi),$$

が成り立つ。

$\mathcal{S}(G)$ を、 $G(\mathbb{A})$ 上の関数 $f^G = \prod_v f_v^G$ (但し、 $f_v^G \in C_c^\infty(G_v)$ で、しかも、有限個の素点をのぞいて f_v^G は hyperspecial maximal compact subgroup K_v の特性関数) 全体からなる集合とする。また、Haar measure として Tamagawa measure をとる。

Conjecture 7.9. H を endoscopic group とする。 $f^G \in \mathcal{S}(G)$ に対し、ある $f^H \in \mathcal{S}(H)$ が存在し、strongly G -regular な全ての $\gamma_H \in H(F)$ に対し、

$$\prod_v I^{st}(\gamma_{H_v}, f_v^H) = \prod_v \sum_{\{\gamma_{G_v}\}} \Delta_{G_v, H_v}(\gamma_{H_v}, \gamma_{G_v}) I(\gamma_{G_v}, f_v^G),$$

が成り立つ。

Conjecture 7.10. $\bar{s} \in \mathcal{S}_\psi$ に対応する endoscopic group を H とする。Local の場合と同様に

$$f^H(\psi) = \sum_{\pi} \langle \bar{s}_\psi \bar{s}, \pi \rangle f^G(\pi),$$

が成り立つ。

Remark 7.11. $G = SL_2$, $G = U(3)$ 、Saito-Kurokawa lift、Duke-Imamoglu-Ibukiyama-Ikeda lift のいずれの場合の結果もこの予想と矛盾しない。また、 $G = SL_n$, ($n > 2$) のときに、 $m_0(\pi) > 1$ となる例が D. Blasius [10] により得られている。

REFERENCES

- [1] Adams, Jeffrey; Barbasch, Dan; Vogan, David A., Jr. *The Langlands classification and irreducible characters for real reductive groups*. Progress in Mathematics, 104. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1992.
- [2] Adams, Jeffrey; Johnson, Joseph F. *Endoscopic groups and packets of nontempered representations*. Compositio Math. 64 (1987), no. 3, 271–309.
- [3] Arthur, James *On some problems suggested by the trace formula*. Lie group representations, II, 1–49, Lecture Notes in Math., 1041. Springer, Berlin-New York, 1984.
- [4] Arthur, James *Unipotent automorphic representations: conjectures*. Orbites unipotentes et représentations, II. Astérisque No. 171-172, (1989), 13–71.
- [5] Arthur, James *Unipotent automorphic representations: global motivation*. Automorphic forms, Shimura varieties, and L-functions, Vol. I, 1–75. Perspect. Math., 10. Academic Press, Boston.

- [6] Arthur, James; Clozel, Laurent *Simple algebras, base change, and the advanced theory of the trace formula*. Annals of Mathematics Studies, 120. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1989.
- [7] Assem, Magdy *On stability and endoscopic transfer of unipotent orbital integrals on p -adic symplectic groups*. Mem. Amer. Math. Soc. 134 (1998), no. 635.
- [8] Assem, Magdy *Remarks on the transfer factors for unipotent orbital integrals in p -adic classical split groups*. Compositio Math. 120 (2000), no. 3, 227–290.
- [9] Bernštein, I. N.; Zelevinskiĭ, A. V. *Representations of the group $GL(n, F)$, where F is a local non-Archimedean field*. (Russian) Uspehi Mat. Nauk 31 (1976), no. 3(189), 5–70.
- [10] Blasius, Don *On multiplicities for $SL(n)$* . Israel J. Math. 88 (1994), no. 1-3, 237–251.
- [11] Breulmann, S.; Kuss, M. *On a conjecture of Duke Imamoglu*. Proc. Amer. Math. Soc. 107 (2000).
- [12] Cogdell, J. W.; Piatetski-Shapiro, I. I. *Base change for the Saito-Kurokawa representations of $PGSp(4)$* . J. Number Theory 30 (1988), no. 3, 298–320.
- [13] Friedberg, Solomon; Gelbart, Stephen; Jacquet, Hervé; Rogawski, Jonathan *Représentations génériques du groupe unitaire à trois variables*. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 329 (1999), no. 4, 255–260.
- [14] Heck, E. *Über Modulfunktionen und die Dirichletschen Reihen mit Eulerscher Produktentwicklung. II*. Math. Ann. Bd. 114 (1937).
- [15] Ibukiyama, Tomoyoshi *Conjecture on the lifting of modular forms to Siegel modular forms*. notes.
- [16] Ibukiyama, Tomoyoshi; Saito, Hiroshi *On zeta functions associated to symmetric matrices. I. An explicit form of zeta functions*. Amer. J. Math. 117 (1995), no. 5, 1097–1155.
- [17] Ikeda, Tamotsu *On the lifting of elliptic cusp forms to Siegel cusp forms of degree $2n$* . preprint.
- [18] Ikeda, Tamotsu *On Some Construction of Siegel Cusp Forms: Miyawaki's Conjecture*. preprint.
- [19] Jacquet, H.; Langlands, R. P. *Automorphic forms on $GL(2)$* . Lecture Notes in Mathematics, Vol. 114. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1970.
- [20] Konno, Takuya *Twisted Endoscopy and the Generic Packet Conjecture*. preprint.
- [21] Kottwitz, Robert E. *Stable trace formula: cuspidal tempered terms*. Duke Math. J. 51 (1984), no. 3, 611–650.
- [22] Kottwitz, Robert E. *Stable trace formula: elliptic singular terms*. Math. Ann. 275 (1986), no. 3, 365–399.
- [23] Kottwitz, Robert E. *Tamagawa numbers*. Ann. of Math. (2) 127 (1988), no. 3, 629–646.
- [24] Kottwitz, Robert E.; Shelstad, Diana *Foundations of twisted endoscopy*. Astérisque No. 255. (1999).
- [25] Labesse, J.-P. *Cohomologie, L -groupes et fonctorialité*. Compositio Math. 55 (1985), no. 2, 163–184.
- [26] Labesse, J.-P.; Langlands, R. P. *L -indistinguishability for $SL(2)$* . Canad. J. Math. 31 (1979), no. 4, 726–785.
- [27] Langlands, R. P. *Stable conjugacy: definitions and lemmas*. Canad. J. Math. 31 (1979), no. 4, 700–725.

- [28] Langlands, R. P. *Les débuts d'une formule des traces stable*. Publications Mathématiques de l'Université Paris VII. 13. Université de Paris VII. U.E.R. de Mathématiques. Paris. 1983.
- [29] Langlands, R. P.; Shelstad, D. *On the definition of transfer factors*. Math. Ann. 278 (1987), no. 1-4, 219–271.
- [30] Langlands, R.; Shelstad, D. *Descent for transfer factors*. The Grothendieck Festschrift, Vol. II. 485–563. Progr. Math., 87. Birkhäuser Boston. Boston, MA, 1990.
- [31] Piatetski-Shapiro, I. I. *A remark on my paper: "On the Saito Kurokawa lifting"*. Invent. Math. 76 (1984), no. 1, 75–76.
- [32] Piatetski-Shapiro, I. I. *On the Saito Kurokawa lifting*. Invent. Math. 71 (1983), no. 2, 309–338.
- [33] Rogawski, Jonathan D. *Automorphic representations of unitary groups in three variables*. Annals of Mathematics Studies. 123. Princeton University Press. Princeton, NJ, 1990.
- [34] Rogawski, Jonathan D. *The multiplicity formula for A-packets*. The zeta functions of Picard modular surfaces. 395–419. 1992.
- [35] Saito, Hiroshi *Explicit form of the zeta functions of prehomogeneous vector spaces*. Math. Ann. 315 (1999), no. 4, 587–615.
- [36] Shelstad, D. *L-indistinguishability for real groups*. Math. Ann. 259 (1982), no. 3, 385–430.
- [37] Shelstad, D. *Embeddings of L-groups*. Canad. J. Math. 33 (1981), no. 3, 513–558.
- [38] Vogan, David A., Jr. *The local Langlands conjecture*. Representation theory of groups and algebras, 305–379. Contemp. Math., 145. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.
- [39] Vogan, David A., Jr. *Gelfand-Kirillov dimension for Harish-Chandra modules*. Invent. Math. 48 (1978), no. 1, 75–98.
- [40] Waldspurger, J.-L. *Le lemme fondamental implique le transfert*. Compositio Math. 105 (1997), no. 2, 153–236.
- [41] Yoshida, Hiroyuki *On representations of finite groups in the space of Siegel modular forms and theta series*. J. Math. Kyoto Univ. 28 (1988), no. 2, 343–372.
- [42] Zagier, D. *Sur la conjecture de Saito Kurokawa (d'après H. Maass)*. Seminar on Number Theory, Paris 1979–80, pp. 371–394. Progr. Math., 12. Birkhäuser, Boston, Mass., 1981.