

閉凸錐に関する弱有効解集合上での最適化に対する内部近似法

(An inner approximation method for optimization over the weakly efficient set
with respect to a closed convex cone)

新潟大学大学院自然科学研究科 安藤 圭太 ANDO Keita
Graduate School of Science and Technology, Niigata University
新潟大学大学院自然科学研究科 山田 修司 YAMADA Syuuji
Graduate School of Science and Technology, Niigata University
新潟大学大学院自然科学研究科 田中 環 TANAKA Tamaki
Graduate School of Science and Technology, Niigata University
大阪大学大学院工学研究科 谷野 哲三 TANINO Tetsuzo
Graduate School of Engineering, Osaka University

1 はじめに

本研究では、錐 C に関するコンパクト凸集合上の弱有効解集合上での凸最適化問題 (OWES) を対象とする。 C が凸多面錐の場合には、Yamada, Tanino and Inuiguchi [4] により内部近似法に基づく凸多面近似アルゴリズムが提案されている。本研究ではそのアルゴリズムを基に、 C が一般の閉凸錐の場合にも問題 (OWES) の大域的最適解を求めることができるアルゴリズムを提案する。

2 閉凸錐に関する弱有効解集合上での凸最小化問題

部分集合 $X \subset R^n$ をコンパクト凸集合、 $C \subset R^n$ を閉凸錐とし、 $L(C) := C \cap (-C) = \{0\}$ とする。このとき X の C に関する弱有効解の定義を次のように与える。

定義 2.1. [弱有効解]

次を満たす $x \in X$ は X の C に関する弱有効解と呼ばれる。

$$\nexists y \in X \text{ s.t. } y - x \in \text{int } C.$$

ただし、 $\text{int } C$ は C の内部集合を表す。ここで、 X の C に関する弱有効解全体の集合を X_{we} と表す。

本研究では次の最適化問題を考える。

$$(\text{OWES}) \begin{cases} \text{minimize} & f(x) \\ \text{subject to} & x \in X_{we}. \end{cases}$$

問題 (OWES) に対して次を仮定する。

(A1) $f: R^n \rightarrow R$ は凸関数である.

(A2) $X := \{x \in R^n : p_j(x) \leq 0, j = 1, \dots, t\}$ と表される. ただし, $p_j: R^n \rightarrow R, j = 1, \dots, t$, は微分可能な凸関数かつ $p_j(0) < 0$ を満たす.

(A3) $\arg \min\{f(x) : x \in R^n\} = \{0\}$ である.

(A4) $\langle d, d \rangle = 1$ かつ, 任意の $y \in C \setminus \{0\}$ に対して $\langle d, y \rangle > 0$ を満たす $d \in \text{int } C$ が与えられている. ただし, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は内積を表す.

ここで, $p(x) := \max_{j=1, \dots, t} p_j(x)$ とすると, 仮定 (A2) より $X = \{x \in R^n : p(x) \leq 0\}$ と表される. また, 仮定 (A4) より, $\text{int } C \neq \emptyset$ が成り立つ. 弱有効解集合 X_{we} に対して, 次の補題が成り立つ.

補題 2.1.

$\text{int } C \neq \emptyset$ ならば, $X_{we} = X \setminus \text{int } (X - C)$ が成り立つ.

証明. 仮定より, $\text{int } C \neq \emptyset$ である. さらに, X, C は凸集合なので, 次の等式が成り立つ (Tanaka and Kuroiwa [2]).

$$\text{int } (X - C) = \bigcup_{x \in X} \text{int } (x - C).$$

さらに, $\bigcup_{x \in X} \text{int } (x - C) = \bigcup_{x \in X} (x - \text{int } C) = X - \text{int } C$ なので, 次の等式が成り立つ.

$$\text{int } (X - C) = X - \text{int } C. \quad (1)$$

まず, $x \in X_{we}$ と仮定する. 背理法で示すために, $x \notin X \setminus \text{int } (X - C)$ とする. ここで, $x \in X_{we}$ より $x \in X$ なので, $x \in \text{int } (X - C)$ である. よって, (1) より

$$\exists y \in X \text{ s.t. } x \in y - \text{int } C$$

である. つまり,

$$\exists y \in X \text{ s.t. } y - x \in \text{int } C$$

である. しかし, これは $x \in X_{we}$ に矛盾するので, $x \in X \setminus \text{int } (X - C)$ である. よって, $X_{we} \subset X \setminus \text{int } (X - C)$ が成り立つ.

次に, $x \in X \setminus \text{int } (X - C)$ と仮定する. $x \notin \text{int } (X - C)$ なので, (1) より

$$\nexists y \in X \text{ s.t. } x \in y - \text{int } C$$

である. つまり,

$$\nexists y \in X \text{ s.t. } y - x \in \text{int } C$$

なので, $x \in X_{we}$ である. ゆえに, $X_{we} \supset X \setminus \text{int } (X - C)$ が成り立つ. 以上より, $X_{we} = X \setminus \text{int } (X - C)$ が成り立つ. $\square$

集合 X のコンパクト性と補題 2.1 より, X_{we} はコンパクトである. よって, 問題 (OWES) は大域的最適解をもつ. 問題 (OWES) の最適値を $\min(\text{OWES})$ と表す. 任意の $x \in X_{we}$ に対して $f(x) < +\infty$ なので, $\min(\text{OWES}) < +\infty$ である.

集合 X の特性関数 δ を用いて, 問題 (OWES) は次のように表すことができる.

$$(MP) \begin{cases} \text{minimize} & g(x) := f(x) + \delta(x|X) \\ \text{subject to} & x \in R^n \setminus \text{int}(X - C). \end{cases}$$

ただし,

$$\delta(x|X) := \begin{cases} 0 & \text{if } x \in X, \\ +\infty & \text{if } x \notin X. \end{cases}$$

問題 (MP) に対する双対問題は次のように表される.

$$(DP) \begin{cases} \text{maximize} & g^H(u) \\ \text{subject to} & u \in (X - C)^\circ. \end{cases}$$

ただし, $(X - C)^\circ$ は $X - C$ の極集合, すなわち, $(X - C)^\circ := \{y \in R^n : \langle x, y \rangle \leq 1, x \in X - C\}$ であり, 目的関数 g^H は g の準共役関数, すなわち,

$$g^H(u) := \begin{cases} -\sup\{g(x) : x \in R^n\} & \text{if } u = 0, \\ -\inf\{g(x) : \langle u, x \rangle \geq 1\} & \text{if } u \neq 0. \end{cases}$$

である. ここで, $0 \in \text{int}(X - C)$ なので, 双対原理より $(X - C)^\circ$ はコンパクト凸集合である. さらに, g^H は準凸関数なので, 問題 (DP) はコンパクト凸集合上の準凸関数最大化問題である. 問題 (MP) の最適値を $\min(MP)$, 問題 (DP) の最適値を $\max(DP)$ と表す. 問題 (MP) は問題 (OWES) と同値なので, $\min(MP) = \min(OWES) < +\infty$ である. また, 問題 (MP), (DP) の双対関係より $\min(MP) = -\max(DP)$ である (Konno, Thach and Tuy [1], Thach, Konno and Yokota [3]).

3 緩和問題

次の問題を考える.

$$(P) \begin{cases} \text{minimize} & g(x) \\ \text{subject to} & x \in R^n \setminus \text{int}(S - T). \end{cases}$$

ただし, S は凸多面体かつ T は凸多面錐で, $S \subset X$, $T \subset C$ かつ $0 \in \text{int}(S - T)$ を満たす. このとき, $R^n \setminus \text{int}(S - T) \supset R^n \setminus \text{int}(X - C)$ なので, 問題 (P) は問題 (MP) の緩和問題である. 目的関数 g の定義より, 問題 (P) は $x \in X \setminus \text{int}(S - T)$ を満たしながら $f(x)$ を最小化することと同値である. ここで, $R^n \setminus \text{int}(S - T) \supset X \setminus \text{int}(X - C) = X_{we} \neq \emptyset$ かつ $X \setminus \text{int}(S - T)$ はコンパクト集合なので, $X \setminus \text{int}(S - T)$ 上に問題 (P) の最適解が存在する. 問題 (P) の最適値を $\min(P)$ と表す. 問題 (P) の実行可能集合は問題 (MP) の実行可能集合を含むので, $\min(P) \leq \min(MP) < +\infty$ である.

問題 (P) の双対問題は次のように表される.

$$(D) \begin{cases} \text{maximize} & g^H(u) \\ \text{subject to} & u \in (S - T)^\circ. \end{cases}$$

ここで, $S - T \subset X - C$ より $(S - T)^\circ \supset (X - C)^\circ$ である. よって, 問題 (D) は問題 (DP) の緩和問題である. 集合 $S - T$ は凸多面集合で $0 \in \text{int}(S - T)$ なので, $(S - T)^\circ$ は凸多面体である. よって,

問題 (D) は凸多面体 $(S - T)^\circ$ 上の準凸関数最大化問題であり, $(S - T)^\circ$ の頂点集合上に問題 (D) の最適解が存在する. 問題 (D) の最適値を $\max(D)$ と表す. 問題 (D) は問題 (P) の双対問題かつ問題 (DP) の緩和問題なので, $\max(D) = -\min(P) \geq -\min(MP) = \max(DP) > -\infty$ が成り立つ (Konno, Thach and Tuy [1], Thach, Konno and Yokota [3]). 関数 g^H の定義より, $g^H(0) = -\infty$ なので, 0 は問題 (D) の最適解ではない. よって, 問題 (D) の最適解は $V((S - T)^\circ) \setminus \{0\}$ から選ぶことができる. ただし, $V((S - T)^\circ)$ は $(S - T)^\circ$ の頂点集合を表す. また, T の端方向全体の集合と $U := \{x \in R^n : \langle x, x \rangle = 1\}$ との共通部分を $E(T)$ とする. ここで, $E(T)$ は有限集合とし, $T = \{x \in R^n : x = \sum_{y \in E(T)} \lambda_y y, \lambda_y \geq 0\}$ で表されると仮定する. このとき, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned} (S - T)^\circ &= S^\circ \cap (-T)^\circ \\ &= \{u \in R^n : \langle u, z \rangle \leq 1 \ \forall z \in V(S), \langle u, y \rangle \leq 0 \ \forall y \in -E(T)\}. \end{aligned}$$

次の補題が成り立つ.

補題 3.1. (Yamada, Tanino and Inuiguchi [4])

任意の $v \in V((S - T)^\circ) \setminus \{0\}$ に対して, $v \notin \text{int } X^\circ$.

任意の $v \in V((S - T)^\circ) \setminus \{0\}$ に対して, x^v を次のような凸最小化問題の最適解とする.

$$(\text{SP}(v)) \begin{cases} \text{minimize} & f(x) \\ \text{subject to} & x \in X \cap \{x \in R^n : \langle v, x \rangle \geq 1\}. \end{cases}$$

補題 3.1 より, 問題 $(\text{SP}(v))$ の実行可能集合は空でない. よって, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned} g^H(v) &= -\inf\{g(x) : \langle v, x \rangle \geq 1\} \\ &= -\inf\{f(x) : \langle v, x \rangle \geq 1, x \in X\} \\ &= -\min(\text{SP}(v)) \\ &= -f(x^v). \end{aligned}$$

ただし, $\min(\text{SP}(v))$ は問題 $(\text{SP}(v))$ の最適値を表す. よって, $f(x^v) = \min\{f(x^v) : v \in V((S - T)^\circ) \setminus \{0\}\}$ ならば, $\hat{v} \in V((S - T)^\circ) \setminus \{0\}$ は問題 (D) の最適解である. さらに, $x^{\hat{v}}$ は問題 (P) の最適解である (Konno, Thach and Tuy [1], Thach, Konno and Yokota [3]).

4 内部近似法

本研究では, 問題 (MP) に対し, 次の内部近似法のアルゴリズムを提案する. ここで, $B := (-C) \cap \{y \in R^n : \langle -d, y \rangle = 1\}$ とする. このとき, 仮定 (A4) より B は空でないコンパクト凸集合である.

アルゴリズム IAM

ステップ 0.

$S_1 \subset X$ かつ $0 \in \text{int } S_1$ を満たす凸多面体 S_1 を生成する. $B_1 \subset B$ かつ $-d \in \text{ri } B_1$ を満たす凸多面体 B_1 を生成する. ただし, $\text{ri } B_1$ は B_1 の相対的内部集合を表す. $T_1 := -\text{cone } B_1$, すなわち, $T_1 := -\{x \in R^n : x = \lambda y, y \in B_1, \lambda \geq 0\}$ とする. 頂点集合 $V((S_1 - T_1)^\circ)$, $V(B_1)$ を計算する. 便宜上, $V((S_0 - T_0)^\circ) := \{0\}$ とする. $k = 1$ として, ステップ 1 へ.

ステップ 1.

任意の $v \in V((S_k - T_k)^\circ) \setminus \{0\}$ に対して, 問題 (SP(v)) の最適解 x^v を求める. ここで, $f(x^v) = \min\{f(x^v) : v \in V((S_k - T_k)^\circ) \setminus \{0\}\}$ を満たす $v^k \in V((S_k - T_k)^\circ) \setminus \{0\}$ を選ぶ. 暫定解 $x(k) := x^{v^k}$ として, ステップ 2 へ.

ステップ 2.

$z^k \in \arg \min\{\phi(x; v^k) : x \in R^n\}$, $w^k \in \arg \max\{\langle v^k, y \rangle : y \in B\}$ を求める. ただし, $\phi(x; v^k) := \max\{p(x), -\langle v^k, x \rangle + 1\}$ である. $M_k := \{y \in V(B_k) : \langle v^k, y \rangle = 0\}$ とする.

ステップ 2-1. $\phi(z^k; v^k) = 0$ なら, ステップ 2-2 へ. そうでなければ, ステップ 2-3 へ.

ステップ 2-2. $\langle v^k, w^k \rangle \leq 0$ なら, アルゴリズムを停止する. このとき, $x(k)$ が問題 (MP) の大域的最適解である. そうでなければ, $S_{k+1} := S_k$ としてステップ 2-4 へ.

ステップ 2-3. $S_{k+1} := \text{co}(S_k \cup \{z^k\})$ としてステップ 2-4 へ. ただし, $\text{co}(S_k \cup \{z^k\})$ は $S_k \cup \{z^k\}$ の凸包を表す.

ステップ 2-4. $M_k = \emptyset$ なら, ステップ 2-4-1 へ. そうでなければ, ステップ 2-4-2 へ.

ステップ 2-4-1. $B_{k+1} := B_k$, $V(B_{k+1}) := V(B_k)$ とする.

ステップ 2-4-2. $B_{k+1} := \text{co}(B_k \cup \{w^k\})$ とし, $V(B_{k+1})$ を計算する.

ステップ 2-5 へ.

ステップ 2-5. $C_{k+1} := -\text{cone } B_{k+1}$ とし, $V((S_{k+1} - T_{k+1})^\circ)$ を計算する. $k \leftarrow k+1$ として, ステップ 1 へ戻る.

任意の自然数 k に対して, $S_k, T_k, k = 1, 2, \dots$, は凸多面体である. $0 \in \text{int } S_1$ より, $S_k - T_k, k = 1, 2, \dots$, は $0 \in \text{int}(S_k - T_k)$ を満たす. さらに, $S_1 \subset X$ であり, $\{z^k\} \subset X$ であることが第 5 章で示されるので, $S_k \subset X$ が成り立つ. また, $B_1 \subset B$ かつ $\{w^k\} \subset B$ より, $B_k \subset B, k = 1, 2, \dots$, なので, $T_k \subset C$ が成り立つ. よって, 次の問題 (P_k), (D_k) はそれぞれ問題 (MP), (DP) の緩和問題である.

$$(P_k) \begin{cases} \text{minimize} & g(x) \\ \text{subject to} & x \in R^n \setminus \text{int}(S_k - T_k). \end{cases}$$

$$(D_k) \begin{cases} \text{maximize} & g^H(u) \\ \text{subject to} & u \in (S_k - T_k)^\circ. \end{cases}$$

第 3 章での議論から, アルゴリズム IAM のステップ 1 で得られる $x(k)$, v^k はそれぞれ問題 (P_k), (D_k) の最適解であることがわかる.

任意の自然数 k に対して, 次が成り立つ.

- $(S_k - T_k)^\circ = \{u \in R^n : \langle u, z \rangle \leq 1 \ \forall z \in V(S_k), \langle u, y \rangle \leq 0 \ \forall y \in -E(T_k)\}.$
- $S_k - T_k = \{x \in R^n : \langle v, x \rangle \leq 1, v \in V((S_k - T_k)^\circ)\}.$

5 アルゴリズムの停止条件

本章では, アルゴリズム IAM が停止したときに, 問題 (MP), (DP) の最適解が得られることを示す. 次の補題および定理が成り立つ.

定理 5.1. (Yamada, Tanino and Inuiguchi [4])

任意の $v \in R^n$ に対して, $\phi(x; v)$ は R^n 上で最小値をもつ.

補題 5.1. (Yamada, Tanino and Inuiguchi [4])

アルゴリズム IAM の反復 k において, $v^k \in V((S_k - T_k))^\circ$ を問題 (D_k) の最適解とすると, $v^k \notin \text{int } X^\circ$ である.

補題 5.2. (Yamada, Tanino and Inuiguchi [4])

アルゴリズム IAM の反復 k において, $S_k \subset X$ とすると, 次が成り立つ.

$$(i) \phi(z^k; v^k) \leq 0.$$

$$(ii) z^k \in X.$$

補題 5.2 と $S_1 \subset X$, $w^k \in -C$ と $T_1 \subset -C$ より, 次のような包含関係が成り立つ.

- $S_1 - T_1 \subset S_2 - T_2 \subset \cdots \subset S_k - T_k \subset \cdots \subset X - C.$
- $(S_1 - T_1)^\circ \supset (S_2 - T_2)^\circ \supset \cdots \supset (S_k - T_k)^\circ \supset \cdots \supset (X - C)^\circ.$

よって, 次のような不等式が成り立つ.

- $f(x(1)) \leq f(x(2)) \leq \cdots \leq f(x(k)) \leq \cdots \leq \min(\text{MP}).$
- $g^H(v^1) \geq g^H(v^2) \geq \cdots \geq g^H(v^k) \geq \cdots \geq \max(\text{DP}).$

また, 次の定理が成り立つ.

定理 5.2. (Yamada, Tanino and Inuiguchi [4])

アルゴリズム IAM の反復 k において, $\phi(z^k; v^k) = 0$ であることの必要十分条件は, $v^k \in X^\circ$ である.

定理 5.3.

アルゴリズム IAM の反復 k において, $\langle v^k, w^k \rangle \leq 0$ であることの必要十分条件は, $v^k \in (-C)^\circ$ である.

証明. まず, $\langle v^k, w^k \rangle \leq 0$ と仮定する. 点 w^k の定義より

$$\forall y \in B, \langle v^k, y \rangle \leq 0$$

である. また, 集合 B の定義より

$$\forall x \in (-C), \exists y \in B, \mu \geq 0 \text{ s.t. } x = \mu y$$

である. よって,

$$\forall x \in (-C), \langle v^k, x \rangle = \langle v^k, \mu y \rangle = \mu \langle v^k, y \rangle \leq 0$$

なので, $v^k \in (-C)^\circ$ が成り立つ. 次に, $v^k \in (-C)^\circ$ と仮定する. 集合 $-C$ は錐なので,

$$\forall x \in (-C), \langle v^k, x \rangle \leq 0$$

である. ここで, $B \subset (-C)$ なので, w^k の定義より $\langle v^k, w^k \rangle \leq 0$ が成り立つ. □

定理 5.4. (Yamada, Tanino and Inuiguchi [4])

アルゴリズム IAM の反復 k において, $\phi(z^k; v^k) = 0$ かつ $\langle v^k, w^k \rangle \leq 0$ ならば, 次が成り立つ.

- (i) v^k は問題 (DP) の最適解である.
- (ii) $x(k)$ は問題 (MP) の最適解である.

以上より, アルゴリズム IAM が反復 k 停止したとき, $x(k)$, v^k はそれぞれ問題 (MP), (DP) の最適解であることがわかる.

6 アルゴリズムの収束性

本章では, アルゴリズム IAM が大域的収束性を持つことを示す. 次の補題および定理が成り立つ.

補題 6.1. (Yamada, Tanino and Inuiguchi [4])

アルゴリズム IAM の反復 k における問題 (D_k) の最適解を v^k とし, $\{v^k\}$ は無限点列だとすると, $\{v^k\}$ の集積点が存在する.

補題 6.2.

アルゴリズム IAM の反復 k における問題 (D_k) の最適解を v^k とし, $\{v^k\}$ の集積点を $\bar{v}$ とすると, $\bar{v} \in (-C)^\circ$ である.

証明. 部分列 $\{v^{k_q}\} \subset \{v^k\}$ は $\bar{v}$ に収束すると仮定する. また, $w^{k_q} \in \arg \max\{\langle v^{k_q}, y \rangle : y \in B\}$ とする. ここで, $w^{k_q} \in B$ かつ B はコンパクトなので, $w^{k_q} \subset B$ は集積点 $\bar{w}$ をもつ. 必要ならばさらに部分列を考えることにより, 一般性を失わずに w^{k_q} が $\bar{w}$ に収束すると仮定できる. 背理法で示すために, $\bar{v} \notin (-C)^\circ$ と仮定すると, B の定義より次が成り立つ.

$$\exists w \in B \text{ s.t. } \langle \bar{v}, w \rangle > 0. \quad (2)$$

任意の自然数 q に対して, $B_{k_q} \subset B_{k_{q+1}}$ なので, $\langle v^{k_q}, w^{k_q} \rangle \geq 0$ である. よって, $\lim_{q \rightarrow \infty} \langle v^{k_q}, w^{k_q} \rangle = \langle \bar{v}, \bar{w} \rangle \geq 0$ である. 一方, 任意の $q' > q$ に対して, $v^{k_{q'}} \in (-T_{k_{q+1}})^\circ$ なので, $\langle v^{k_q}, w^{k_{q+1}} \rangle \leq 0$ である. よって, $\lim_{q \rightarrow \infty} \langle v^{k_q}, w^{k_{q+1}} \rangle = \langle \bar{v}, \bar{w} \rangle \leq 0$ である. ゆえに, $\lim_{q \rightarrow \infty} \langle v^{k_q}, w^{k_q} \rangle = \langle \bar{v}, \bar{w} \rangle = 0$ なので,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \bar{v}, \bar{w} \rangle = \lim_{q \rightarrow \infty} \langle v^{k_q}, w^{k_q} \rangle \\ &= \lim_{q \rightarrow \infty} \max\{\langle v^{k_q}, y \rangle : y \in B\} \\ &= \max\{\langle \bar{v}, y \rangle : y \in B\} \end{aligned}$$

である. しかし, これは (2) に矛盾する. よって, $\bar{v} \in (-C)^\circ$ が成り立つ. $\square$

定理 6.1. (Yamada, Tanino and Inuiguchi [4])

アルゴリズム IAM の反復 k における問題 (D_k) の最適解を v^k とし, $\{v^k\}$ の集積点を $\bar{v}$ とすると, $\bar{v} \in (X - C)^\circ$ である.

定理 6.2. (Yamada, Tanino and Inuiguchi [4])

アルゴリズム IAM の反復 k における問題 (D_k) の最適解を v^k とし, $\{v^k\}$ の集積点を $\bar{v}$ とすると, $\bar{v}$ は問題 (DP) の最適解である. さらに, $\lim_{k \rightarrow \infty} g^H(v^k) = \max(DP)$ である.

定理 6.3. (Yamada, Tanino and Inuiguchi [4])

アルゴリズム IAM の反復 k における問題 (P_k) の最適解を $x(k)$ とし, $\{x(k)\}$ の集積点を $\bar{x}$ とすると, $\bar{x} \in R^n \setminus \text{int}(X-C)$ かつ $\bar{x}$ は問題 (MP) の最適解である. さらに, $\lim_{k \rightarrow \infty} g(x(k)) = \min(MP)$ である.

以上より, アルゴリズム IAM によって生成される点列 $\{x(k)\}$, $\{v^k\}$ の任意の集積点はそれぞれ問題 (MP) , (DP) の大域的最適解であることがわかる.

7 おわりに

本研究では, 閉凸錐 C に関するコンパクト凸集合 X 上の弱有効解集合 X_{we} 上で凸関数を最小化する問題 (OWES) を考え, 問題 (OWES) と同値な問題 (MP) を解くアルゴリズム IAM を提案した. アルゴリズム IAM は反復 k において, 集合 X に含まれる凸多面体 S_k , 錐 C に含まれる凸多面錐 T_k を生成する. また, 問題 (MP) の実行可能集合の補集合 $X-C$ を凸多面集合 $S_k - T_k$ で内部から近似し, 問題 (MP) の双対問題 (DP) の実行可能集合 $(X-C)^\circ$ を凸多面体 $(S_k - T_k)^\circ$ で外部から近似する. ここで, $(S_k - T_k)^\circ$ の各頂点 v に対して問題 $(SP(v))$ を解くことで, 問題 (MP) の暫定解 $x(k)$ を得る. 本研究では, アルゴリズム IAM が大域的収束性を持つことを示した. よって, 適当な許容誤差を設定することで, アルゴリズム IAM は有限回の反復で停止し, 問題 (MP) の近似解を得ることができる.

参考文献

- [1] Konno, H., P.T. Thach and H. Tuy, *Optimization on Low Rank Nonconvex Structures*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1997).
- [2] Tanaka, T. and D. Kuroiwa, "The convexity of A and B assures $\text{int } A + B = \text{int } (A + B)$," *Applied Mathematics Letters* 6(1), pp.83-86 (1993).
- [3] Thach, P.T., H. Konno and D. Yokota, "A dual approach to minimization on the set of pareto-optimal solutions," *Journal of Optimization Theory and Applications* 88, pp.689-707 (1996).
- [4] Yamada, S., T. Tanino and M. Inuiguchi, "An Inner Approximation Method for Optimization over the Weakly Efficient Set," *Journal of Global Optimization* 16, pp.197-217 (2000).