

Cyclic group association scheme に付随した Spin model について

九大理 坂内 悦子 (Etsuko Bannai)

§1. 序

いわゆる association scheme の modular invariance property を使って spin model の例がいくつか作られた。この modular invariance という性質と spin model の関係についてはさらに調べられて、逆に spin model が association scheme の Bose-Mesner algebra の中につくれるならば、さらにある条件を仮定してやるとある種の modular invariance property が成立つことがわかった(詳しくは §2 の定理4 参照)。ここでは定理4 にもとづいて Cyclic group association scheme $\mathcal{X} = (G_n, \{R_i\}_{0 \leq i \leq n-1})$ 及びその subscheme $\tilde{\mathcal{X}} = (G_n, \{\tilde{R}_i\}_{0 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor})$ (ここで $\tilde{R}_i = R_i \cup R_{i'}$, $i = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$) についてそれ等の Bose-Mesner algebra の中にある、定理3 の仮定をみたしている様な spin model をすべて決定した。

定義 1. X を有限集合、 w_+ 及び w_- を $X \times X$ 上で定義された複素数値関数とする。この時 任意の $\alpha, \beta, \gamma \in X$ に対し 7 次の条件 (1)、(2) 及び (3) が成立つならば (X, w_+, w_-) を *generalized (two-weight) spin model of Jones type* と呼ぶ。

$$(1) \quad w_+(\alpha, \beta) w_-(\beta, \alpha) = 1$$

$$(2) \quad \sum_{x \in X} w_+(\alpha, x) w_-(x, \beta) = n \delta_{\alpha, \beta}$$

(3) (star triangle relation)

$$\sum_{x \in X} w_+(\alpha, x) w_+(x, \beta) w_-(x, \gamma) = D w_+(\alpha, \beta) w_-(\alpha, \gamma) w_-(\beta, \gamma)$$

ただし $D^2 = n = |X|$ である。

この定義は V. F. R. Jones による *spin model* の定義 ([7]) の *symmetric condition* を落すことによつて、川越-宗政-綿谷が一般化したものである ([8])。

定理 2. (坂内-坂内-Jaeger ([2], [5]))

(X, w_+, w_-) を Jones type の *two-weight spin model* とする。集合 X によつて index をつけられた行列を $W_+ = (w_+(\alpha, \beta))_{\alpha \in X, \beta \in X}$ 及び $W_- = (w_-(\alpha, \beta))_{\alpha \in X, \beta \in X}$ で定義する。 $\mathcal{A}$ を W_+ , ${}^t W_+$ 及び J によつて $\mathbb{C}$ 上生成される algebra とする。この時、もし $\mathcal{A}$ が行列の Γ ターミナル積 (成

分ごとの積) に関して閉じているならば、 $\mathcal{A}$ はある commutative self dual association scheme の Bose-Mesner algebra である。ここで J はすべての成分が 1 である行列を示す。

(注. この定理 2 は、はじめ F Jaeger によって対称な spin model の場合に証明された ([5]).)

いくつかの Jones type の two-weight spin model の例が (次に定義する modular invariance 又は quasi modular invariance property をみたす) self dual な association scheme の Bose-Mesner algebra の中に作られた ([1], [3]). (もち論この様な性質をみたしても spin model が存在しない例はあるが.)

定義 3. $\mathcal{A} = (X, \{R_i\}_{0 \leq i \leq d})$ を commutative self dual association scheme とする。次の条件 (1) (又は (2)) をみたす対角行列 T が存在するならば $\mathcal{A}$ は modular invariance (又は quasi modular invariance) property をみたすという。

$$(1) \quad (PT)^3 = \sqrt{|X|} P^2$$

$$(2) \quad (PT)^3 = |X|^{\frac{3}{2}} I$$

ここで P は $\mathcal{A}$ の第一固有行列 (又は指標表) である。

(注. 定義 3 においてもし $\mathcal{A}$ が symmetric であれば、条件

(1)と(2)は一致している.)

この逆に関しては次の定理がある ([5])

定理 4. (Bannai-Bannai-Jaeger) $\mathcal{X} = (X, \{R_i\}_{0 \leq i \leq d})$ を commutative association scheme, A_i と関係 R_i に関する adjacency matrix, $\mathcal{A} = \langle A_0, A_1, \dots, A_d \rangle$ を $\mathcal{X}$ の Bose-Mesner algebra, P と Q をそれぞれ $\mathcal{X}$ の第一及 d 番 = 固有行列 とする. 今 $W_+ = \sum_{i=0}^d t_i A_i$, $W_- = \sum_{i=0}^d t_i^{-1} A_i$ ($t_i \neq 0, i=0, 1, \dots, d$) に対して (X, W_+, W_-) が Jones type の two-weight spin model でありかつ $W_+, {}^t W_+, J$ が $\mathbb{C}$ 上 $\mathcal{A}$ を生成しているならば次の互いに同値な条件が成立つ.

$$(1) \quad P T Q T P T' = t_0 D^3 I$$

$$(2) \quad P T Q T Q T = t_0 D P^2$$

$$(3) \quad (Q T)^3 = t_0 D^3 I$$

$$(4) \quad (P T^{-1})^3 = t_0^{-1} D^3 I.$$

ここで $T = \text{diag}(t_0, t_1, \dots, t_d)$, $T' = \text{diag}(t_0, t_1^{-1}, \dots, t_d^{-1})$,

$A_i' = {}^t A_i$, $i=0, 1, \dots, d$, である.

(注. 定理2により $\mathcal{X}$ は self dual であるから上の条件 (1),

(2), (3) 及び (4) は互いに同値である. 一般の association scheme についてはこれ等は同値であるとは限らない.)

従って, symmetric でない場合にはどれをもって modular

invariance property を定義するか議論の余地がある. 又 self dual ではない association scheme に関しても modular invariance という性質が定義できるだろうか という問題も自然に生れてくる. 今のところ (1), (2), (3) 又は (4) をみたすような対角行列 T が存在するような self dual ではない association scheme の例はみつからない.

§ 2. Cyclic group association schemes 及びそのある種の sub-schemes

G_n を位数 n の cyclic group, g をその生成元とする. $G_n \times G_n$ の部分集合を $R_i = \{(x, y) \in G_n \times G_n \mid yx^{-1} = g^i\}$, $i=0, 1, \dots, n-1$, で定義する. $\mathcal{X} = (G_n, \{R_i\}_{0 \leq i \leq n-1})$ は self dual な commutative association scheme である ([4]). 次に $\tilde{R}_0 = R_0$, $\tilde{R}_i = R_i \cup R_{i'}$, $i=0, 1, \dots, [\frac{n}{2}]$ (ここで $R_{i'} = \{(x, y) \mid (y, x) \in R_i\}$) とすると $\tilde{\mathcal{X}} = (G_n, \{\tilde{R}_i\}_{0 \leq i \leq [\frac{n}{2}]})$ は symmetric self dual commutative association scheme ($\mathcal{X}$ の sub-scheme) である. 関係 R_i 及び $\tilde{R}_i$ に対する adjacency 行列を A_i , $i=0, 1, \dots, n-1$ 及び $\tilde{A}_i$, $i=0, 1, \dots, [\frac{n}{2}]$ とする. n が奇数ならば $\tilde{A}_0 = A_0$, $\tilde{A}_i = A_i + A_{i'} = A_i + {}^t A_i$, $i=1, \dots, [\frac{n}{2}]$ である. n が

偶数なら $\hat{A}_0 = A_0$, $\hat{A}_{\frac{n}{2}} = A_{\frac{n}{2}}$, $\hat{A}_i = A_i + A_{i'}$, $i=1, \dots, \frac{n}{2}-1$ である. 又 $\hat{\mathcal{A}}$ の Bose-Mesner algebra をそれぞれ $\mathcal{O} = \langle A_0, A_1, \dots, A_{n-1} \rangle$ 及び $\hat{\mathcal{O}} = \langle \hat{A}_0, \hat{A}_1, \dots, \hat{A}_{[\frac{n}{2}]} \rangle$ とする. このとき $\mathcal{O}$ 及び $\hat{\mathcal{O}}$ の primitive idempotents からなる基底 $\{E_0, E_1, \dots, E_{n-1}\}$ 及び $\{\hat{E}_0, \hat{E}_1, \dots, \hat{E}_{[\frac{n}{2}]}\}$ をそれぞれ適当にとることによつて第一固有行列をそれぞれ

$$P = (P_{ij}(\lambda))_{\substack{0 \leq i \leq n-1 \\ 0 \leq j \leq n-1}} \quad \text{及び} \quad \hat{P} = (\hat{P}_{ij}(\lambda))_{\substack{0 \leq i \leq [\frac{n}{2}] \\ 0 \leq j \leq [\frac{n}{2}]}}$$

とすることができる. ここで $\hat{P}_{ij}(\lambda)$ は以下に定義される.

n が奇数の場合

$$\hat{P}_{ij}(\lambda) = P_{ij}(\lambda) + P_{j'}(\lambda) = \zeta^{i\bar{j}} + \zeta^{-i\bar{j}}, \quad 1 \leq j \leq \frac{n-1}{2},$$

$$0 \leq i \leq \frac{n-1}{2} \quad ; \quad \hat{P}_0(\lambda) = P_0(\lambda) = 1, \quad 0 \leq i \leq \frac{n-1}{2}$$

n が偶数の場合

$$\hat{P}_{ij}(\lambda) = P_{ij}(\lambda) + P_{j'}(\lambda) = \zeta^{i\bar{j}} + \zeta^{-i\bar{j}}, \quad 1 \leq j \leq \frac{n}{2}-1, \quad 0 \leq i \leq \frac{n}{2} ;$$

$$\hat{P}_{ij}(\lambda) = P_{ij}(\lambda) = \zeta^{i\bar{j}}, \quad j=0 \text{ 又は } \frac{n}{2}, \quad 0 \leq i \leq \frac{n}{2}.$$

(ここで ζ は 1 の原始 n 乗根である.)

この時次の定理 5, 6 が成立つ. (定理 5 については [1] 参照.)

定理 5. 上の記号のもとで $\mathcal{A}$ が対角行列 $T = \text{diag}(t_0, t_1, \dots, t_{n-1})$ に関し $\mathcal{A}$ の modular invariance property $PTQTPT' = t_0 D^3 I$ とみたすのは次の条件が成立つ

時に限る. ここで $D^2 = n = |G_n|$ である.

(1) n が奇数の時

$$t_j = \zeta^{-\frac{j(j+2s-1)}{2}} t_0, \quad j=1, 2, \dots, n-1,$$

$$t_0^2 = D \zeta^{-\left(\frac{n+1}{2}\right)^3 (2s-1)^2} \bigg/ \sum_{l=0}^{n-1} \zeta^{-\left(\frac{n+1}{2}\right) l^2},$$

$$s \in \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

(2) n が偶数の時

$$t_j = \eta^{j(j+2s)} t_0, \quad j=0, 1, \dots, n-1,$$

$$t_0^2 = D \eta^{s^2} \bigg/ \sum_{l=0}^{n-1} \eta^{l^2}, \quad \eta^2 = \zeta^{-1},$$

$$s \in \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

定理 6. 上の記号のもとで $\tilde{T}$ が対角行列 $\tilde{T} = \text{diag}(\tilde{t}_0, \tilde{t}_1, \dots, \tilde{t}_{[\frac{n}{2}]})$ に関して modular invariance property

$$(\beta \tilde{T})^3 = \tilde{t}_0 D^3 I \quad \text{を満たすのは次の条件が成立つ時に限る.}$$

ここで $D^2 = n = |G_n|$ である.

$$\tilde{t}_j = \eta^{j^2} \tilde{t}_0, \quad j=0, 1, \dots, [\frac{n}{2}],$$

$$\tilde{t}_0^2 = D \bigg/ \sum_{l=0}^{n-1} \eta^{l^2}, \quad \eta^2 = \zeta \text{ または } \zeta^{-1}$$

定理 7. T 及び $\tilde{T}$ をそれぞれ定理 5 及び定理 6 で与えられた対角行列 $\text{diag}(t_0, t_1, \dots, t_{n-1})$, $\text{diag}(\tilde{t}_0, \tilde{t}_1, \dots, \tilde{t}_{[\frac{n}{2}]})$ とする. $\tilde{O}$ 及び O の中に ($\tilde{O} < O$ である) それぞれの行列 $W_+ = \sum_{i=0}^{n-1} t_i A_i$, $W_- = \sum_{i=0}^{n-1} t_i^{-1} A_i$ 及び $\tilde{W}_+ = \sum_{i=0}^{[\frac{n}{2}]} \tilde{t}_i \tilde{A}_i$, $\tilde{W}_- = \sum_{i=0}^{[\frac{n}{2}]} \tilde{t}_i^{-1} \tilde{A}_i$ をとりうる. この時 (G_n, W_+, W_-)

及び $(G_n, \tilde{W}_+, \tilde{W}_-)$ はそれぞれ loop variable が D の Jones type の two-weight spin model である. さらに (G_n, W_+, W_-) が symmetric であるのは n が奇数であれば定理 5(1) における s が $2s-1 \equiv 0 \pmod{n}$ n が偶数であれば定理 5(2) における s が $2s \equiv 0 \pmod{n}$ をみたす時に限る. $(G_n, \tilde{W}_+, \tilde{W}_-)$ は symmetric である.

さて、次に π 及び $\tilde{\pi}$ に self dual な構造を与える基底の存在がどれくらいあるかを調べてみる. これについてのは次の命題 8, 9 がある.

命題 8. σ を集合 $\{0, 1, \dots, n-1\}$ の上の置換 $\sigma(0) = 0$ をみたすものとする. この時 O の基底の組 $\{A_0, A_1, \dots, A_{n-1}\}$ と $\{E_0, E_{\sigma(1)}, \dots, E_{\sigma(n-1)}\}$ が π の self dual な構

造を与えるのは $\sigma(i) \equiv \pm \sigma(1)i \pmod{n}$ かつ $\sigma(1)$ と n が互いに素である場合に限る. この時その第一固有行列は $P^\sigma = (5^{\sigma(i)i})$ と表わせる.

命題9 $\tilde{\sigma}$ を集合 $\{0, 1, \dots, [\frac{n}{2}]\}$ 上の置換で $\tilde{\sigma}(0) = 0$ をみたすものとする. この時 $\tilde{\sigma}$ の基底の組 $\{\tilde{A}_0, \tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_{[\frac{n}{2}]}\}$ と $\{\tilde{E}_0, \tilde{E}_1, \dots, \tilde{E}_{[\frac{n}{2}]}\}$ が $\tilde{\sigma}$ の self dual な構造を与えるのは $\tilde{\sigma}(1)$ が n と互いに素であり次の条件をみたす場合に限る.

(1) n が奇数の時

$$\tilde{\sigma}(i) \equiv \pm \tilde{\sigma}(1)i \pmod{n}, \quad i=1, 2, \dots, \frac{n-1}{2}$$

(2) n が偶数の時

$$\tilde{\sigma}(\frac{n}{2}) = \frac{n}{2}$$

$$\tilde{\sigma}(i) \equiv \pm \tilde{\sigma}(1)i \pmod{n}, \quad i=1, 2, \dots, \frac{n}{2}-1$$

命題8, 9 は それぞれ $\tilde{\sigma}$ または $\tilde{\sigma}$ の self dual な構造とすべし考えるためには1の原始 n 乗根 ζ とすべし考えれば十分であることを示している.

また、簡単な考察から (すなわち定理5及び6で与えられた複素数 $t_0, \dots, t_{n-1}$ 及び $\hat{t}_0, \dots, \hat{t}_{[\frac{n}{2}]}$ を観察することにより) 次の命題が得られる.

命題 10 (1) 定理 7 で与えた spin model (G_n, W_+, W_-) のうち行列 $W_+, {}^tW_+, J$ が σ を生成するものは n が奇数であれば定理 5(1) における s が $(2s-1, n)=1$, n が偶数であれば定理 5(2) における s が $(2s, n)=1$ をみたしている場合に限る.

(2) 定理 7 で与えた symmetric spin model $(G_n, \tilde{W}_+, \tilde{W}_-)$ を与える行列 $\tilde{W}_+$ 及び J は σ を生成している.

以上の結果をすべてまとめると次の定理が得られる.

定理 11. (1) Cyclic group association scheme $\mathcal{X}$ に付随した spin model (G_n, W_+, W_-) に対して $W_+, {}^tW_+, J$ が $\mathcal{X}$ の Bose-Mesner algebra を生成するのは次の場合に限る.

$$n \text{ が奇数の時: } W_+ = \sum_{j=0}^{n-1} t_j A_j, \quad W_- = \sum_{j=0}^{n-1} t_j^{-1} A_j$$

$$t_j = \zeta^{-\frac{j(j+2s-1)}{2}} t_0, \quad j=1, 2, \dots, n-1,$$

$$t_0^2 = D \zeta^{-\left(\frac{n+1}{2}\right)^3 (2s-1)^2} \Bigg/ \sum_{\ell=0}^{n-1} \zeta^{-\left(\frac{n+1}{2}\right) \ell^2},$$

$$(2s-1, n)=1.$$

$$n \text{ が偶数の時: } W_+ = \sum_{j=0}^{n-1} t_j A_j, \quad W_- = \sum_{j=0}^{n-1} t_j^{-1} A_j$$

$$t_j = \eta^{j(j+2s)} t_0, \quad j=0, 1, \dots, n-1,$$

$$t_0^2 = D \eta^{s^2} / \sum_{\ell=0}^{n-1} \eta^{\ell^2}, \quad \eta^2 = \zeta^{-1}, \quad (2s, n)=1.$$

(2) $\tilde{\mathcal{E}} = (G_n, \{\tilde{R}_i\}_{0 \leq i \leq [\frac{n}{2}]})$ に付随した spin model $(G_n, \tilde{W}_+, \tilde{W}_-)$ に対して $\tilde{W}_+$ と $\tilde{W}_-$ が σ を生成する n 次元の場合に限る.

$$\tilde{W}_+ = \sum_{j=0}^{[\frac{n}{2}]} \tilde{t}_j \tilde{A}_j, \quad \tilde{W}_- = \sum_{j=0}^{[\frac{n}{2}]} \tilde{t}_j^{-1} \tilde{A}_j,$$

$$\tilde{t}_j = \eta^{j^2} t_0, \quad j=1, \dots, [\frac{n}{2}],$$

$$\tilde{t}_0^2 = D / \sum_{\ell=0}^{n-1} \eta^{\ell^2}, \quad \eta^2 = \zeta \text{ 又は } \zeta^{-1}.$$

文 献

- (1) E. Bannai and E. Bannai, Spin models on finite cyclic groups, preprint.
- (2) E. Bannai and E. Bannai, Generalized spin models and association schemes, preprint.
- (3) E. Bannai, E. Bannai, T. Ikuta and K. Kawagoe, Spin models constructed from the Hamming association schemes $H(d, q)$. 第10回代数的組合せ論シンポジウム報告集 (1992).

- (4). E. Bannai and T. Ito, *Algebraic Combinatorics I : Association Schemes*, Benjamin/Cummings, Menlo Park CA, 1984.
- (5). E. Bannai, E. Bannai and Jaeger, in preparation.
- (6) F. Jaeger, Strongly regular graphs and spin models for the Kauffman polynomial, *Geom. Dedicata* 4 (1992), 23-52.
- (7) V.F.R. Jones, On knot invariants related to some statistical mechanical models, *Pac. J. Math.* 137 (1989), 311-334.
- (8) K. Kawagoe, A. Munemasa and Y. Watatani, Generalized spin models, preprint.