

乱流の統計力学における交差独立性完結の完全整合性

巽 友正 京都大学 (名誉教授)

Complete Consistency of the Cross-Independence Closure in Statistical Mechanics of Turbulence

Tomomasa Tatsumi Kyoto University (Emeritus Professor)

1. 交差独立性完結による乱流理論

本論文は、著者による乱流の「交差独立性完結仮説」(Tatsumi 2001) に基づく統計的研究の中核理論の解説とも言えるべきもので、研究全体の進行については、本研究所の研究集会においても随時に報告している。とくに、2007 年の本研究所主催の「Kyoto Conference on the Navier-Stokes Equations and their Applications」においては、一様等方性乱流に関する結果について報告し(Tatsumi 2007)、また、例年の「乱流研究会」においても、2008 年および 2009 年度には、一般の非一様乱流への展開と将来展望について報告し(Tatsumi 2008, 2009)、さらに 2010 年度には、従来の平均速度積による乱流研究と対比して、統計力学の常道である速度分布関数による本理論の展開について歴史的な展望を試みている(巽 2010)。また、一般の非一様乱流に関する本理論の展開については、Tatsumi (2011) に発表した。

以上の理論の展開過程において、理論の中核とも言えるべき「交差独立性完結仮説」について、読者から様々な疑問や反論が寄せられた。そして、それらへの対応の結果、本理論は、当初予想しなかった完全な完結体系を構築するに至った。ここでは、その大要を紹介して、大方の批判を仰ぎたいと思う。

2. 速度分布方程式系の完結問題

流体乱流に関して、最も完全で数学的に取扱い可能な統計的表現は、乱流中の有限個の空間点 $\mathbf{x}_m$ ($m = 1, \dots, n$) と時間点 t における、多点速度 $\mathbf{u}_m(t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}_m, t)$ に対する結合確率分布密度、

$$f^{(n)}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n; \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n; t) = \langle \delta(\mathbf{v}_1 - \mathbf{u}_1) \dots \delta(\mathbf{v}_n - \mathbf{u}_n) \rangle \quad (1)$$

で与えられる。ただし、 $\mathbf{v}_m$ は、乱流速度 $\mathbf{u}_m$ ($m = 1, \dots, n$) に対する確率変数を表す。この分布 $f^{(n)}$ を支配する方程式は、Lundgren (1967) と Monin (1967) によって、流体の Navier-Stokes 式と確率保存則を用いて、独立に求められた。

この方程式系は、Hopf (1952) の汎関数方程式とは違って、数学的に解ける点では優れているが、一方、分布 $f^{(n)}$ に対する方程式が高次分布 $f^{(n+1)}$ を含むため、 n 次までの有限個の方程式では解けないという、方程式系の非完結性の難点をもっている。

この難点は、Tatsumi (2010) において述べたように、従来の乱流理論における、速

度相関やエネルギー・スペクトルなどの平均速度積に対する力学方程式系と、非完結性という点で共通している。しかし、従来の力学方程式系では、高次項が「非線形項」であるのに対して、速度分布方程式系では、高次項は線形の「高次微分項」である点で大きく異なっている。このため、従来の乱流理論の「非完結性」が非線形力学上の屈指の難問であったのに対して、今次の「非完結性」はあくまでも線形力学上の問題であり、さらに後に述べるように、高次項が縮退項として現れることから、その完結を厳密に遂行できるという利点がある。

2.1 準正規性仮説

(1)式によって表される速度分布系に対する最も簡単な完結関係は、

$$f^{(2)}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t) = f(\mathbf{v}_1, \mathbf{x}_1; t) f(\mathbf{v}_2, \mathbf{x}_2; t), \quad (2)$$

で表される独立関係である。この関係は、分布 f が正規分布である場合には厳密に成り立つため、準正規性近似という。一般の非正規分布の場合には、距離 $r = |\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|$ の大きい値 $r \rightarrow \infty$ に対して、二つの一点分布 f が互いに独立になることによって成立するが、より小さい r の値に対しては一般には成立しない。

2.2 交差独立性仮説

これに対して、以下に述べる完結仮説が Tatsumi (2001) によって提案された。いま、二点速度 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ の代わりに、それらの交差速度、すなわち二点速度の和と差、

$$\mathbf{u}_+ = (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2)/2, \quad \mathbf{u}_- = (\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1)/2, \quad (3)$$

をとり、これらについて一体および二体分布を次のように定義する。

$$g_+(\mathbf{v}_+; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t) = \langle \delta(\mathbf{v}_+ - \mathbf{u}_+) \rangle, \quad g_-(\mathbf{v}_-; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t) = \langle \delta(\mathbf{v}_- - \mathbf{u}_-) \rangle, \\ g^{(2)}(\mathbf{v}_+, \mathbf{v}_-; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t) = \langle \delta(\mathbf{v}_+ - \mathbf{u}_+) \delta(\mathbf{v}_- - \mathbf{u}_-) \rangle. \quad (4)$$

そして、これらの交差速度分布の間に、(2)式と同じ独立関係、

$$g^{(2)}(\mathbf{v}_+, \mathbf{v}_-; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t) = g_+(\mathbf{v}_+; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t) g_-(\mathbf{v}_-; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t), \quad (5)$$

を考える。

この関係式は、二つの二点速度分布 $f^{(2)}$ と $g^{(2)}$ との間の恒等関係、

$$f^{(2)}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t) d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2 = g^{(2)}(\mathbf{v}_+, \mathbf{v}_-; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t) d\mathbf{v}_+ d\mathbf{v}_-,$$

および(3)式から導かれる、

$$f^{(2)}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t) = 2^{-3} g^{(2)}(\mathbf{v}_+, \mathbf{v}_-; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t) \\ = 2^{-3} g_+(\mathbf{v}_+; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t) g_-(\mathbf{v}_-; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t), \quad (6)$$

により、多点速度分布(1)を支配する Lundgren-Monin 方程式系に対する一つの完結仮説を与える。これを、交差独立性完結仮説という。

この完結仮説は、準正規近似(2)とは違って、二点間の距離の大きい値 $r \rightarrow \infty$ だけでなく、小さい値 $r \rightarrow 0$ に対しても成り立つ。このうち、前者の場合は (2) と同様に、二つの交差速度分布 g_+ と g_- が互いに独立になることに依って成り立つが、後者の場合は、次の論理によって保証される。

二点が一致した極限 $r = 0$ では、二点速度分布 $f^{(2)}$ は一般に次のように表される。

$$f^{(2)}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1; t) = f(\mathbf{v}_1, \mathbf{x}_1; t) \delta(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1). \quad (7)$$

一方、 $r \rightarrow 0$ において、交差速度 g_+ と g_- は、

$$g_+(\mathbf{v}_+; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t) = g_+((\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)/2; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t) \rightarrow g_+(\mathbf{v}_1; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1; t) = f(\mathbf{v}_1, \mathbf{x}_1; t),$$

$$g_-(\mathbf{v}_-; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t) \rightarrow \delta(\mathbf{v}_-) = \delta((\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)/2) = 2^3 \delta(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1). \quad (8)$$

となる。したがって、(7)および(8)式により、

$$\lim_{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1| \rightarrow 0} f^{(2)}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1; t) = \lim_{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1| \rightarrow 0} 2^{-3} g_+(\mathbf{v}_+; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t) g_-(\mathbf{v}_-; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t). \quad (9)$$

すなわち、(9)式は、 $r \rightarrow 0$ の極限において完結仮説(6)が成立することを示している。

後に述べるように、Lundgren-Monin 方程式系の各方程式における高次項は、いずれも同次項への縮退形となっており、完結仮説はいずれも、これらの縮退速度分布の距離が0となる2点に対して適用される。したがって、完結仮説の有効領域 $r \rightarrow 0$ は完結される高次項の存在領域 $r \rightarrow 0$ と全く一致している。このため、この仮説による完結は、何らの近似や誤差を伴わない完全な完結となっている。

なお、完結仮説の「有効領域 $r \rightarrow 0$ 」は、具体的には、2点速度分布の相似領域のうち、Kolmogorov $\eta = (\varepsilon^3/\nu)$ と同程度の「局所粘性小領域」 $r \approx \eta$ に対応し、それより大きい「局所慣性小領域」 $r \gg \eta$ は含まないと考えられる。

3. 一点速度分布方程式の完結

一点速度分布に対する Lundgren-Monin 方程式は、次のように表される。

$$\begin{aligned} & [\partial/\partial t + \mathbf{v}_1 \cdot \partial/\partial \mathbf{x}_1] f(\mathbf{v}_1, \mathbf{x}_1, t) \\ &= -\nu \lim_{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1| \rightarrow 0} |\partial/\partial \mathbf{x}_2|^2 \partial/\partial \mathbf{v}_1 \cdot \int \mathbf{v}_2 f^{(2)}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t) d\mathbf{v}_2 \\ &+ \partial/\partial \mathbf{v}_1 \cdot \partial/\partial \mathbf{x}_1 (1/4\pi) \iint |\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|^{-1} (\mathbf{v}_2 \cdot \partial/\partial \mathbf{x}_2)^2 f^{(2)}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t) d\mathbf{v}_2 d\mathbf{x}_2. \end{aligned} \quad (9)$$

この式の右辺の二項は、いずれも高次分布 $f^{(2)}$ を含み、かつ $r = |\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1| \rightarrow 0$ の縮退形であるため、完結仮説(6)の適用に最適の条件を具えている。

粘性項の完結：

さて、完結のために、(9)式の右辺第一項の粘性項に(6)式を代入すると、同項は次のようになる。

$$\begin{aligned} T_v &= -\nu \lim_{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1| \rightarrow 0} |\partial/\partial \mathbf{x}_2|^2 \partial/\partial \mathbf{v}_1 \cdot \int \mathbf{v}_2 f^{(2)}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t) d\mathbf{v}_2 \\ &= -2^{-3} \nu \lim_{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1| \rightarrow 0} |\partial/\partial \mathbf{x}_2|^2 \partial/\partial \mathbf{v}_1 \cdot \int \mathbf{v}_2 g_+(\mathbf{v}_+; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t) g_-(\mathbf{v}_-; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t) d\mathbf{v}_2. \end{aligned}$$

ここで、距離 r の小さい値 $r \rightarrow 0$ に対して、分布 g_+ は、

$$g_+(\mathbf{v}_+; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t) \rightarrow f(\mathbf{v}_+, \mathbf{x}_1, t) = f(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_-, \mathbf{x}_1, t) = (1 + \mathbf{v}_- \cdot \partial/\partial \mathbf{v}_1) f(\mathbf{v}_1, \mathbf{x}_1, t) \quad (10)$$

となることを考慮すれば、 T_v は次のように変形される。

$$\begin{aligned} T_v &= -2^{-3} \nu \lim_{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1| \rightarrow 0} |\partial/\partial \mathbf{x}_2|^2 \partial/\partial \mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_-) (1 + \mathbf{v}_- \cdot \partial/\partial \mathbf{v}_1) f(\mathbf{v}_1, \mathbf{x}_1, t) g_-(\mathbf{v}_-, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t) d\mathbf{v}_2 \\ &= -\nu \lim_{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1| \rightarrow 0} |\partial/\partial \mathbf{x}_2|^2 \int \{ \mathbf{v}_1 \cdot \partial/\partial \mathbf{v}_1 + 2(\mathbf{v}_- \cdot \partial/\partial \mathbf{v}_1)^2 \} f(\mathbf{v}_1, \mathbf{x}_1, t) g_-(\mathbf{v}_-, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t) d\mathbf{v}_- \\ &= -\nu [\mathbf{v}_1 \cdot \partial/\partial \mathbf{v}_1 |\partial/\partial \mathbf{x}_1|^2 + 2 \lim_{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1| \rightarrow 0} |\partial/\partial \mathbf{x}_2|^2 \int (\mathbf{v}_- \cdot \partial/\partial \mathbf{v}_1)^2 g_-(\mathbf{v}_-, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t) d\mathbf{v}_-] f(\mathbf{v}_1, \mathbf{x}_1, t). \end{aligned}$$

ただし、 $|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1| \rightarrow 0$ のとき分布 g_- は等方的となるため、 $\mathbf{v}_-$ の一次平均は0としている。したがって、高次の分布 $f^{(2)}$ を含む粘性項 T_v は、次のように1次分布 f で表される。

$$T_v = T_{v1} + T_{v2}, \quad (11)$$

$$T_{v1} = -\nu (\mathbf{v}_1 \cdot \partial/\partial \mathbf{v}_1) |\partial/\partial \mathbf{x}_1|^2 f(\mathbf{v}_1, \mathbf{x}_1, t), \quad (12)$$

$$\begin{aligned} T_{v2} &= -2\nu \lim_{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1| \rightarrow 0} |\partial/\partial \mathbf{x}_2|^2 \int (\mathbf{v}_- \cdot \partial/\partial \mathbf{v}_1)^2 g_-(\mathbf{v}_-, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t) d\mathbf{v}_-] f(\mathbf{v}_1, \mathbf{x}_1, t) \\ &= -2 \lim_{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1| \rightarrow 0} |\partial/\partial \mathbf{x}_2|^2 \int (1/3) |\mathbf{v}_-|^2 |\partial/\partial \mathbf{v}_1|^2 g_-(\mathbf{v}_-, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t) d\mathbf{v}_-] f(\mathbf{v}_1, \mathbf{x}_1, t) \\ &= -\alpha(\mathbf{x}_1, t) |\partial/\partial \mathbf{v}_1|^2 f(\mathbf{v}_1, \mathbf{x}_1, t), \end{aligned} \quad (13)$$

$$\alpha(\mathbf{x}_1, t) = (2/3) \lim_{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1| \rightarrow 0} |\partial/\partial \mathbf{x}_2|^2 \int |\mathbf{v}_-|^2 g_-(\mathbf{v}_-, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t) d\mathbf{v}_-. \quad (14)$$

ここに、 $\alpha(\mathbf{x}_1, t)$ は、分布 $f(\mathbf{v}_1, \mathbf{x}_1, t)$ に対する散逸パラメターを表し、事実、乱流のエネルギー散逸率 ε と次のように関係づけられる。

$$\begin{aligned}\alpha(\mathbf{x}_1, t) &= (2/3) \lim_{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1| \rightarrow 0} |\partial/\partial \mathbf{x}_2|^2 \langle |\mathbf{u} - (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t)|^2 \rangle \\ &= (1/6) \lim_{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1| \rightarrow 0} \sum_{i,j=1}^3 (\partial/\partial x_{2j})^2 \langle (u_{2i}(\mathbf{x}_2, t) - u_{1i}(\mathbf{x}_1, t))^2 \rangle \\ &= (1/3) \lim_{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1| \rightarrow 0} \sum_{i,j=1}^3 \langle (\partial u_{2i}(\mathbf{x}_2, t)/\partial x_{2j})^2 \rangle \\ &= (1/3) \sum_{i,j=1}^3 \langle (\partial u_{1i}(\mathbf{x}_2, t)/\partial x_{1j})^2 \rangle = \varepsilon(\mathbf{x}_1, t)/3.\end{aligned}\quad (15)$$

ただし、最終項は、エネルギー散逸率 ε の定義による。

圧力項の完結：

同様に、(9)式の右辺第二項の圧力項に(6)式を代入すると、次のように書ける。

$$\begin{aligned}T_p &= \partial/\partial \mathbf{v}_1 \cdot \partial/\partial \mathbf{x}_1 (1/4\pi) \iint |\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|^{-1} (\mathbf{v}_2 \cdot \partial/\partial \mathbf{x}_2)^2 f^{(2)}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t) d\mathbf{v}_2 d\mathbf{x}_2 \\ &= 2^{-3} \partial/\partial \mathbf{v}_1 \cdot \partial/\partial \mathbf{x}_1 (1/4\pi) \iint |\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|^{-1} (\mathbf{v}_2 \cdot \partial/\partial \mathbf{x}_2)^2 g_+(\mathbf{v}_+; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t) g_-(\mathbf{v}_-; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t) d\mathbf{v}_2 d\mathbf{x}_2\end{aligned}$$

ここで、上式の二重積分は、因子 $|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|^{-1}$ によって、 $r = |\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1| \rightarrow 0$ における被積分関数からの寄与が優越すると考えられるから、(10)式を考慮すれば、

$$\begin{aligned}T_p &= \partial/\partial \mathbf{v}_1 \cdot \partial/\partial \mathbf{x}_1 (1/4\pi) \iint |\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|^{-1} (\mathbf{v}_2 \cdot \partial/\partial \mathbf{x}_2)^2 (1 + \mathbf{v}_- \cdot \partial/\partial \mathbf{v}_1) f(\mathbf{v}_1, \mathbf{x}_1, t) g_-(\mathbf{v}_-; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t) d\mathbf{v}_- d\mathbf{x}_2 \\ &= \partial/\partial \mathbf{v}_1 \cdot \partial/\partial \mathbf{x}_1 \beta(\mathbf{v}_1, \mathbf{x}_1, t) f(\mathbf{v}_1, \mathbf{x}_1, t),\end{aligned}\quad (16)$$

$$\beta(\mathbf{v}_1, \mathbf{x}_1, t) = (1/4\pi) \iint |\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|^{-1} (\mathbf{v}_2 \cdot \partial/\partial \mathbf{x}_2)^2 (1 + \mathbf{v}_- \cdot \partial/\partial \mathbf{v}_1) g_-(\mathbf{v}_-; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t) d\mathbf{v}_- d\mathbf{x}_2, \quad (17)$$

と書ける。ここに、パラメター $\beta(\mathbf{v}_1, \mathbf{x}_1, t)$ は圧力からの寄与を表す。

一点方程式の完結：

以上の(11)、(12)、(13)および(16)を(9)に代入すれば、一点速度分布方程式は次のような完結した形に表される。

$$\begin{aligned}[\partial/\partial t + \mathbf{v}_1 \cdot \partial/\partial \mathbf{x}_1 + \mathbf{v} \partial/\partial \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 |\partial/\partial \mathbf{x}_1|^2 \\ + \alpha(\mathbf{x}_1, t) |\partial/\partial \mathbf{v}_1|^2 - \partial/\partial \mathbf{v}_1 \cdot \partial/\partial \mathbf{x}_1 \beta(\mathbf{v}_1, \mathbf{x}_1, t)] f(\mathbf{v}_1, \mathbf{x}_1, t) = 0,\end{aligned}\quad (18)$$

ここに、パラメター $\alpha(\mathbf{x}_1, t)$ と $\beta(\mathbf{v}_1, \mathbf{x}_1, t)$ は、次式で定義される。

$$\alpha(\mathbf{x}_1, t) = \varepsilon(\mathbf{x}_1, t)/3 = (2/3) \mathbf{v} \lim_{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1| \rightarrow 0} |\partial/\partial \mathbf{x}_2|^2 \iint |\mathbf{v}_-|^2 g_-(\mathbf{v}_-; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t) d\mathbf{v}_-, \quad (19)$$

$$\beta(\mathbf{v}_1, \mathbf{x}_1, t) = (1/4\pi) \iint |\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|^{-1} (\mathbf{v}_2 \cdot \partial/\partial \mathbf{x}_2)^2 (1 + \mathbf{v}_- \cdot \partial/\partial \mathbf{v}_1) g_-(\mathbf{v}_-; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t) d\mathbf{v}_- d\mathbf{x}_2. \quad (20)$$

パラメター $\alpha = \varepsilon/3$ はエネルギー散逸率、 β は圧力のなす仕事を表し、いずれも速度差分布 g_- に依存している。これらの方程式は、Tatsumi et al (2004) によって一様等方性乱流に対して初めて与えられた。

3.1 一点速度分布方程式の力学的特性

完結した1点速度分布方程式(18)が、高 Reynolds 数における乱流場の特性を備えていることは、興味ある事実である。

その第一は、(19)式で与えられる乱流のエネルギー散逸率 $\alpha(\mathbf{x}_1, t) = \varepsilon(\mathbf{x}_1, t)/3$ が、非粘性の極限 $\nu \rightarrow 0$ において有限な値をもつ非粘性散逸であることである。このことは、Kolmogorov (1941) の局所等方性乱流理論が、大前提として、非粘性極限でエネルギー散逸率を唯一のパラメターとすることと、基本的に合致している。

第二は、エネルギー散逸率(19)が、乱流の小規模成分の寄与による速度差分布 g_- の積分として表されていることである。このことは、エネルギー散逸は変動量の小規模揺動に起因するとする、非平衡統計力学の揺動散逸定理と軌を一にしている。

3.2 一点速度分布方程式の完全性

前節に述べた、交差独立性完結の結果が高 Reynolds 数における乱流の性質を良く表していることは、この完結仮説の完全性を裏書きするものであるが、以下に述べるように、この仮説による 1 点速度分布方程式(17)から導かれた一次、二次の積分モーメント方程式が、Navier-Stokes 方程式から直接に求められた平均流方程式、エネルギー方程式と完全に一致することは、この完結仮説の完全性と結果の厳密性を、より直接的に立証するものと言える。

平均流方程式：

$$\text{一点速度分布 } f \text{ に対する方程式(17)の第 1 積分モーメントをとれば、平均速度、} \\ \bar{u}_1(\mathbf{x}_1, t) = \langle u_1(\mathbf{x}_1, t) \rangle = \int \mathbf{v}_1 f(\mathbf{v}_1, \mathbf{x}_1, t) d\mathbf{v}_1 \quad (21)$$

に対する方程式、

$$\int \mathbf{v}_1 \left[\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1} + \nu \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_1} \cdot \mathbf{v}_1 \left| \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1} \right|^2 + \alpha(\mathbf{x}_1, t) \left| \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_1} \right|^2 - \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_1} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1} \beta(\mathbf{v}_1, \mathbf{x}_1, t) \right] \times \\ \times f(\mathbf{v}_1, \mathbf{x}_1, t) d\mathbf{v}_1 = 0$$

が得られるが、この方程式は直ちに次のように書ける。

$$\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial t} + \langle (\mathbf{u}_1 \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1}) \mathbf{u}_1 \rangle - \nu \left| \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1} \right|^2 \bar{u}_1 + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1} \int \beta(\mathbf{v}_1, \mathbf{x}_1, t) f(\mathbf{v}_1, \mathbf{x}_1, t) d\mathbf{v}_1 = 0. \quad (22)$$

ただし、 α 項は積分に依って消えている。

この式の β 項は、次のように変形できる。

$$M_p = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1} \int \beta(\mathbf{v}_1, \mathbf{x}_1, t) f(\mathbf{v}_1, \mathbf{x}_1, t) d\mathbf{v}_1 \\ = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1} \left[\frac{1}{4\pi} \int |\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|^{-1} (\mathbf{v}_2 \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_2})^2 (1 + \mathbf{v}_- \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1}) g_-(\mathbf{v}_-, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t) f(\mathbf{v}_1, \mathbf{x}_1, t) d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_- d\mathbf{x}_2 \right] \\ = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1} \left[\frac{1}{4\pi} \int |\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|^{-1} (\mathbf{v}_2 \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_2})^2 g_-(\mathbf{v}_-, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t) d\mathbf{v}_- d\mathbf{x}_2 \right] \\ = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1} \left[\frac{1}{4\pi} \int |\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|^{-1} (\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_2} \cdot (\mathbf{v}_2 \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_2}) \mathbf{v}_2) g_-(\mathbf{v}_-, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t) d\mathbf{v}_- d\mathbf{x}_2 \right] \\ = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1} \left[\frac{1}{4\pi} \int |\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|^{-1} \langle (\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_2} \cdot (\mathbf{u}_2 \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_2}) \mathbf{u}_2) \rangle d\mathbf{x}_2 \right] \\ = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1} \langle p(\mathbf{x}_1, t) / \rho \rangle. \quad (23)$$

ただし、最後の変形は、Navier-Stokes 方程式から非圧縮性条件を用いて圧力 $p(\mathbf{x}_1, t)$ を消去する場合に用いる演算の逆演算で、大抵の流体力学の教科書には書いてあるから、ここでは省略する。

(22)式の β 項に(23)を代入すれば、同式は、

$$\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial t} + \langle (\mathbf{u}_1 \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1}) \mathbf{u}_1 \rangle - \nu \left| \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1} \right|^2 \bar{u}_1 + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1} \langle p_1 / \rho \rangle = 0 \quad (24)$$

と書けるが、この式は、Navier-Stokes 方程式から直接に導かれる平均流方程式と、完全に一致している。

エネルギー方程式：

一点速度分布 f に対する方程式(18)の第二積分モーメントをとれば、乱流の単位質量当たりの運動エネルギー、

$$E(\mathbf{x}_1, t) = (1/2) \langle |\mathbf{u}_1(\mathbf{x}_1, t)|^2 \rangle = (1/2) \int |\mathbf{v}_1|^2 f(\mathbf{v}_1, \mathbf{x}_1, t) d\mathbf{v}_1 \quad (25)$$

に対する方程式、

$$(1/2) \frac{\partial \langle |\mathbf{u}_1|^2 \rangle}{\partial t} + (1/2) (\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1}) \cdot \langle \mathbf{u}_1 |\mathbf{u}_1|^2 \rangle - \nu \langle \mathbf{u}_1 \cdot \left| \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1} \right|^2 \mathbf{u}_1 \rangle \\ + 3\alpha(\mathbf{x}_1, t) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1} \cdot \int \mathbf{v}_1 \beta(\mathbf{v}_1, \mathbf{x}_1, t) f(\mathbf{v}_1, \mathbf{x}_1, t) d\mathbf{v}_1 = 0 \quad (26)$$

が得られる。上式のうち、粘性項と α 項は、それぞれ、

$$E_\nu = -\nu \langle \mathbf{u}_1 \cdot \left| \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1} \right|^2 \mathbf{u}_1 \rangle = -\nu \sum_{ij=1}^3 \langle u_{1i} (\frac{\partial}{\partial x_{1j}})^2 u_{1i} \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= -v \sum_{i,j=1}^3 [(1/2) (\partial/\partial x_{ij})^2 \langle u_{ii}^2 \rangle - \langle (\partial u_{ii}/\partial x_{ij})^2 \rangle] \\
&= -v [(1/2) |\partial/\partial \mathbf{x}_1|^2 \langle \mathbf{u}_1^2 \rangle - \sum_{i,j=1}^3 \langle (\partial u_{ii}/\partial x_{ij})^2 \rangle] \\
&= -v |\partial/\partial \mathbf{x}_1|^2 E(\mathbf{x}_1, t) + v \sum_{i,j=1}^3 \langle (\partial u_{ii}/\partial x_{ij})^2 \rangle, \tag{27}
\end{aligned}$$

$$E_a = \varepsilon(\mathbf{x}_1, t) = v \sum_{i,j=1}^3 \langle (\partial u_{ii}/\partial x_{ij})^2 \rangle, \tag{28}$$

となる。ところで、(26)式の最後の辺の第2項と、(27)式の最後の辺とにおける平均値は、記号は同じであるが、2.3節の(12)、(13)式に見られるように、前者は乱流の大規模成分が寄与する分布 $f(\mathbf{v}_1, \mathbf{x}_1, t)$ に基づき、後者は小規模成分が寄与する分布 $g_-(\mathbf{v}_-, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t)$ に基づいている。したがって、それらの関係する分布を明示するとすれば、(26)、(27)式は、それぞれ、

$$E_v = -v |\partial/\partial \mathbf{x}_1|^2 E(\mathbf{x}_1, t) + v \sum_{i,j=1}^3 \langle (\partial u_{ii}/\partial x_{ij})^2 \rangle_f,$$

$$E_a = v \sum_{i,j=1}^3 \langle (\partial u_{ii}/\partial x_{ij})^2 \rangle_g$$

と書ける。したがって、両項は全体として次のように表される。

$$\begin{aligned}
E_v + E_a &= -v |\partial/\partial \mathbf{x}_1|^2 E(\mathbf{x}_1, t) + v \sum_{i,j=1}^3 \langle (\partial u_{ii}/\partial x_{ij})^2 \rangle_f + v \sum_{i,j=1}^3 \langle (\partial u_{ii}/\partial x_{ij})^2 \rangle_g \\
&= -v |\partial/\partial \mathbf{x}_1|^2 E(\mathbf{x}_1, t) + v \sum_{i,j=1}^3 \langle (\partial u_{ii}/\partial x_{ij})^2 \rangle_{f(2)} \\
&= -v |\partial/\partial \mathbf{x}_1|^2 E(\mathbf{x}_1, t) + \varepsilon(\mathbf{x}_1, t). \tag{29}
\end{aligned}$$

一方、 β 項は、(19)式からの代入によって次のように書ける。

$$\begin{aligned}
E_\beta &= \partial/\partial \mathbf{x}_1 \cdot \int \mathbf{v}_1 \beta(\mathbf{v}_1, \mathbf{x}_1, t) f(\mathbf{v}_1, \mathbf{x}_1, t) d\mathbf{v}_1 \\
&= \partial/\partial \mathbf{x}_1 \cdot \int \mathbf{v}_1 (1/4\pi) \int |\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|^{-1} (\mathbf{v}_2 \cdot \partial/\partial \mathbf{x}_2)^2 (1 + \mathbf{v}_- \cdot \partial/\partial \mathbf{x}_1) g_-(\mathbf{v}_-, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t) f(\mathbf{v}_1, \mathbf{x}_1, t) d\mathbf{v}_- d\mathbf{x}_2 d\mathbf{v}_1 \\
&= \partial/\partial \mathbf{x}_1 \cdot \int \mathbf{v}_1 (1/4\pi) \int |\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|^{-1} (\mathbf{v}_2 \cdot \partial/\partial \mathbf{x}_2)^2 g_-(\mathbf{v}_-, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t) f(\mathbf{v}_1, \mathbf{x}_1, t) d\mathbf{v}_- d\mathbf{x}_2 d\mathbf{v}_1 \\
&= \partial/\partial \mathbf{x}_1 \cdot \langle \mathbf{u}_1 (1/4\pi) \int |\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|^{-1} (\mathbf{v}_2 \cdot \partial/\partial \mathbf{x}_2)^2 g_-(\mathbf{v}_-, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t) d\mathbf{v}_- d\mathbf{x}_2 \rangle \\
&= \partial/\partial \mathbf{x}_1 \cdot \langle \mathbf{u}_1 (1/4\pi) \int |\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|^{-1} (\partial/\partial \mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{v}_2) (\mathbf{v}_2 \cdot \partial/\partial \mathbf{x}_2) g_-(\mathbf{v}_-, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t) d\mathbf{v}_- d\mathbf{x}_2 \rangle \\
&= \partial/\partial \mathbf{x}_1 \cdot \langle \mathbf{u}_1 (1/4\pi) \int |\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|^{-1} (\partial/\partial \mathbf{x}_2 \cdot (\mathbf{u}_2 \cdot \partial/\partial \mathbf{x}_2) \mathbf{u}_2) d\mathbf{x}_2 \rangle \\
&= \partial/\partial \mathbf{x}_1 \cdot \langle \mathbf{u}_1 p_1 / \rho \rangle. \tag{30}
\end{aligned}$$

ここでも、最後の変形には、(22)式に用いた p_1 への逆変換を用いている。

以上の(28)、(29)式を代入すれば、エネルギー方程式(25)は次のように表される。

$$\begin{aligned}
\partial E(\mathbf{x}_1, t) / \partial t + (1/2) (\partial/\partial \mathbf{x}_1) \cdot \langle \mathbf{u}_1 |\mathbf{u}_1|^2 \rangle - v |\partial/\partial \mathbf{x}_1|^2 E(\mathbf{x}_1, t) \\
+ \varepsilon(\mathbf{x}_1, t) + \partial/\partial \mathbf{x}_1 \cdot \langle \mathbf{u}_1 p_1 / \rho \rangle = 0. \tag{31}
\end{aligned}$$

この式もまた、Navier-Stokes 方程式から直接導かれたエネルギー方程式と完全に一致している。

完結した一点速度分布方程式(18)が、その一次および二次積分モーメントとして、それぞれ正しい平均流方程式(24)とエネルギー方程式(31)を与えることは、その完結仮説の完全整合性と、結果の厳密性を実証するものと言える。

さらに言及すれば、従来の乱流理論においては、平均流方程式(24)とエネルギー方程式(31)はいずれも主要な方程式であり、その非完結性の取り扱いが如何に困難な問題であったかを想起するとき、それらが一括して一点速度分布方程式(18)の解として与えられることは、まさに画期的と言える。それは、力学現象の解析に当って、方法論の選択が如何に重要であるかを如実に物語っていると思われる。

4. 二点速度分布方程式の完結

4.1 慣性領域における完結

二点速度分布 $f^{(2)}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t)$ に対する Lundgren-Monin 方程式は、一般の非一様乱流に対して、一点速度分布に対する(9)式をそのまま二点に拡張した形に、次のように与えられている。

$$\begin{aligned} & [\partial/\partial t + \mathbf{v}_1 \cdot \partial/\partial \mathbf{x}_1 + \mathbf{v}_2 \cdot \partial/\partial \mathbf{x}_2] f^{(2)}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t) \\ &= -\nu \sum_{n=1}^2 \lim_{|\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_n| \rightarrow 0} |\partial/\partial \mathbf{x}_3|^2 \partial/\partial \mathbf{v}_n \cdot \int \mathbf{v}_3 f^{(3)}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{v}_3; t) d\mathbf{v}_3 \\ &+ \sum_{n=1}^2 \partial/\partial \mathbf{v}_n \cdot \partial/\partial \mathbf{x}_n (1/4\pi) \int |\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_n|^{-1} (\mathbf{v}_3 \cdot \partial/\partial \mathbf{x}_3)^2 f^{(3)}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{v}_3; t) d\mathbf{v}_3 d\mathbf{x}_2. \quad (32) \end{aligned}$$

すなわち、(32)式では、(9)式の左辺の移流項と右辺の粘性項と圧力項が、それぞれ点 $\mathbf{x}_1$ と $\mathbf{x}_2$ に対して与えられており、項数が二倍になっている。

(32)式の完結においては、高次の三点速度分布 $f^{(3)}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3; t)$ の三つの距離 $r = |\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|$ 、 $r' = |\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1|$ 、 $r'' = |\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2|$ のうち、縮退した距離 $r' \rightarrow 0$ 、 $r'' \rightarrow 0$ に対して、完結仮説(6)を適用する。このとき、残る距離 r の値の大小によって、完結の仕方が変わるのである。

話を明確にするために、距離 r の占める領域を、 r の大きい方から順に、従来「エネルギー保有領域」と呼ばれた、慣性だけが支配する「外部領域」、Kolmogorov の局所領域の中で、慣性だけが支配する「慣性小領域」、そして粘性と慣性が支配する「粘性小領域」、の三領域に区分することが出来る。この三領域のうち、相似性の観点から、慣性だけに依存する「外部領域」と「局所慣性小領域」とを併せて「慣性領域」と言い、慣性と粘性に依存する「局所粘性領域」を「慣粘性領域」と呼ぶことにしよう。このとき、高次速度分布における「縮退距離」は、距離の最も小さい「慣粘性領域」に対応すると考えられる。

いま、距離 $r = |\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|$ が「慣性領域」にあるとすれば、「慣粘性領域」内の縮退距離 $r' = |\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1|$ に関する速度分布は、距離 $r = |\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|$ だけ離れた速度 $\mathbf{v}_2$ とは独立であり、同様に、縮退距離 $r'' = |\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2|$ に関する速度分布は速度 $\mathbf{v}_1$ とは独立であると考えられるから、縮退距離に関わる完結は、いずれも1点速度分布の場合と同様に実行できる。

これに対して、距離 $r = |\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|$ が「慣粘性領域」内にある場合には、縮退距離 $r' = |\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1|$ および $r'' = |\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2|$ は距離 $r'' = |\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2|$ と同程度であるから、縮退距離に関する速度分布は、いずれも第三点の速度と独立ではあり得ない。この難点は、縮退距離に関わる完結に先だって、二点速度 $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ を交差速度 $(\mathbf{v}_+, \mathbf{v}_-)$ に変換することによって回避できるが、これについては次節において述べることにする。

二点方程式の完結(慣性領域)：

二点速度分布 $f^{(2)}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t)$ の二点間距離 $r = |\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|$ が慣性領域にある場合、Lundgren-Monin 方程式(32)の完結は、前節に述べた方針によって行われ、結果は Tatsumi (2011) によって次のように与えられている。

$$\begin{aligned} & [\partial/\partial t + \sum_{n=1}^2 \{ \mathbf{v}_n \cdot \partial/\partial \mathbf{x}_n + \nu (\partial/\partial \mathbf{x}_n \cdot \mathbf{v}_n) |\partial/\partial \mathbf{x}_n|^2 \\ &+ \alpha(\mathbf{x}_n, t) |\partial/\partial \mathbf{v}_n|^2 - \partial/\partial \mathbf{v}_n \cdot \partial/\partial \mathbf{x}_n \beta(\mathbf{v}_n, \mathbf{x}_n, t) \}] f^{(2)}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t) = 0. \quad (33) \end{aligned}$$

ここに、 $\alpha(\mathbf{x}_n, t)$ 、 $\beta(\mathbf{v}_n, \mathbf{x}_n, t)$ は、それぞれ(19)、(20)式における表式と同形である。

4.2 二点速度分布方程式の完全性

完結した二点速度分布方程式(33)の完全性は、一点速度分布方程式(18)の場合と同様、それから導かれる積分モーメント方程式と、直接 Navier-Stokes 方程式から求められる関連方程式との一致を確かめることによって示される。

二点速度分布 $f^{(2)}$ の最も簡単な積分モーメントとして、二点二次速度スカラー相関、

$$U^{(2)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t) = \langle \mathbf{u}_1(\mathbf{x}_1, t) \mathbf{u}_2(\mathbf{x}_2, t) \rangle = \iint \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 f^{(2)}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t) d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2, \quad (34)$$

を考えれば、相関 $U^{(2)}$ に対する方程式は、(33)式の二次積分モーメントをとることによって、次のように得られる：

$$\begin{aligned} & [\partial/\partial t + \nu(|\partial/\partial \mathbf{x}_1|^2 + |\partial/\partial \mathbf{x}_2|^2)] U^{(2)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t) + \langle \mathbf{u}_2 \cdot (\mathbf{u}_1 \cdot \partial/\partial \mathbf{x}_1) \mathbf{u}_1 \rangle + \langle \mathbf{u}_1 \cdot (\mathbf{u}_2 \cdot \partial/\partial \mathbf{x}_2) \mathbf{u}_2 \rangle \\ & = - \iint \{ \mathbf{v}_2 \cdot \partial/\partial \mathbf{x}_1 \beta(\mathbf{v}_1, \mathbf{x}_1, t) + \partial/\partial \mathbf{v}_1 \cdot \partial/\partial \mathbf{x}_2 \beta(\mathbf{v}_2, \mathbf{x}_2, t) \} f^{(2)}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t) d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2. \end{aligned}$$

ここに、二つの α 項は、積分によって消えている。さらに、二つの β 項は、3.2 節におけると同様、二つの圧力 $p_n(\mathbf{x}_n, t)$ ($n=1, 2$) を含んだ形に表せるから、上式は次のように書ける。

$$\begin{aligned} & [\partial/\partial t + \nu(|\partial/\partial \mathbf{x}_1|^2 + |\partial/\partial \mathbf{x}_2|^2)] U^{(2)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t) + \langle \mathbf{u}_2 \cdot (\mathbf{u}_1 \cdot \partial/\partial \mathbf{x}_1) \mathbf{u}_1 \rangle + \langle \mathbf{u}_1 \cdot (\mathbf{u}_2 \cdot \partial/\partial \mathbf{x}_2) \mathbf{u}_2 \rangle \\ & = - \langle \mathbf{u}_2 \cdot \partial/\partial \mathbf{x}_1 (p_1/\rho) \rangle - \langle \mathbf{u}_1 \cdot \partial/\partial \mathbf{x}_2 (p_2/\rho) \rangle. \end{aligned} \quad (35)$$

この二次モーメント方程式も、3.2 節におけるモーメント方程式と同様、Navier-Stokes 方程式から直接に導いた方程式と完全に一致しており、交差独立性完結の完全整合性に更なる例証を与えている。

5. 二点速度分布方程式の完結 (慣粘性領域)

5.1 局所座標

局所領域における解析には、Kolmogorov 長さ $\eta = (\nu^3/\varepsilon)^{1/4}$ と速度 $\mathbf{v} = (\nu\varepsilon)^{1/4}$ によって無次元化された次のような局所変数を用いるのが便利である。

$$\text{座標: } \mathbf{x}^* = \mathbf{x}/\eta = \mathbf{x} (\nu^3/\varepsilon)^{-1/4},$$

$$\text{時間: } t^* = t/(\eta/\nu) = t (\nu/\varepsilon)^{-1/2},$$

$$\text{速度: } \mathbf{u}^*(\mathbf{x}^*, t^*) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)/\nu = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)(\nu\varepsilon)^{-1/4},$$

$$\text{圧力: } p^*(\mathbf{x}^*, t^*)/\rho = p(\mathbf{x}, t)/\rho\nu^2 = (p(\mathbf{x}, t)/\rho)(\nu\varepsilon)^{-1/4}, \quad (36)$$

ここに、 $*$ は無次元の局所変数を表す

二点速度分布 $f^{(2)}$ に対する Lundgren-Monin 方程式(32)は、局所粘性領域において、次のように与えられる。

$$\begin{aligned} & [\partial/\partial t^* + \mathbf{v}_1^* \cdot \partial/\partial \mathbf{x}_1^* + \mathbf{v}_2^* \cdot \partial/\partial \mathbf{x}_2^*] f^{(2)*}(\mathbf{v}_1^*, \mathbf{v}_2^*; \mathbf{x}_1^*, \mathbf{x}_2^*; t^*) \\ & = - \nu \sum_{n=1}^2 \lim_{|\mathbf{x}_3^* - \mathbf{x}_n^*| \rightarrow 0} |\partial/\partial \mathbf{x}_3^*|^2 \partial/\partial \mathbf{v}_n^* \cdot \int \mathbf{v}_3^* f^{(3)*}(\mathbf{v}_1^*, \mathbf{v}_2^*, \mathbf{v}_3^*; \mathbf{x}_1^*, \mathbf{x}_2^*, \mathbf{x}_3^*; t^*) d\mathbf{v}_3^* \\ & \quad + \sum_{n=1}^2 \partial/\partial \mathbf{v}_n^* \cdot \partial/\partial \mathbf{x}_n^* (1/4\pi) \int |\mathbf{x}_3^* - \mathbf{x}_n^*|^{-1} (\mathbf{v}_3^* \cdot \partial/\partial \mathbf{x}_3^*)^2 \times \\ & \quad \times f^{(3)*}(\mathbf{v}_1^*, \mathbf{v}_2^*, \mathbf{v}_3^*; \mathbf{x}_1^*, \mathbf{x}_2^*, \mathbf{x}_3^*; t^*) d\mathbf{v}_3^* d\mathbf{x}_3^*. \end{aligned} \quad (37)$$

5.2 二点方程式 (慣粘性領域) の完結

4.1 節に述べたように、この場合の完結は、まず分布 $f^{(3)*}$ の距離 $r^* = |\mathbf{x}_2^* - \mathbf{x}_1^*|$ に関する二点速度 $(\mathbf{v}_1^*, \mathbf{v}_2^*)$ を交差二点速度 $(\mathbf{v}_+^*, \mathbf{v}_-^*)$ に変換し、その後、距離 $r^{*'} = |\mathbf{x}_3^* - \mathbf{x}_1^*|$ および $r^{*''} = |\mathbf{x}_3^* - \mathbf{x}_2^*|$ に関して、それぞれ二点速度 $(\mathbf{v}_\pm^*, \mathbf{v}_3^*)$ に交差独立仮説を適用す

るが、詳細については Tatsumi (2011) を参照されたい。

以上の結果、完結した二点速度分布方程式(慣粘性領域)は、次のように表される。

$$[\partial/\partial t + \sum_{n=1}^2 \{v_n^* \cdot \partial/\partial \mathbf{x}_n^* + (1/2)(\partial/\partial v_n^* \cdot v_n^*)(|\partial/\partial \mathbf{x}_1^*|^2 + |\partial/\partial \mathbf{x}_2^*|^2)\} + \sum_{\pm} a_{\pm}^*(\mathbf{x}_1^*, \mathbf{x}_2^*; t) |\partial/\partial v_{\pm}^*|^2 - \sum_{n=1}^2 \partial/\partial v_n^* \cdot \partial/\partial \mathbf{x}_n^* \beta^*(v_n^*, \mathbf{x}_n^*, t)] f^{(2)*}(\mathbf{v}_1^*, \mathbf{v}_2^*; \mathbf{x}_1^*, \mathbf{x}_2^*; t) = 0, \quad (38)$$

ここに、パラメター $a_{\pm}^*(\mathbf{x}_1^*, \mathbf{x}_2^*; t)$ は、二点 $(\mathbf{x}_1^*, \mathbf{x}_2^*)$ における交差速度 $(\pm v_{\pm}^*, v_{\pm}^*)$ と、点 $\mathbf{x}_3^*$ における速度 v_3^* とが作る交差速度、

$$\begin{aligned} v_{\pm+}^* &= (1/2)(\pm v_{\pm}^* + v_3^*), & v_{\pm-}^* &= (1/2)(v_3^* - (\pm v_{\pm}^*)); \\ v_{\pm+}^{**} &= (1/2)(v_{\pm}^* + v_3^*), & v_{\pm-}^{**} &= (1/2)(v_3^* - v_{\pm}^*); \end{aligned} \quad (39)$$

に関わるエネルギー散逸を表し、次式で定義される。

$$\begin{aligned} a_{\pm}^*(\mathbf{x}_1^*, \mathbf{x}_2^*; t) &= (2/3) \lim_{|\mathbf{x}_3^* - \mathbf{x}_1^*| \rightarrow 0} |\partial/\partial \mathbf{x}_3^*|^2 \int |v_{\pm-}^*|^2 g_{\pm-}^*(v_{\pm-}^*; \mathbf{x}_1^*, \mathbf{x}_2^*, \mathbf{x}_3^*; t) dv_{\pm-}^* \\ &= (2/3) \lim_{|\mathbf{x}_3^* - \mathbf{x}_2^*| \rightarrow 0} |\partial/\partial \mathbf{x}_3^*|^2 \int |v_{\pm-}^{**}|^2 g_{\pm-}^{**}(v_{\pm-}^{**}; \mathbf{x}_1^*, \mathbf{x}_2^*, \mathbf{x}_3^*; t) dv_{\pm-}^{**}. \end{aligned} \quad (40)$$

このパラメター $a_{\pm}^*(\mathbf{x}_1^*, \mathbf{x}_2^*; t)$ は、(40)式から明らかに、二点 $(\mathbf{x}_1^*, \mathbf{x}_2^*)$ における交差速度 $(\pm v_{\pm}^*, v_{\pm}^*)$ と、点 $\mathbf{x}_3^*$ における速度 v_3^* とが作る速度差に関するエネルギー散逸を与えており、既出のパラメター $a(\mathbf{x}_1, t)$ と同様、速度差のエネルギー散逸率 $\varepsilon_{\pm}^*(\mathbf{x}_1^*, \mathbf{x}_2^*; t)$ と、次の式で関係づけられている (Tatsumi (2011) を参照)。

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\pm}^*(\mathbf{x}_1^*, \mathbf{x}_2^*; t) &= 3a_{\pm}^*(\mathbf{x}_1^*, \mathbf{x}_2^*; t) \\ &= \sum_{i,j=1}^3 \langle \{ \partial u_{\pm i}^*(\mathbf{x}_1^*, \mathbf{x}_2^*; t) / \partial x_{ij}^* \}^2 \rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^3 \langle [(1/2)(\partial x_{ij}^*) \{ \pm u_{1i}^*(\mathbf{x}_1^*, t) + u_{2i}^*(\mathbf{x}_2^*, t) \}]^2 \rangle. \end{aligned} \quad (41)$$

また、通常のエネルギー散逸率 $\alpha^*(\varepsilon/3)$ とは、

$$a_+^*(\mathbf{x}_1^*, \mathbf{x}_2^*; t) + a_-^*(\mathbf{x}_1^*, \mathbf{x}_2^*; t) = (1/2) \{ \alpha^*(\mathbf{x}_1^*, t) + \alpha^*(\mathbf{x}_2^*, t) \}, \quad (42)$$

によって関係づけられている。

さらに、 $a_{\pm}^*(\mathbf{x}_1^*, \mathbf{x}_2^*; t)$ は、距離 $|\mathbf{x}_2^* - \mathbf{x}_1^*|$ の関数であるが、距離の大小の両極限で次の境界条件を満たしている。

$$\begin{aligned} \lim_{|\mathbf{x}_2^* - \mathbf{x}_1^*| \rightarrow \infty} a_{\pm}^*(\mathbf{x}_1^*, \mathbf{x}_2^*; t) &= (1/4) \{ \alpha^*(\mathbf{x}_1^*, t) + \alpha^*(\mathbf{x}_2^*, t) \}, \\ \lim_{|\mathbf{x}_2^* - \mathbf{x}_1^*| \rightarrow 0} a_+^*(\mathbf{x}_1^*, \mathbf{x}_2^*; t) &= \alpha^*(\mathbf{x}_1^*, t), \\ \lim_{|\mathbf{x}_2^* - \mathbf{x}_1^*| \rightarrow 0} a_-^*(\mathbf{x}_1^*, \mathbf{x}_2^*; t) &= 0. \end{aligned} \quad (43)$$

もう一つのパラメター $\beta^*(v_n^*, \mathbf{x}_n^*, t)$ ($n=1,2$) は、次式で定義され、慣粘性領域における圧力からの寄与を表している。

$$\begin{aligned} \beta^*(v_1^*, \mathbf{x}_1^*, t) &= (1/4\pi) \int \int |\mathbf{x}_3^* - \mathbf{x}_1^*|^{-1} (v_3^* \cdot \partial/\partial \mathbf{x}_3^*)^2 (1 + v_-^* \cdot \partial/\partial v_1^*) g_-(v_-^*; \mathbf{x}_1^*, \mathbf{x}_3^*; t) dv_-^* d\mathbf{x}_3^*, \\ \beta^*(v_2^*, \mathbf{x}_2^*, t) &= (1/4\pi) \int \int |\mathbf{x}_3^* - \mathbf{x}_2^*|^{-1} (v_3^* \cdot \partial/\partial \mathbf{x}_3^*)^2 (1 + v_-^{**} \cdot \partial/\partial v_2^*) g_-(v_-^{**}; \mathbf{x}_2^*, \mathbf{x}_3^*; t) dv_-^{**} d\mathbf{x}_3^*. \end{aligned} \quad (44)$$

慣粘性領域における二点速度分布方程式(38)を、慣性領域における方程式(33)と比較するとき、前者は後者と実質的には α 項においてのみ異なっており、それは、前者では自己エネルギー散逸率 $a_{\pm}^*(\mathbf{x}_1^*, \mathbf{x}_2^*; t)$ 、後者では通常の散逸率で表されている。このことは、乱流のエネルギー散逸が、局所領域中の慣粘性小領域において、他の領域よりもより複雑に変化していることを示している。

5.3 二点速度分布方程式(慣粘性領域)の完全性

慣粘性領域における二点速度分布 $f^{(2)*}$ の最も簡単な積分モーメントとして、次のよう

な二点二次速度スカラー相関を考える。

$$\begin{aligned} U^{(2)*}(\mathbf{x}_1^*, \mathbf{x}_2^*; t^*) &= \langle \mathbf{u}_1^*(\mathbf{x}_1^*, t^*) \mathbf{u}_2^*(\mathbf{x}_2^*, t^*) \rangle \\ &= \iint \mathbf{v}_1^* \cdot \mathbf{v}_2^* f^{(2)*}(\mathbf{v}_1^*, \mathbf{v}_2^*; \mathbf{x}_1^*, \mathbf{x}_2^*; t^*) d\mathbf{v}_1^* d\mathbf{v}_2^*, \end{aligned} \quad (45)$$

相関 $U^{(2)*}$ に対する方程式は、(45)式の二次積分モーメントをとることによって、次のように得られる (詳細は Tatsumi (2011)を参照)。

$$\begin{aligned} &[\partial/\partial t^* + \nu(|\partial/\partial \mathbf{x}_1^*|^2 + |\partial/\partial \mathbf{x}_2^*|^2)] U^{(2)*}(\mathbf{x}_1^*, \mathbf{x}_2^*; t^*) \\ &+ \langle \mathbf{u}_2^* \cdot (\mathbf{u}_1^* \cdot \partial/\partial \mathbf{x}_1^*) \mathbf{u}_1^* \rangle + \langle \mathbf{u}_1^* \cdot (\mathbf{u}_2^* \cdot \partial/\partial \mathbf{x}_2^*) \mathbf{u}_2^* \rangle \\ &+ 6\{\alpha_+^*(\mathbf{x}_1^*, \mathbf{x}_2^*; t^*) - \alpha_-^*(\mathbf{x}_1^*, \mathbf{x}_2^*; t^*)\} \\ &+ \iint \{\mathbf{v}_2^* \cdot \partial/\partial \mathbf{x}_1^* \beta^*(\mathbf{v}_1^*, \mathbf{x}_1^*, t^*) + \partial/\partial \mathbf{v}_1^* \cdot \partial/\partial \mathbf{x}_2^* \beta^*(\mathbf{v}_2^*, \mathbf{x}_2^*, t^*)\} \times \\ &\quad \times f^{(2)*}(\mathbf{v}_1^*, \mathbf{v}_2^*; \mathbf{x}_1^*, \mathbf{x}_2^*; t^*) d\mathbf{v}_1^* d\mathbf{v}_2^* = 0. \end{aligned}$$

ここでは、4.2 節とは違って、 α 項が、二つの $\alpha_{\pm}$ 項の差として残っている。また、二つの β 項は、3.2 節におけると同様、二つの圧力 $p_n(\mathbf{x}_n, t)$ ($n=1, 2$) を含んだ形に表せるから、上式は次のように書ける。

$$\begin{aligned} &[\partial/\partial t^* + \nu(|\partial/\partial \mathbf{x}_1^*|^2 + |\partial/\partial \mathbf{x}_2^*|^2)] U^{(2)*}(\mathbf{x}_1^*, \mathbf{x}_2^*; t^*) + \langle \mathbf{u}_2^* \cdot (\mathbf{u}_1^* \cdot \partial/\partial \mathbf{x}_1^*) \mathbf{u}_1^* \rangle \\ &+ \langle \mathbf{u}_1^* \cdot (\mathbf{u}_2^* \cdot \partial/\partial \mathbf{x}_2^*) \mathbf{u}_2^* \rangle + 6\{\alpha_+^*(\mathbf{x}_1^*, \mathbf{x}_2^*; t^*) - \alpha_-^*(\mathbf{x}_1^*, \mathbf{x}_2^*; t^*)\} \\ &+ \langle \mathbf{u}_2^* \cdot \partial/\partial \mathbf{x}_1^* (p_1/\rho) \rangle + \langle \mathbf{u}_1^* \cdot \partial/\partial \mathbf{x}_2^* (p_2/\rho) \rangle = 0. \end{aligned} \quad (46)$$

慣粘性領域における二点二次速度のスカラー相関方程式(46)を、慣性領域における方程式(35)と比較するとき、前者は $\alpha_{\pm}$ 項を除いては後者と完全に一致しており、これは二点速度分布方程式における一致の状況を反映している。また、相関方程式における $\alpha_{\pm}$ 項の存在が、慣粘性領域に限られていることは、この領域内の速度相関の振舞いが外部からは伺い知れないことを示している。

6. 結語

前節で見たように、一点速度分布 f を支配する(38)式は、表面的には閉じているが、パラメータ α を表す(39)式と β を表す(40)式が、ともに速度差分布 g_- に依存しているため、実質的には完結していない。一方、二点速度分布 $f^{(2)}$ を支配する方程式は、外部領域と局所領域とを問わず外形的には完結しており、パラメータ α, β の速度差分布 g_- への依存性も変わらない。

この結果は、二点速度分布 $f^{(2)}$ が、(35)式によって速度和分布 g_+ と速度差分布 g_- とで表されることを考慮するとき、一点、二点速度分布 $f, f^{(2)}$ の組を支配する速度分布方程式が、外部領域と局所領域を通じて完結していることを示している。

これは、一般に無限個の Lundgren-Monin 方程式系に対して、一点、二点速度分布方程式が「最小の自律決定系」を与えることを示したもので、このことは、ここで用いられた交差独立性完結が近似や誤差を伴わない完全完結であることを思い合わせるとき、重要な結果であると考えられる。

引用文献

- Hopf, E. (1952) *J. Rat. Mech. Anal.* **1**, 87-123.
Kolmogorov, A.N. (1941) *C. R. Acad. Sci. URSS*, **30**, 301-305.

- Lundgren, T.S. (1967) *Phys. Fluids*, **10**, 969-975.
- Monin, A.S. (1967) *PMM J. Appl. Math. Mech.* **31**, 1057-1068.
- Tatsumi, T. (2001) In Kambe, T. et al. eds. *Geometry and Statistics of Turbulence*. Kluwer Ac. Pub. Dordrecht. pp.3-12.
- Tatsumi, T. (2007) *RIMS Kokyuroku, Kyoto Univ. Bessatsu B1*, pp.383-406.
- Tatsumi, T. (2008) *RIMS Kokyuroku, Kyoto Univ.* 1601, pp.1-6.
- Tatsumi, T. (2010a) *RIMS Kokyuroku, Kyoto Univ.* 1673, pp.67-74.
- Tatsumi, T. (2010b) *RIMS Kokyuroku, Kyoto Univ.* 1721, pp.1-11.
- Tatsumi, T. (2011) *J. Fluid Mech.* **670**, 365-403.
- Tatsumi, T. & Yoshimura, T. (2004) *Fluid Dyn. Res.* **35**, 123-158.
- Tatsumi, T. & Yoshimura, T. (2007) *Fluid Dyn. Res.* **39**, 231-266.