

2 つの τ -自己同型の積の位数が 3 となる共形元の関係

宮本雅彦 筑波大学数学系

1. 序文

ここで扱う題材は頂点作用素代数ですが、無限次元の代数ではなく、ウェイト 2 の元からなるグライス代数という有限次元可換非結合代数の中の非常に組み合わせ論的な話題です。ある種のべき等元が 2 つ与えられたとき、その関係がどうなるかという問題で、多分、頂点作用素代数がどんなものか分からなくても理解できる話だと思います。ただ、頂点作用素代数だからこそ導かれる結果があるので、それらを助けとして使います。

まず、背景の説明から始めましょう。有限群論の立場から見てもっとも重要な頂点作用素代数の例は Frenkel, Lepowsky and Meurman によって構成されたムーンシャイン頂点作用素代数

$$V^h = \bigoplus_{i=0}^{\infty} V_i^h$$

です。この全自己同型群はモンスター単純群となっていることが示されているのですが、数年前に証明したように、単に自己同型となっているだけではなく、本質的に内部の構造から導かれる自己同型としてモンスター単純群が作用しています。

このような頂点作用素代数

$$V = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V_n$$

は、まず有限次元の斉次空間 V_n の直和となっており、ムーンシャイン頂点作用素代数の場合には、特に

$$\dim V_0 = 1, \quad V_1 = 0$$

であり、自然に各斉次空間 V_n に定義される不変内積はすべて定値となっています。

ここに出てくる頂点作用素代数はこのムーンシャイン頂点作用素代数のような性質を持っているものだけを考えます。この条件は有限位数の自己同型群を考えようというときには自然な条件であり、このような頂点作用素代数をムーンシャイン型と呼ぶことにします。数年前まではこのような頂点作用素代数はほとんど知られていませんでしたが、最近になって沢山構成されています。

このような条件のもとでは、ウェイト 2 の空間 V_2 は 不変内積を持つ可換 (非結合) 代数であり、特にムーンシャイン頂点作用素代数の場合には、 V_2^h はグライス氏によって構成された 196884 次元のモントラス・グライス代数と呼ばれるものになっています。(ヴィラソロ元はない) この名前から、一般に V_2 をグライス代数と呼んでいます。すなわち、頂点作用素代数というのは、グライス代数という有限次元の代数を理解する上でもっとも自然な考え方なのです。

このモントラス・グライス代数は有限群論の立場から研究されており、例えば、重要な結果として、Conway によって、モンスター単純群の中の 2A (共役類の名) と呼ばれ

る位数 2 の元 (involution) θ に対して、モンストラス・グライス代数のベキ等元 (軸と呼ばれました) e_θ が対応しており、2つの 2A の元 θ と ϕ に対して、その積 $\theta\phi$ の共役類によって内積 $\langle e_\theta, e_\phi \rangle$ が一意的に決まっているということを示しています。

モンスター単純群は、モジュラー関数や頂点作用素代数など、多くの分野との関連が見つかっていますが、有限群の立場から見ても非常に興味のある群で、特にこのモンスター単純群の中の 2A involutions の集合は魅力的な性質を持っています。例えば、

(1) 6-transposition property: 2つの 2A-involutions ϕ, ψ に対して $|\phi\psi| \leq 6$.

特に、積の共役類は

$$\begin{array}{ccccccccc} 2A & 3A & 4A & 5A & 6A & 4B & 2B & & \\ & & & & & & & 3C & \end{array}$$

のどれかになり、これは E_8 型のルートの最高ウェイトのルートの重複度と一致しています。(McKay observation の一つ) さらに、最近気付いたことですが、この順番は内積 $\langle e_\phi, e_\psi \rangle$ の大きさの順番となっています。たとえば 4B になる場合と 3C になる場合は、2A の位置からみて同じ距離なので、同じ内積を持っています。

逆に、私はこれらの事実を頂点作用素代数の立場から考察し、一般のグライス代数における長さ $1/4$ のベキ等元から自動的に頂点作用素代数の位数 2 の自己同型を定義できることを示しました。即ち、グライス代数だけでなく、無限個の作用を同時に考えてみると、自然に上のベキ等元の $\sqrt{2}$ 倍 $e \in V_2$ はイジング模型と呼ばれる頂点作用素代数 $L(\frac{1}{2}, 0)$ を生成しており、 V をこの加群とみると、

$$L(\frac{1}{2}, 0), \quad L(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \text{ と } L(\frac{1}{2}, \frac{1}{16})$$

の三つのタイプの加群のコピーの直和となっていることがわかります。それで、それぞれのタイプの直和を $W(0)$, $W(\frac{1}{2})$, $W(\frac{1}{16})$ で表すと、自己同型 τ_e が

$$\tau_e: \begin{cases} 1 & \text{on } W_0 \oplus W_{\frac{1}{2}} \\ -1 & \text{on } W_{\frac{1}{16}}, \end{cases}$$

によって定義できるのです。[Mi2]

容易に、モンストラスグライス代数の場合には、この共形元 e が 2A-involution τ_e の軸になっていることがわかります。また、一般にグライス代数においても、2つの共形元の関係は重要であり、例えば、 τ_e と τ_f が可換だとすると、内積 $\langle e, f \rangle$ は 0 または $\frac{1}{32}$ しか取りません。しかも、ムーンシャイン頂点作用素代数においては両方の場合がおきており、 $\langle e, f \rangle = \frac{1}{32}$ の時には、積 $\tau_e \tau_f$ は 2A-involution であり、 $\langle e, f \rangle = 0$ の時には積は 2B-involution となっています。逆に、 $\langle e, f \rangle = 0$ なら τ_e と τ_f は可換です。

モンスター群にまつわる興味ある結果として有名なものに、 $Y_{5,5,5}$ -diagram または、26 個の involutions の集合で、その図形が丁度、3 元体上の射影空間の 13 点と 13 線によって与えられる関係グラフとなっているコクスター図形があります。これで生成されるコクスター群を非常に簡単な関係式で割ると Bimonster $M \wr \mathbb{Z}_2$ が出てくるのです。(アト

ラスを参照してください。) モンスターに話を戻すと、 $21=9+12$ 個の点で、3 元体上のアフィン空間の 9 点と 12 線からなるコクスター図形で生成される群を簡単な関係式で割るとモンスター単純群が構成されます。[Mi1]

これらの図形においては、2 点 τ_e, τ_f が結ばれていないのは、共形元 e と f が直交しているときであり、関係は簡単です。では、 τ_e, τ_f が結ばれている時、即ち、 $(\tau_e \tau_f)^3 = 1$ の時、はどうなっているのでしょうか？これがこの講演の題材であり、これに対する解答を説明するのが目標です。ムーンシャイン頂点作用素代数の場合と違って、一般の場合には、自己同型 τ_e を与える共形元は一意的とは限りません。しかし、 $(\tau_e \tau_f)^3 = 1$ ということから、 τ_e と $\tau_{f\tau_e\tau_f}$ は同じ自己同型です。それで、 e として、 $f\tau_e\tau_f$ を取ってくることにします。即ち、

$$e = f\tau_e\tau_f$$

を仮定します。

モンスター単純群の場合には、2 つの 2A-involutions の積が位数 3 である場合には、3A-triality か 3C-triality となっています。この場合、内積はそれぞれ $\frac{13}{210}$ か $\frac{1}{28}$ です。[Co]. モンスター単純群というのは非常に不思議な群で、一般のグライス代数に対してもこれらの内積しか出てこないというのが、今回の結果を面白いと思う理由の一つです。すなわち、次を示します。

定理 1 V をムーンシャイン型の頂点作用素代数とし、 e と f を中心電荷 $\frac{1}{2}$ の異なる共形元とします。もし、 $\tau_e \tau_f$ が位数 3 で、 $f\tau_e\tau_f = e$ が成り立つなら、 $\langle e, f \rangle$ は $\frac{1}{28}$ または $\frac{13}{210}$ である。

ここでの目的は、この証明が案外簡単に求められたということを紹介することです。もっと詳しい構造もわかるのですが、頂点作用素代数の知識が必要なので、簡単な紹介だけしておきましょう。最後のところで、もう少し詳しく述べます。頂点作用素代数についても調べてみると、このような共形元 e, f に対して、それらの作用を使って生成される頂点部分代数 $VA(e, f)$ はそれ自身のヴィラソロ元を持つ頂点作用素代数となっていることがわかります。しかも、これらの構造が決定でき、頂点作用素代数としてのウェイト 2 の空間（グライス代数）はそれぞれ 4 次元と 3 次元しかないことがわかります。

定理 2 もし、 $|\tau_e \tau_f| = 3$ で $\langle e, f \rangle = \frac{13}{210}$ なら、 $VA(e, f)$ は以下のどれかと同型となる。

- (1) $(0, 0) \oplus (3, 0) \oplus (W(\frac{2}{3}, +) \otimes L(\frac{6}{7}, \frac{4}{3})) \oplus (W(\frac{2}{3}, -) \otimes L(\frac{6}{7}, \frac{4}{3}))$
- (2) $(0, 0) \oplus (0, 5) \oplus (L(\frac{4}{5}, \frac{2}{3}) \otimes L(\frac{6}{7}, \frac{4}{3})^{+1}) \oplus (L(\frac{4}{5}, \frac{2}{3}) \otimes L(\frac{6}{7}, \frac{4}{3})^{-1})$
- (3) $(0, 0) \oplus (3, 5) \oplus (W(\frac{2}{3}, +) \otimes L(\frac{6}{7}, \frac{4}{3})^{+1}) \oplus (W(\frac{2}{3}, -) \otimes L(\frac{6}{7}, \frac{4}{3})^{+1})$
- (4) $(0, 0) \oplus (3, 0) \oplus (0, 5) \oplus (3, 5) \oplus (W(\frac{2}{3}, \pm) \otimes L(\frac{6}{7}, \frac{4}{3})^{+1}) \oplus (W(\frac{2}{3}, \mp) \otimes L(\frac{6}{7}, \frac{4}{3})^{-1})$
in (4), $\tau_e \tau_f$ は [Mi3] の中で 3-State Potts model
 $L(\frac{4}{5}, 0) \oplus L(\frac{4}{5}, 3)$ を使って定義した自己同型と一致します。

ここで (h, k) は $L(\frac{4}{5}, h) \otimes L(\frac{6}{7}, k)$ を表します。

定理 3 $\tau_e \tau_f$ が位数 3 であり、 $\langle e, f \rangle = \frac{1}{28}$ と仮定します。このとき、 $VA(e, f)$ は中心電荷 $\frac{16}{11}$ の頂点作用素代数であり、そのグライス代数 $(VA(e, f))_2$ は次元 3 である。また、 $VA(e, f)$ は $L(\frac{1}{2}, 0) \otimes L(\frac{21}{22}, 0)$ を含む。

2. 設定

一応、記号を整理しておきましょう。

頂点作用素代数からの知識

グライス代数における共形元（ベキ等元の $\sqrt{2}$ 倍）はヴィラソロ代数と呼ばれるリー代数に対応しており、ムーンシャイン型の場合には、この元の長さは $\frac{1}{2}$ 以上となるか、

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{(m+2)(m+3)} \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

しか取らないことが [FQS], [GKO] 達の研究からわかります。しかも、後の場合には、さらに色々なことがわかります。（中心電荷の半分）例えば、それらのベキ等元のグライス代数への作用は対角化可能であって、固有値も有限個しかなく、すべてわかっています。

例えば、 $e \in V_2$ を長さ $1/4$ の共形元とすると、 e のグライス代数上の作用は

補題 1 ([Mi2]) V_2 は次のように分解する。

$$V_2 = \mathbb{R}e \oplus E^e(0) \oplus E^e(\frac{1}{2}) \oplus E^e(\frac{1}{16}),$$

ここで、 $E^e(h)$ は固有値 h を持つ $e(1)$ の固有空間である。

しかも、

$$ab \in E^e(h) \quad \forall a \in \mathbb{R}e + E^e(0), b \in E^e(h) \text{ かつ } \forall h$$

$$ab \in \mathbb{R}e + E^e(0) \quad \forall a, b \in E^e(\frac{1}{2})$$

$$ab \in E^e(\frac{1}{16}) \quad \forall a \in \mathbb{R}e + E^e(0) + E^e(\frac{1}{2}), b \in E^e(\frac{1}{16}) \text{ and}$$

$$ab \in \mathbb{R}e + E^e(0) + E^e(\frac{1}{2}) \quad \forall a, b \in E^e(\frac{1}{16}).$$

ということです。このようなことが長さ $\frac{1}{2}$ 以下のベキ等元の $\sqrt{2}$ 倍の元に対しては常にわかっているということです。

3. 証明

$\langle e, f \rangle = \frac{1}{4}$ とおきます。分解 $V_2 = \mathbb{R}e \oplus E^e(0) \oplus E^e(\frac{1}{2}) \oplus E^e(\frac{1}{16})$ を使って、

$$f = \lambda e + a + b + c$$

と表示します。ここで、 $\lambda \in \mathbb{R}$, $a \in E^e(0)$, $b \in E^e(\frac{1}{2})$, $c \in E^e(\frac{1}{16})$ です。定義から、 τ_e は $E^e(\frac{1}{16})$ を -1 倍するだけですので、

$$f^{\tau_e} = \lambda e + a + b - c.$$

同様に、

$$\begin{aligned} e &= \lambda f + g + h + i \\ e^{\tau_f} &= \lambda f + g + h - i \end{aligned}$$

と表示できます。ここで $g \in E^f(0)$, $h \in E^f(\frac{1}{2})$ かつ $i \in E^f(\frac{1}{16})$ です。

仮定 $e^{\tau_f} = f^{\tau_e}$ から、 $\lambda e + a + b - c = e - 2i$ であり、まず、

$$i = \frac{(1-\lambda)}{2}e - \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c.$$

を得ます。また、 $ef = fe$ から $2\lambda e + \frac{1}{2}b + \frac{1}{16}c = 2\lambda f + \frac{1}{2}h + \frac{1}{16}i$ なので、

$$h = (4\lambda - \frac{1}{16})(1-\lambda)e + (\frac{1}{16} - 4\lambda)a + (\frac{17}{16} - 4\lambda)b + (\frac{1}{16} - 4\lambda)c$$

を得ます。一方、 $e = \lambda f + g + h + i$ と $f = \lambda e + a + b + c$ から、

$$g = (1-\lambda)(\frac{9}{16} - 3\lambda)e + (3\lambda + \frac{7}{16})a + (3\lambda - \frac{9}{16})b + (3\lambda - \frac{9}{16})c$$

を得ました。すなわち、 i, h, g はすべて e, a, b, c で表示できたわけです。

次に、 f の性質 $ff = 2f$ を表示すると、

$$2\lambda e + 2a + 2b + 2c = 2\lambda^2 e + \lambda b + \frac{\lambda}{8}c + aa + bb + cc + 2ab + 2ac + 2bc$$

です。成分毎にみて、 $E^e(\frac{1}{16})$ の成分を比較すると、 $\frac{\lambda}{8}c + 2(a+b)c - 2c = 0$ であり、

$$(a+b)c = c - \frac{\lambda}{16}c.$$

を得ます。 $\langle e, aa \rangle = \langle ae, a \rangle = \langle 0, a \rangle = 0$ より、 aa の $\mathbb{R}e$ 成分が無いことがわかるので、

$$aa \in E^e(0)$$

です。また、説明したように、 $bb \in \mathbb{R}e \oplus E^e(0)$ なので、成分を分割して、

$$bb = (bb)_e e + (bb)_0,$$

と書くことにしましょう。ここで、 $(bb)_e \in \mathbb{C}$, $(bb)_0 \in E^e(0)$ です。同様に、 cc を分割して、

$$cc = \{(2\lambda - 2\lambda^2 - (bb)_e)e\} + \{2a - aa - (bb)_0\} + \{(2 - \lambda - 2a)b\} \in \mathbb{R}e \oplus E^e(0) \oplus E^e(\frac{1}{2})$$

と書いておきます。

$g \in E^f(0)$ なので、 $fg = 0$ です。それゆえ、

$$0 = (\lambda e + a + b + c) \left((\lambda - 1)(3\lambda - \frac{9}{16})e + (3\lambda + \frac{7}{16})a + (3\lambda - \frac{9}{16})b + (3\lambda - \frac{9}{16})c \right)$$

が成り立ちます。 $E^e(\frac{1}{16})$ の成分をみると、

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{\lambda}{16}(3\lambda - \frac{9}{16})c + (3\lambda - \frac{9}{16})(a + b)c + (\lambda - 1)(3\lambda - \frac{9}{16})\frac{1}{16}c \\ & + (3\lambda + \frac{7}{16})(a + b)c - bc \end{aligned}$$

であり、

$$bc = \frac{23}{2^8}(2^4\lambda - 1)c$$

と

$$ac = \frac{93}{2^8}(3 - 16\lambda)c$$

がわかります。

$E^e(\frac{1}{2})$ の成分は

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{\lambda}{2}(3\lambda - \frac{9}{16})b + (3\lambda - \frac{9}{16})ab + \frac{1}{2}(\lambda - 1)(3\lambda - \frac{9}{16})b \\ & + (3\lambda + \frac{7}{16})ab + (3\lambda - \frac{9}{16})(cc)_{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

です。ここで $(cc)_{\frac{1}{2}}$ は cc の $E^e(\frac{1}{2})$ における成分 $(2 - \lambda)b - 2ab$ です。このことから、計算を略しますが、

$$ab = \frac{9}{2^5}(3 - 2^4\lambda)b$$

を得ます。同様に、 $E^e(0)$ の成分から

$$aa = \frac{3}{2^3}(3 - 2^4\lambda)a$$

を得ます。

関係式は色々あり、 $fh = \frac{1}{2}h$ を使うと、

$$\begin{aligned} & (\lambda e + a + b + c) \left\{ \left(\frac{65}{16}\lambda - 4\lambda^2 - \frac{1}{16} \right) e + \left(\frac{1}{16} - 4\lambda \right) a \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{17}{16} - 4\lambda \right) b + \left(\frac{1}{16} - 4\lambda \right) c \right\} \\ & = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{65}{16}\lambda - 4\lambda^2 - \frac{1}{16} \right) e + \left(\frac{1}{16} - 4\lambda \right) a + \left(\frac{17}{16} - 4\lambda \right) b + \left(\frac{1}{16} - 4\lambda \right) c \right\}. \end{aligned}$$

であり、 $E^e(0)$ の成分をみると、

$$(bb)_0 = \frac{3}{2^5}(2^6\lambda - 1)a$$

が出てきます。これらから、

$$cc = (2\lambda - 2\lambda^2 - (bb)_e)e + \frac{31}{32}a + (8\lambda + \frac{5}{16})b$$

を得ます。特に、

補題 2 $\mathcal{G} = \mathbb{R}e + \mathbb{R}a + \mathbb{R}b + \mathbb{R}c$ はグライス代数の部分代数です。しかも、対称群 $G = \langle \tau_e, \tau_f \rangle$ は $\mathcal{G}$ に作用しています。

積だけが情報ではありません。内積も重要な情報であり、不変内積

$$\langle ac, c \rangle = \langle a, cc \rangle = \frac{31}{32} \langle a, a \rangle$$

と

$$\langle ac, c \rangle = \frac{93}{2^8}(3 - 2^4\lambda) \langle c, c \rangle$$

をあわせると、

$$\langle a, a \rangle = \frac{3}{8}(3 - 2^4\lambda) \langle c, c \rangle$$

を得ます。また、

$$\langle bc, c \rangle = \langle b, cc \rangle = (8\lambda + \frac{5}{2^4}) \langle b, b \rangle \text{ and } \langle bc, c \rangle = \frac{23}{2^8}(2^6\lambda - 1) \langle c, c \rangle$$

から、

$$\langle b, b \rangle = \frac{23(2^6\lambda - 1)}{2^4(2^7\lambda + 5)} \langle c, c \rangle$$

が出てきます。また、

$$\frac{9}{32}(3 - 2^4\lambda) \langle b, b \rangle = \langle ab, b \rangle = \langle a, bb \rangle = \frac{3}{2^5}(2^6\lambda - 1) \langle a, a \rangle$$

が出てきますので、これらを使うと関係式

$$(2^6\lambda - 1)(-2^4\lambda) \langle c, c \rangle = \frac{23(2^6\lambda - 1)}{2(2^7\lambda + 5)} \langle c, c \rangle$$

が出てきます。 $\langle c, c \rangle = 0$ の場合には、定値内積を仮定しているので、 $c = 0$ であり、 $e = f^{\tau_e \tau_f} = f$ となってしまう矛盾がでますので、 λ は

$$\frac{3}{2^4}, \frac{1}{2^6}, \text{ or } \frac{13}{2^8}$$

のどれかです。次に最初の場合が起きないことを示しましょう。

$$\langle c, c \rangle = 16\langle ec, c \rangle = 16\langle e, cc \rangle = 4(2\lambda - 2\lambda^2 - (bb)_e)$$

です。また、群も重要な情報を与えます。

$$(\tau_e^{-1}\tau_f^{-1}\tau_e)\tau_e(\tau_e^{-1}\tau_f\tau_e) = \tau_e\tau_f\tau_e\tau_f\tau_e = \tau_f,$$

なので、 $\tau_e^{-1}\tau_f\tau_e(e) = f$ and $\tau_e^{-1}\tau_f\tau_e(f) = e$ です。 c と i は e と f によって一意的に決まっていますので、 $\tau_e\tau_f\tau_e(c) = i$ です。群は内積を不変に保っていますので、 $\langle c, c \rangle = \langle i, i \rangle$ を得ます。それゆえ、

$$\begin{aligned} \langle c, c \rangle &= \langle i, i \rangle = \frac{1}{4}\langle (1-\lambda)e - a - b + c, (1-\lambda)e - a - b + c \rangle \\ &= \frac{1}{4}\{(1-\lambda)^2\frac{1}{4} + \langle a, a \rangle + \langle b, b \rangle + \langle c, c \rangle\} \\ &= \frac{1}{16}(1-2\lambda) + \frac{1}{16} = \frac{1}{8}(1-\lambda) \end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned} \langle a, a \rangle &= \frac{3(1-\lambda)(3-2^4\lambda)}{2^6} \\ \langle b, b \rangle &= \frac{23(1-\lambda)(2^6\lambda-1)}{2^7} \frac{1}{2^7\lambda+5} \quad \text{や} \\ \langle c, c \rangle &= \frac{1-\lambda}{8} \end{aligned}$$

等がでてきます。

f の定義から、 $\langle f, f \rangle = \frac{1}{4}$ なので、

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} &= \lambda^2\frac{1}{4} + \frac{-3 \cdot 2^4\lambda + 9}{8}\langle c, c \rangle + \frac{23(2^6\lambda-1)}{(2^7\lambda+5)2^4}\langle c, c \rangle + \langle c, c \rangle \\ &= \lambda^2\frac{1}{4} + \frac{-3 \cdot 2^4\lambda + 9}{8}\frac{1}{2}(1-\lambda) + \frac{23(2^6\lambda-1)}{(2^7\lambda+5)2^4}\frac{1}{2}(1-\lambda) + \frac{1}{2}(1-\lambda) \end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned} 0 &= (\lambda^2 - 1)\frac{1}{4} + \frac{-3 \cdot 2^4\lambda + 9}{8}\frac{1}{2}(1-\lambda) + \frac{23(2^6\lambda-1)}{(2^7\lambda+5)2^4}\frac{1}{2}(1-\lambda) + \frac{1}{2}(1-\lambda) \\ &= (1-\lambda)\left\{(-\lambda^2 - 1)\frac{1}{4} + \frac{-3 \cdot 2^4\lambda + 9}{8}\frac{1}{2} + \frac{23(2^6\lambda-1)}{(2^7\lambda+5)2^4}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right\} \\ &= \frac{(1-\lambda)(2^6\lambda-1)(13-2^8\lambda)}{2^4(2^7\lambda+5)}. \end{aligned}$$

が出てきますので、以前の結果とあわせると、希望した $\lambda = \frac{1}{2^6}$ or $\lambda = \frac{13}{2^8}$. が出てきます。

最後に頂点作用素代数的な計算を紹介しましょう。といっても重要なことはべき等元を見つけ、その内積を計算するということです。べき等元があれば、頂点作用素代数の理論が使えるということです。

$aa = \frac{3}{8}(3 - 16\lambda)a$ を示したので、

$$\omega_1 = \frac{16}{(9 - 48\lambda)}a$$

は共形元（べき等元の $\sqrt{2}$ 倍）です。直接の計算から次がわかります。

補題 3 $e + \omega_1$ は $VA(e, f)$ のヴィラソロ元です。

重要な $\lambda = \frac{13}{28}$ の場合を紹介しましょう。

まず、積を整理しておきましょう。

$$ab = \frac{3^2 \times 5 \times 7}{2^9}b$$

$$aa = \frac{3 \times 5 \times 7}{2^7}a$$

$$bb = \frac{3^9}{2^{15}}e + \frac{3^3}{2^7}a$$

$$ac = \frac{5 \times 7^2 \times 13}{2^{12}}c$$

$$bc = \frac{3^2 \times 23}{2^{10}}c$$

$$cc = \frac{3^5}{2^{13}}e + \frac{31}{32}a + \frac{23}{2^5}b$$

特に、

$$\omega_1 = \frac{2^8}{105}a$$

は中心電荷 $\frac{81}{70}$ の共形元です。中心電荷は 1 より大きいので、これで終わるわけではありません。

補題 4 ω_1 は 2 つの共形元の直和とならない。特に $E^e(0) = \mathbb{C}\omega_1$ です。

証明は、2 つの直和となっていると、中心電荷は $\frac{1}{2}$ 以上だということを使うと、両方とも、1 未満になってしまい。この場合の可能性はわかっているので、和が $\frac{81}{70}$ となるものがないことがわかるだけです。後半の結果は [Mi2] に載っています。

次の結果は頂点作用素代数の知識がないと証明できませんので、証明は省略しますが、面白いことに、グライス代数として e, f で生成される部分代数と頂点作用素代数として生成される部分頂点作用素代数のグライス代数部分が一致します。

定理 4 $(\text{VA}(e, f))_2 = \mathcal{G}$.

最後に予想を一つ挙げておきましょう。

予想 1 e と f を中心電荷 $\frac{1}{2}$ の異なる共形元とする。もし、 $\langle e, f \rangle = \frac{13}{2^8}$ なら、 $\tau_e \tau_f$ の位数は高々 3 です。

参考文献

- [Co] J. H. Conway, *Invent. Math.* **79** (1985).
- [CS] J. H. Conway, N. J. A. Sloane, *Sphere Packings, Lattices and Groups*, Springer-Verlag, New-York, (1988).
- [FLM] I. Frenkel, J. Lepowsky, A. Meurman, *Vertex Operator Algebras and the Monster*, *Pure and Appl. Math.* Vol. **134**, Academic Press, Boston, 1988.
- [FQS] D. Friedan, Z. Qiu, S. Shenker, *MSRI publ. # 3*, Springer-Verlag, (1984).
- [GKO] P. Goddard, A. Kent, D. Olive, *Commun. Math. Phys.* **103** (1986).
- [Gr] R. L. Griess, Jr., *Invent. Math.* **69** (1982).
- [Mi1] M. Miyamoto, *J. Algebra* **175**, (1995), no. 3.
- [Mi2] M. Miyamoto, *J. Algebra* **179**, (1996).
- [Mi3] M. Miyamoto, *J. Algebra* **239** (2001), no. 1.
- [W] W. Wang, *Duke Math. J. IMRN*, Vol. **71**, No. 1 (1993).