

$H^1(U^n)$ の端点と極値問題について

茨城大 理 荷 見 守 助

§1. 序. 複素平面上の単位円板 U 上の Hardy 族に関しては古くから論じられてゐるが、その中で単位球の端点と極値問題について最近藪田氏は多重円板 U^n 上の Hardy 族への拡張ならびに函数環的な抽象化を考へ種々な結果を出してゐる。この小文では、藪田氏の結果への簡単な注意を述べる。

U を $\mathbb{C}$ 上の単位開円板、 T を単位円周とし、 U^n, T^n で n 次元の多重円板及びトーラスを表はす。また我々は $H^1(U^n)$ により U^n 上の正則函数 f で

$$\|f\|_1 = \sup \left\{ \int_{T^n} |f(r\omega)| d\mu_n(\omega) : 0 < r < 1 \right\} < +\infty$$

なるものの全体を表はす。ここで μ_n は T^n 上の正規化された Lebesgue 測度を表はす。よく知られてゐるやうに ([5] 参照) $f \in H^1(U^n)$ は T^n 上の殆んど全ての点で非接線方向の境界値を持ち、それは $L^1(\mu_n)$ の要素 f^* を一意に決定し、しかも対応 $f \mapsto f^*$ は $H^1(U^n)$ から $L^1(\mu_n)$ への linear isometry である。

我々は記号を簡単にする為に, f と f^* を区別せずに同じく f と書き, $H^1(U^n)$ を $L^1(m_n)$ の部分空間とも看做す事にする.

さて, $n=1$ の時, de Leeuw と Rudin [1] は $f \in H^1(U^n)$ が $H^1(U^n)$ の単位球の端点なる為の必要充分条件は $\|f\|=1$ 且つ f が outer, 即ち

$$\log |f(0)| = \int_T \log |f(w)| dm_1(w) > -\infty,$$

である事を示した. また $n > 1$ に対して, Rudin [5] は $f \in H^1(U^n)$ が

$$\log |f(0)| = \int_{T^n} \log |f(w)| dm_n(w) > -\infty$$

を満たす時 outer であると定義した. 数田氏も注意してあるやうに, $f \in H^1(U^n)$ がノルム1で且つ outer ならば, f は $H^1(U^n)$ の単位球の端点である. ところが同氏によれば, この逆は成立せず ($n \geq 2$), $\pi(z_1 + z_2)/4$ なる反例が与えられた [4]. また同氏は n 次元の Hardy 族に於る極値問題の一意性について, de Leeuw-Rudin [1] 等の結果を拡張すべく種々の面白い議論を展開してゐる.

本稿では, 1次元の結果を帰納法で拡張する事により, 此迄の結果が殆んど全て得られる事, しかもそれ等が拡張される事, 議論が可成単純化される事などを示したい.

§ 2. *Quasi-analytic subspaces.* (X, μ) を有限測度空間,
 $L^1(\mu)$ を X 上の測度 μ に関する複素 L^1 -空間とする. そのノル
 ムを $\|\cdot\|_1$ または $\|\cdot\|_\mu$ と書く. $L^1(\mu)$ の線型部分空間 E が
 (X, μ) について quasi-analytic (略して *q. a.*) とは, $f \in E$
 が X の正測度の部分集合上で 0 ならば $f = 0$ なる事とする.
 例へば $H^1(\mathbb{T}^n)$ は $(\mathbb{T}^n, m_n)$ について *q. a.* である.

補題 2.1. $(X, \mu), (Y, \nu)$ を二つの有限測度空間とし, $E,$
 F, G を夫々 $L^1(\mu), L^1(\nu), L^1(\mu \times \nu)$ の部分空間で次を満すも
 のとする.

(2.2) E, F は夫々 $(X, \mu), (Y, \nu)$ について *q. a.*

(2.3) 任意の $h \in G$ に対し, 殆んど全ての $x \in X$ について
 $h(x, \cdot) \in F$ 且つ 殆んど全ての $y \in Y$ について $h(\cdot, y)$
 $\in E$.

この時, G は $(X \times Y, \mu \times \nu)$ について *q. a.* である.

我々は, $h \in G$ に対して, $X_h = \{x \in X : h(x, \cdot) \in F\}, Y_h =$
 $\{y \in Y : h(\cdot, y) \in E\}$ と置く. これ等は零集合を度外視すれ
 ば一意に決定される. 帰納法により次も簡単に示される.

系 2.4. $(X_i, \mu_i) (1 \leq i \leq n)$ を有限測度空間とし, E_i を
 $L^1(\mu_i)$ の *q. a.* 部分空間とする. また J_n を $L^1(\mu_1 \times \cdots \times \mu_n)$ の部分
 空間で次を満すものとする.

(2.5) 任意の $h \in J_n$ に対し次が成立する: 任意の $i (1 \leq i \leq n)$

に対し, 函数 $x_i \mapsto h(x_i, y_{(i)})$ は殆んど全ての $y_{(i)} \in X_1 \times \cdots \times \hat{X}_i \times \cdots \times X_n$ に対し E_i に属する. 但し記号 $\wedge$ はその因子が除かれる事を示す.

この時, J_n は $(X_1 \times \cdots \times X_n, \mu_1 \times \cdots \times \mu_n)$ について g. a. である.

§ 3. Extremal functions. E を $L^1(\mu)$ の部分空間とする. $f \in E$ が E で extremal とは, $f=0$ であるか或は $\|f\|_\mu \neq 0$ 且つ $f/\|f\|_\mu$ が E の単位球の端点である事を云ふ.

定理 3.1. E, F, G は補題 2.1 の通りとし, $f \in G$ とする. いま, 殆んど全ての $y \in Y_f$ に対して $f(\cdot, y)$ は E で extremal, 且つ殆んど全ての $x \in X_f$ に対して $f(x, \cdot)$ は F で extremal とすれば, f は G で extremal である.

これを示すには, $h \in G$ に対し $\|f+h\|_{\mu \times \nu} = \|f-h\|_{\mu \times \nu} = \|f\|_{\mu \times \nu} = 1$ として $h=0$ を出せばよいが, こちらは Fubini の定理と性質 g. a. を組合せて簡単に得られる. この定理から帰納法によって次が得られる.

系 3.2. E_i ($1 \leq i \leq n$) は $L^1(\mu_i)$ の g. a. 部分空間, J_n は $L^1(\mu_1 \times \cdots \times \mu_n)$ の部分空間で条件 (2.5) を満すものとする. また $f \in J_n$ は次の条件を全ての i に対して満足するとする:

(3.3)_i 殆んど全ての $y_{(i)} \in X_1 \times \cdots \times \hat{X}_i \times \cdots \times X_n$ に対し, 函数 $x_i \mapsto f(x_i, y_{(i)})$ は E_i に属し且つ E_i で extremal.

この時、 f は J_n で *extremal* である。

これ等の結果を $H'(U^n)$ に応用して次の結果を得る。

系 3.4. k, k' は自然数で $k+k'=n$ とし、 $f \in H'(U^n)$ とする。もし殆んど全ての $w_1 \in T^k$ に対し $f(w_1, \cdot)$ は $H'(U^{k'})$ で *extremal* であり、殆んど全ての $w_2 \in T^{k'}$ に対し $f(\cdot, w_2)$ は $H'(U^k)$ で *extremal* であるならば、 f は $H'(U^n)$ で *extremal* である。

次に、 $U_1 = U_2 = \dots = U_n = U$, $T_1 = T_2 = \dots = T_n = T$ とし、
 $U^n = U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$, $T^n = T_1 \times \dots \times T_n$ と表はす事にする。

系 3.5. $f \in H'(U^n)$ は全ての z に対し次の条件を満たすとする：

(3.6)_z 殆んど全ての $w_{(i)} \in T_1 \times \dots \times \hat{T}_i \times \dots \times T_n$ に対し、 $z_i \mapsto f(z_i, w_{(i)})$ は $H'(U_i)$ に属し且つ *outer* である。

この時、 f は $H'(U^n)$ で *extremal* である。

これは系 3.2 を de Leeuw-Rudin [1] の結果と組合せれば合
 する。系 3.5 を用ひれば、*outer* でない *extremal* な函数をいくつか作る事が出来る。

(i) 数田氏の例 $z_1 + z_2$. 任意に固定した実数 θ に対し、
 $e^{i\theta} + z$ は *outer* である。従つて (3.5) によつて $z_1 + z_2$ が *extremal* であることが知られる。但し $n \geq 2$ 。

(ii) f, g が夫々 $H'(U^k), H'(U^{n-k})$ での *inner function* ならば、
 $f(z_1, \dots, z_k) + g(z_{k+1}, \dots, z_n)$ は *extremal* である。

$f \in H^1(\mathbb{D}^n)$ が全ての i に対し条件 (3.6)_i を満足する時, 分離的に outer と呼ぶ事にすれば, 上の結果は, 分離的に outer ならば extremal である事を示してゐる. 勿論, 任意の outer な $f \in H^1(\mathbb{D}^n)$ は分離的にも outer である.

問題. $f \in H^1(\mathbb{D}^n)$ が extremal ならば, 分離的に outer であるか?

§4. 極値問題の一意性. (X, μ) を有限測度空間とし, $E \subset L^1(\mu)$ の部分空間とする. E 上の有界線型汎函数 Φ に対し, $S^\Phi \equiv \{f \in E : \|f\|_1 = 1, \Phi(f) = \|\Phi\|\}$ と置く. Hahn-Banach の定理により $\varphi \in L^\infty(\mu)$ で, $\|\varphi\|_\infty = \|\Phi\|$ 且

$$\Phi(f) = \int_X f \varphi d\mu \quad (\forall f \in E)$$

なるものが存在する. この時, $f \in S^\Phi$ ならば

$$(1) \quad f(x) \varphi(x) \geq 0 \quad \mu\text{-a.e.},$$

$$(2) \quad |\varphi(x)| = \|\varphi\|_\infty \quad (\forall x \in S(f))$$

が成立つ. $>$ で $S(f) = \{x \in X : f(x) \neq 0\}$ であり, 零集合を度外視すれば一意に定まる. 逆に, $f \in E, \|f\|_1 = 1$ が (1), (2) を満たせば, $f \in S^\Phi$ である.

さて, E が (X, μ) について g.a. ならば, E の任意の $f (\neq 0)$ に対して $S(f) = X$ であり, 従つて S^Φ はその中の要素を一つ知

これは完全に決定される。即ち、 $f \in S^\perp$ ならば、 $S^\perp = \{g \in E : \|g\|_1 = 1, \arg g(x) = \arg f(x) \pmod{2\pi} \text{ a.e.}\}$ 。従って、 $S^\perp$ の代りに $S^\perp$ と書いてもよい。さて我々は次の定義を置く。 $f \in E$ が E で unicity property を持つ とは、 $f \neq 0$ 且 $g = f/\|f\|_1$ と置く時 $S^f = \{g\}$ なる事。

定理 4.1. E, F, G は補題 2.1 の通りとし、 $f \in G$ を 0 でないとする。もし殆んど全ての $x \in X_f$ に対し $f(x, \cdot)$ は F で u.p. を持ち、殆んど全ての $y \in Y_f$ に対し $f(\cdot, y)$ は E で u.p. を持つとすれば、 f は G で u.p. を持つ。

系 4.2. $E_i (1 \leq i \leq n)$ 及び J_n は系 3.2 の通りとし、 $f \in J_n$ は全ての i に対し次の条件を満たすものとする。

(4.3)_i 殆んど全ての $y_{(i)} \in X_1 \times \cdots \times \hat{X}_i \times \cdots \times X_n$ に対し、 $x_i \mapsto f(x_i, y_{(i)})$

は E_i に属し、且 E_i で u.p. を持つ。

この時、 f は J_n で u.p. を持つ。

これを $H'(\mathcal{U}^n)$ に適用すれば次を得る。

系 4.3. $f \in H'(\mathcal{U}^n)$ は 0 でなく、次の条件を満たすものとする ($1 \leq i \leq n$)。

(4.4)_i 殆んど全ての $w_{(i)} \in T_1 \times \cdots \times \hat{T}_i \times \cdots \times T_n$ に対し、 $z_i \mapsto$

$f(z_i, w_{(i)})$ ($z_i \in \mathcal{U}_i$) は $H'(\mathcal{U}_i)$ に属し且 $H'(\mathcal{U}_i)$ で u.p. を持つ。

この時、 f は $H'(\mathcal{U}^n)$ で u.p. を持つ。

この系により、数田氏の結果のいくつかを統一的に拡張された形で導き出す事が出来る。例へば、

定理 4.5 (数田 [5]). $f \in H^1(\mathbb{D}^n)$ とする。もし f が outer で且つ $1/f \in L^1(m_n)$ ならば、 f は $H^1(\mathbb{D}^n)$ で u.p. を持つ。

この定理の $n=1$ の場合と (4.3) を組合はせれば、

系 4.6. $f \in H^1(\mathbb{D}^n)$ とする。もし f が分離的に outer で、且つ全ての i について次の条件を満たすとすれば、 f は $H^1(\mathbb{D}^n)$ で u.p. を持つ:

(4.7)_i 殆んど全ての $w_{(i)} \in T_1 \times \cdots \times \hat{T}_i \times \cdots \times T_n$ に対し、 $w_i \mapsto 1/f(w_i, w_{(i)})$ ($w_i \in T_i$) は T_i 上で integrable.

また、次の結果を挙げる。

定理 4.8 (数田 [7]). $f \in H^1(\mathbb{D}^n)$ が 0 ではなく、且つ T^n 上殆んど到る処 $\operatorname{Re} f \geq 0$ を満たせば、 f は $H^1(\mathbb{D}^n)$ で u.p. を持つ。

数田氏はこれを証明する爲に、 n -調和函数の性質などを用いた。しかし我々の結果によれば、 $n=1$ の時が分れば、一般の場合は (4.3) から直ぐ分る訳である。 $n=1$ の時は調和函数の普通に知られた性質だけで簡単に証明が出来る。しかも、

系 4.9. $f \in H^1(\mathbb{D}^n)$ が 0 ではなく、且つ全ての i に対し次の条件を満たすとする。

(4.10)_i 殆んど全ての $w_{(i)} \in T_1 \times \cdots \times \hat{T}_i \times \cdots \times T_n$ に対し、 $w_{(i)}$ と

f とに依存する実数 θ で

$$\theta - \pi/2 \leq f(w_i, w_{(i)}) \leq \theta + \pi/2 \quad \text{a.e. (mod } 2\pi)$$

を強くと全この $w_i \in T_i$ に対し満足するものが存在する。

この時、 f は $H^1(\mathbb{D}^n)$ で u.p. を持つ。

この系の極く特殊な場合として、 $z_1 + z_2$ が $H^1(\mathbb{D}^n)$ ($n \geq 2$) で u.p. を持つ事(数田 [6])が分る。更に一般に

系 4.11. f, g が夫々 $H^1(\mathbb{D}^k), H^1(\mathbb{D}^{n-k})$ で inner ならば、

$f(z_1, \dots, z_k) + g(z_{k+1}, \dots, z_n)$ は $H^1(\mathbb{D}^n)$ で u.p. を持つ。

もっと複雑な条件を与える事も出来るが余り意味があるとも思はれないので止める。いつかにしても、u.p. を持つ函数の特徴付けは $n=1$ の時にも出来てはゐないやうなのでその解決が望まれる処である。詳しい議論は後に譲って問題を一つだけ挙げる。

問題. f, g は $H^1(\mathbb{D})$ で u.p. を持ち且つ $fg \in H^1(\mathbb{D})$ とする。

この時、 fg も $H^1(\mathbb{D})$ で u.p. を持つにはどんな条件が必要(と充分)か？

参考文献

[1] K. deLaet and W. Rudin, Extreme points and extremum problems in H_1 , Pacific J. Math. 8 (1958), 463-485.

[2] M. Hasumi, A remark on extreme points in H^1 on polydisks, Bull. Fac. Sci. Ibaraki Univ. Ser. A. Math. 3 (1971), 25-28.

- [3] W. Rudin, *Function theory in polydiscs*, Benjamin, 1969.
- [4] K. Yabuta, *Extreme points and outer functions in $H^1(D^n)$* , *Tôhoku Math. J.* 22 (1970), 320-324.
- [5] ———, *Unicity of the extremum problems in $H^1(D^n)$* , *Proc. Amer. Math. Soc.* 28 (1971), 181-184.
- [6] ———, *Remarks on extremum problems in H^1* , *Tôhoku Math. J.*, forthcoming.
- [7] ———, *Some uniqueness theorems for $H^1(D^n)$ functions*, forthcoming.

註 1) §3 の末尾に述べた問題は否定的に解かれた。
 任意の複素数 α ($|\alpha| > 1$) に対して、函数 $\alpha z_1 - z_2$ は $H^1(D^2)$ で extremal ではあるが、分離的に outer ではない。
 Extremal であることは、[2] の方法で示される。この反例は W. Rudin による。

註 2) この報告で述べられた定理の証明等については、次の論文を参照されたい: M. Hasumi, *Extreme points and unicity of extremum problems in H^1 on polydiscs*, *Pacific J. Math.* (近刊)。