

T^2 上の foliated S^1 -bundle によって代表される
 $B\text{Diff}(S^1)$ の 2-cycle について.

東大 理 坪井 俊

1. このノートでは、 T^2 上の foliated S^1 -bundle によって代表される $B\text{Diff}(S^1)$ の 2-cycle が homologous to zero になるための、いくつかの十分条件を与え、証明の概略を述べる。それらは holonomy map についての解析的な、幾何的な、あるいは代数的な条件である。

[14]において、Thurston は Godbillon-Vey 準同型 $G.V. : H_3(B\Gamma^r, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{R}$ ($r \geq 2$) が全射であることを示した。 $(B\Gamma^r$ は Γ^r structure の分類空間。) $G.V.$ が全単射であるという"楽観的"予想について考える。Godbillon-Vey 数は 3次元多様体の余次元 1 の foliation の cobordism 不変量で、 $G.V.$ は余次元 1 の 3次元 C^r -foliated cobordism 群 $\mathcal{F}\Omega_{3,1}^r$ ($r \geq 2$) から $\mathbb{R}$ への全射である。

次の foliation については Godbillon-Vey 数 $= 0$ が示され、さらに foliated cobordant to zero が示されている。

- ① S^1 上の fiber bundle の bundle foliation。
- ② 至るところ 0 でない閉 1-形式で定義された foliation。
- ③ S^3 の Reeb foliation。(Mizutani [6], Sergeraert [12])
- ④ 3次元多様体 M^3 に spinnable structure を用いて構成された foliation (Fukui [1], Oshikiri [11]) (⑤ と)
- ⑤ M^3 上の cobordant to zero の foliation を transverse closed curve の管状近傍において foliated surgery して得られる foliation

[2] において Herman は T^2 上の foliated S^1 -bundle の Godbillon-Vey 数 $= 0$ を示した。この foliation が cobordant to zero かという問題を考える。(最近、holonomy のない foliation (Morita-Tsuboi [7]) 深度有限、可換 holonomy の foliation (Nishimori [10]) について、 $G.V. = 0$ が示された。これらの foliation の cobordism を考える時にも、我々の問題はさけて通れない。)

多様体 M 上の foliated S^1 -bundle とは、 M 上の S^1 -bundle でその全空間に fiber に transverse な foliation をもつものである。このような foliation は (total) holonomy ^{準同型} $\pi_1(M, *) \rightarrow \text{Diff}(S^1)$ ($* \in M$) によって決定される。我々は transversely oriented な

foliationのみを考える。このとき、holonomy は $\text{Diff}_+^r(S')$, S' の orientation preserving C^r -diffeomorphism 全体のなす群への写像となる。

T^2 上の foliated S' -bundle の全空間は T^3 であり (Wood [16])、このような foliation は up to topological equivalence では分類されている。(Monssu-Roussarie [8])

$H_3(B\Gamma_1^r)$, $\pi_1\Omega_1^r$ と $H_2(\text{Diff}_+^r(S'))$ の関係について述べておく。
 ここで、 $H_2(\text{Diff}_+^r(S'))$ は群 $\text{Diff}_+^r(S')$ の 2次元 homology 群である。
 $\text{Diff}_+^r(S')$ を discrete topology で考えたものを $\text{Diff}_+^r(S')^\delta$ と書くと、
 C^r -foliated S' -bundle は $\text{Diff}_+^r(S')^\delta$ -bundle と考えることができる。
 $\text{Diff}_+^r(S')^\delta$ -bundle の分類空間 $B\text{Diff}_+^r(S')^\delta$ が定義され、
 $H_*(B\text{Diff}_+^r(S')^\delta) = H_*(\text{Diff}_+^r(S'))$ である。Oriented な 2次元 開多様体上の C^r -foliated S' -bundle を、その total space の transversely orientable foliation (Γ_1^r -structure) とみなすことは、
 準同型 $H_2(B\text{Diff}_+^r(S')^\delta) \rightarrow H_3(B\Gamma_1^r)$ をひきおこす。Mather [4] によれば、同型写像 $H_2(B\text{Diff}_K^r(\mathbb{R})) \rightarrow H_3(B\Gamma_1^r)$ が存在する。ここで $\text{Diff}_K^r(\mathbb{R})$ はある有界区間をのぞいて恒等写像であるような C^r -diffeomorphism のなす群である。 $\mathbb{R}$ を S' の 1つの開区間とみなすことにより、準同型 $H_2(\text{Diff}_K^r(\mathbb{R})) \rightarrow H_2(\text{Diff}_+^r(S'))$ を得、次の図式は可換である

$$\begin{array}{ccc}
 H_2(\text{Diff}_K^r(\mathbb{R})) \cong H_2(B\text{Diff}_K^r(\mathbb{R})) & & \\
 \downarrow & \searrow & \\
 & & H_3(B\Gamma_1^r) \\
 H_2(\text{Diff}_+^r(S')) \cong H_2(B\text{Diff}_+^r(S')^\delta) & \nearrow &
 \end{array}$$

このことから、 $H_2(\text{Diff}_+^r(S')) \rightarrow H_3(B\Gamma_1^r)$ は全射である。
 Godbillon-Vey 準同型は $H_2(\text{Diff}_+^r(S'))$ ($r \geq 2$) からの写像と考えられる。 $B\text{Diff}_+^r(S')^\delta$ の 2-cycle がある 3-chain の boundary であれば、この 2-cycle 上で Godbillon-Vey は 0 である。これは、ほぼ、foliated S' -bundle としての zero への cobordism を構成していることによっている。

我々は問題を次のような holonomy 準同型の拡張の問題と考える：

準同型 $\varphi: \pi_1(T^2, *) \rightarrow \text{Diff}_+^r(S')$ が与えられた時、
 $T^2 = \partial W^3$ とする 3次元多様体 W と、準同型 $\tilde{\varphi}: \pi_1(W, *) \rightarrow \text{Diff}_+^r(S')$ で次が可換になるものを構成せよ。

$$\begin{array}{ccc}
 \pi_1(T^2, *) & \xrightarrow{\varphi} & \text{Diff}_+^r(S') \\
 \downarrow \wr & \nearrow \tilde{\varphi} & \\
 \pi_1(W^3, *) & &
 \end{array}
 \quad \left(\text{但し、} * \in T^2 = \partial W^3 \xrightarrow{\wr} W^3 \right)$$

このとき、 T^2 と φ で代表される $B\text{Diff}_+^r(S')$ の 2-cycle は homologous to zero である。

群 G の homology は次の complex の homology として定義される。

$$0 \leftarrow \mathbb{Z} \xleftarrow{\partial} \mathbb{Z}[G] \xleftarrow{\partial} \mathbb{Z}[G \times G] \xleftarrow{\partial} \mathbb{Z}[G \times G \times G] \xleftarrow{\partial} \cdots$$

$(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{Z}[G^n]$ のとき

$$\partial(t_1, \dots, t_n) = (t_2, \dots, t_n) + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i (t_1, \dots, t_i t_{i+1}, \dots, t_n) + (-1)^n (t_1, \dots, t_{n-1})$$

$(t) \in \mathbb{Z}[G]$ のとき $\partial(t) = 0$

$t_1, t_2 \in G$ に対し、 $t_1 t_2 = t_2 t_1$ ならば $(t_1, t_2) - (t_2, t_1)$ は 2-cycle である。 $\pi_1(T, *)$ の oriented な生成元を α, β とするとき、準同形 $\varphi: \pi_1(T, *) \rightarrow \text{Diff}_+^r(S^1)$ は $H_2(B\text{Diff}_+^r(S^1)^{\delta}) = H_2(\text{Diff}_+^r(S^1))$ の $(\varphi_\alpha, \varphi_\beta) - (\varphi_\beta, \varphi_\alpha)$ の class を代表する。我々はこの class を $\{\varphi_\alpha, \varphi_\beta\}$ と書く。

我々の定理、補題は、ある条件の下で $\{\varphi_\alpha, \varphi_\beta\} = 0$ を主張する。これは原理的にはある 3-chain で $\text{boundary} = (\varphi_\alpha, \varphi_\beta) - (\varphi_\beta, \varphi_\alpha)$ となるものを構成することであるが、直接 3-chain をつくるのは容易ではない。最初に基本的な補題を述べ、後に定理を述べる。

2. 次に述べる補題は、しばしば使われる。内容は foliated bundle としての cobordism を作る操作と結びついている。

補題 1 $f, g, h \in \text{Diff}_+^r(S^1) [\text{Diff}_K^r(\mathbb{R})]$, $f \circ g = g \circ f$ とする。
このとき、 $\{f^m, g^n\} = mn \{f, g\}$ ($m, n \in \mathbb{Z}$)。

$$\{h \circ f \circ h^{-1}, h \circ g \circ h^{-1}\} = \{f, g\}.$$

補題2 $f, g, g_1, g_2, \dots, g_n \in \text{Diff}_+^r(S') [\text{Diff}_k^r(\mathbb{R})]$,
 $f \circ g = g \circ f$, $g = g_1 \circ g_2 \circ \dots \circ g_n$, $f \circ g_i = g_i \circ f$ ($i=1, \dots, n$) とす。
 このとき、 $\{f, g\} = \{f, g_1\} + \{f, g_2\} + \dots + \{f, g_n\}$,
 $\{g, f\} = \{g_1, f\} + \{g_2, f\} + \dots + \{g_n, f\}$.

証明 D^2 内に disjoint な n 個の円板 $D_1, \dots, D_n$ をとり。
 $(D^2 - \bigcup_{i=1}^n D_i) \times S'$ 上の foliated S' - $(\mathbb{R}-)$ bundle を考えればよい。

$f \in \text{Diff}_+^r(S') [\text{Diff}_k^r(\mathbb{R})]$ に対し、 $\text{Supp } f = \overline{\{x \mid f(x) \neq x\}}$ とする。

補題3 $f, g \in \text{Diff}_+^\infty(S') [\text{Diff}_k^\infty(\mathbb{R})]$ に対し、どの2つ
 も内点を共有しない有限個の閉区間 $I_1, \dots, I_s, J_1, \dots, J_t$ が
 ある、 $\text{Supp } f \subset \bigcup_{i=1}^s I_i$, $\text{Supp } g \subset \bigcup_{j=1}^t J_j$ とする。このとき $f \circ g = g \circ f$ で、
 $\{f, g\} = 0$ 。

証明 Sergeraent [12] により、 $H_1(\text{Diff}_\infty^\infty[0,1]) = 0$ である。
 ここで、 $\text{Diff}_\infty^\infty[0,1] = \{f \in \text{Diff}^\infty[0,1] \mid f \circ f = f \circ \text{id}, f_1 f = f_1 \circ \text{id}\}$,
 f_P^k は点 P における k -jet を表わす ($k=0, 1, \dots, \infty$)。ゆえに、 $g =$
 $[h_1, h_2][h_3, h_4] \dots [h_{2g-1}, h_{2g}]$, ここで $h_i \in \text{Diff}_+^r(S') [\text{Diff}_k^r(\mathbb{R})]$,
 $\text{Supp } h_i \subset \bigcup_{j=1}^t J_j$ ($i=1, \dots, 2g$) と書ける。 Σ_g を genus g の closed
 oriented 2-manifold, D^2 をその上の円板として、 $S' \times (\Sigma_g - \text{Int } D^2)$
 上の foliated S' - $(\mathbb{R}-)$ bundle を考えればよい。

注意 $f, g \in \text{Diff}_+^r(S') [\text{Diff}_K^r(\mathbb{R})]$ のときは $\text{Supp } f \subset \bigcup_{i=1}^s I_i$, $\text{Supp } g \subset \bigcup_{j=1}^s I_{\pi(j)}$ を仮定すれば, $\{f, g\} = 0$ である。証明は Mather [5] により $H_1(\text{Diff}_K^r(\mathbb{R})) = 0$ であることを用いて同様。

補題4 準同型 $\varphi: \pi_1(T^2, *) \rightarrow \text{Diff}_+^r(S') [\text{Diff}_K^r(\mathbb{R})]$, に対し, $\pi_1(T^2, *)$ の2組の oriented 生成元 $\alpha, \beta; \alpha', \beta'$ について $\{\varphi_\alpha, \varphi_\beta\} = \{\varphi_{\alpha'}, \varphi_{\beta'}\}$.

補題5 $f, g \in \text{Diff}_+^r(S') [\text{Diff}_K^r(\mathbb{R})]$, $f \circ g = g \circ f$, $(m, n) = 1$ となる整数 m, n に対し $f^m g^n = \text{id}$ とする。このとき, $\{f, g\} = 0$.

3. S' の微分同相、区間の微分同相について 次の補題を使う。ともに固定点のまわりの状況を記述するものである。

補題6 $f, g \in \text{Diff}_+^r(S') (r \geq 2)$, f, g はともに固定点を持ち, $f \circ g = g \circ f$ とする。 $[a, b]$ を S' 内の区間とし, $g(a) = a, g(b) = b$, g は (a, b) に固定点を持たず, $f|_{[a, b]} \neq \text{id}|_{[a, b]}$ とする。このとき, $f(a) = a, f(b) = b$, f は (a, b) に固定点を持たない。

証明 (Kopell [3], Herman [2])

補題7 $[a, c]$ を1つの閉区間, $b \in (a, c)$ とする. $f, g \in \text{Diff}_+^\infty[a, c]$
 $f \circ g = g \circ f$ とする. $g(a) = a, g(b) = b, g(c) = c$, g は $(a, b)(b, c)$
 に固定点をもたないとする. このとき.

- i) $f(a) = a, f(b) = b, f(c) = c$.
- ii) $f \neq \text{id} \Rightarrow \max\{k \mid f_b^k f = f_b^k \text{id}\} = \max\{k \mid f_b^k g = f_b^k \text{id}\}$.
- iii) $f_b^\infty g \neq f_b^\infty \text{id}$ かつ $[a, b]$ 上で $f^m g^n = \text{id}$ ならば $[b, c]$ 上で $f^m g^n = \text{id}$.

証明 (Moussu-Proussarie [8])

4. T^2 上の foliated S' -bundle の foliation の leaf がすべて proper
 のとき、次の定理を得る。

$f \in \text{Diff}_+^\infty(S') [\text{Diff}_+^\infty(\mathbb{R})]$ に対し, $\text{Fix } f = \{x \mid f(x) = x\}$.
 $\text{Fix}^\infty f = \{p \in \text{Fix } f \mid f_p^\infty f = f_p^\infty \text{id}\}$ とする. ともに閉集合である.

$x \in S'(\mathbb{R})$ に対し, $\overline{\text{Orb}\{\varphi_\alpha, \varphi_\beta\}(x)} = \overline{\{\varphi_\alpha^m \varphi_\beta^n(x) \mid m, n \in \mathbb{Z}\}}$ とする.

定理1 $\varphi_\alpha, \varphi_\beta \in \text{Diff}_+^\infty(S')$, $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha$, $\varphi_\alpha, \varphi_\beta$ は
 固定点を持ち, $\overline{\text{Orb}\{\varphi_\alpha, \varphi_\beta\}(x)}$ は、内点をもたぬ ($\forall x \in S'$) とする.
 さらに, $\text{Fix}^\infty \varphi_\alpha \cap \text{Fix}^\infty \varphi_\beta$ の連結成分の数が有限であるとする.

このとき, $\{\varphi_\alpha, \varphi_\beta\} = 0$.

注意 $\overline{\text{Orb}\{\varphi_\alpha, \varphi_\beta\}(x)}$ が内点をもたない事は、今の場合、
 foliated bundle の fiber, $S' = \pi^{-1}(*)$ の点 x を通る leaf は proper
 leaf であることを意味している。

注意 $\text{Fix } \varphi_\alpha \cap \text{Fix } \varphi_\beta$ の元は foliation の compact closed leaf と

一対一に対応する。補題7により, この compact leaf が 2 次の接触をしているということが定義できる。 $\text{Fix}^\infty \varphi_\alpha \cap \text{Fix}^\infty \varphi_\beta$ の連結成分は 2 次の接触の compact leaf 全体の集合の連結成分に対応する。

注意 $\text{Fix}^\infty \varphi_\alpha \cap \text{Fix}^\infty \varphi_\beta$ の連結成分の数が有限でない例はある。

証明の概略 $\text{Fix}^\infty(\varphi_\alpha) \cap \text{Fix}^\infty(\varphi_\beta) \neq \emptyset$ とする。 $\text{Fix}^\infty(\varphi_\alpha) \cap \text{Fix}^\infty(\varphi_\beta)$ の各連結成分に一点ずつをとり, S' を有限個の区間 $\Delta_i (i=1, \dots, k)$ に分割する。

$S' = \bigcup_{i=1}^k \Delta_i$, Δ_i : 閉区間, $(i=1, \dots, k)$ $\text{Int} \Delta_i \cap \text{Int} \Delta_j = \emptyset (i \neq j)$.

$f_i, g_i \in \text{Diff}_+^\infty(S')$ ($i=1, \dots, k$) を次で定義する。

$$\begin{cases} f_i|_{\Delta_i} = \varphi_\alpha|_{\Delta_i} & g_i|_{\Delta_i} = \varphi_\beta|_{\Delta_i} \\ f_i|_{S'-\Delta_i} = \text{id}|_{S'-\Delta_i} & g_i|_{S'-\Delta_i} = \text{id}|_{S'-\Delta_i} \end{cases}$$

このとき, $\varphi_\beta = g_1 \circ \dots \circ g_k$, $\varphi_\alpha \circ g_i = g_i \circ \varphi_\alpha (i=1, \dots, k)$ ゆえ

補題2により, $\{\varphi_\alpha, \varphi_\beta\} = \sum_{i=1}^k \{\varphi_\alpha, g_i\}$. 各 i について,

$\varphi_\alpha = \varphi_\alpha f_i^{-1} \circ f_i$, $\varphi_\alpha f_i^{-1} \circ g_i = g_i \circ \varphi_\alpha f_i^{-1}$, $f_i \circ g_i = g_i \circ f_i$ ゆえ

$\{\varphi_\alpha, g_i\} = \{\varphi_\alpha f_i^{-1}, g_i\} + \{f_i, g_i\}$. ここで補題3により,

$\{\varphi_\alpha f_i^{-1}, g_i\} = 0$ である。

整数 m_i, n_i $(m_i, n_i)=1$ に対し, $f_i^{m_i} g_i^{n_i} = \text{id}$ をいえば, 補題

5により, $\{f_i, g_i\} = 0$ が, いえて, $\{\varphi_\alpha, \varphi_\beta\} = 0$ とする。

これは, 次のように示される。 $S' - \text{Fix} f_i$ は高々可算個の開区間の disjoint union である。 $S' - \text{Fix} f_i = \bigsqcup_\lambda I_\lambda$. all leaves proper ゆえ Nishimori [9] により, 各 I_λ で 整数 m_λ, n_λ

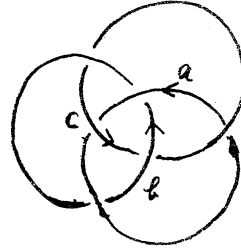
が存在し、 $f_i^{m,\lambda} \circ g_i^{n,\lambda} = \text{id}$ である。ところが、補題 6.7 と Δ_i の定義により、 $\text{Int Supp } f_i \cap \text{Fix}^\infty f_i = \emptyset$ が示されることから、 m,λ, n,λ は λ によらず一定である。 $f_i^{m,\lambda} \circ g_i^{n,\lambda} = \text{id}$ 、 $\text{Fix}^\infty \varphi_\alpha \cap \text{Fix}^\infty \varphi_\beta = \emptyset$ のときも、同様にして、整数 m, n ($m, n = 1$ に対し、 $\varphi_\alpha^m \circ \varphi_\beta^n = \text{id}$ となり、 $\{\varphi_\alpha, \varphi_\beta\} = 0$ を得る。

5. 定理 1 は Mather [5], Sergeraert [9] の微分同相の群の $H_1 = 0$ という結果によっている。 T^2 上の foliated S^2 -bundle が dense leaf を持つ場合は、本質的に $H_2(\text{Diff}_+^r(S^1))$ の問題となる。 $T^2 = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$ のとき、 $H_1(T^2) \rightarrow H_1(W^3)$ は単射にはならない。cobordism は $\pi_1(W, *)$ の非可換性により得られる。定理 2.3, 4 では dense leaf を持つ場合を扱う。定理 2.3 では次の補題を使う。

補題 8 Σ を S^1 上の C^∞ -vector 場とする。 Σ の time t map を f_t と書く。 $t \geq 2$ に対し $t = k + \frac{1}{k}$ とする k をとる。任意の実数 s に対し、 $g f_s g^{-1} = f_{ks}$ とする $g \in \text{Diff}_+^r(S^1)$ が存在したとする。このとき、 $H_2(\text{Diff}_+^r(S^1))$ の元として、 $\{f_1, f_t\} = 0$ 。

証明 補題 1 により、 $\{f_1, f_{\frac{1}{k}}\} = \{g f_1 g^{-1}, g f_{\frac{1}{k}} g^{-1}\} = \{f_k, f_1\} = -\{f_1, f_k\}$ 。ゆえに $\{f_1, f_t\} = \{f_1, f_{k+\frac{1}{k}}\} = \{f_1, f_k\} + \{f_1, f_{\frac{1}{k}}\} = 0$ 。

注意 これを実現する cobordism. W . $\partial W = T^2$ は, Borromean rings の管状近傍の補集合 V を使って構成できる。 $\pi_1(V, *)$ の meridian をまわる元を a, b, c , longitude をまわる元を A, B, C とするとき,



$$\pi_1(V, *) = \langle a, b, c, A, B, C : c b^{-1} c^{-1} b = A, a c^{-1} a^{-1} c = B, b a^{-1} b^{-1} a = C, a A = A a, b B = B b, c C = C c \rangle$$

と書かれる。準同型 $\varphi: \pi_1(V, *) \rightarrow \text{Diff}_+^r(S^1)$ を考えると,

$$\langle \varphi_a, \varphi_A \rangle + \langle \varphi_b, \varphi_B \rangle + \langle \varphi_c, \varphi_C \rangle = 0 \text{ を得る。仮定により,}$$

$$\varphi_a = f, \varphi_A = f_{t_2}, \varphi_b = g, \varphi_B = \text{id}, \varphi_c = f_{t_1}, \varphi_C = f_{t_1} \text{ とする}$$

ような φ は well defined. b, B, c, C のところには $D^2 \times S^1$ を適当にはめこめば求める W を得る。

6. 次の定理は T^2 上の C^∞ -foliated S^1 -bundle で, compact leaf を持ち, ∞ 回の接触をする compact leaf がない場合を扱う。

定理 2. $\varphi_\alpha, \varphi_\beta \in \text{Diff}_+^\infty(S^1)$, $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha$, $\varphi_\alpha, \varphi_\beta$ はともに固定点をもつとする。ある自然数 r があって, 各固定点 p について $r \leq \max\{1; j_p^1 \varphi_\alpha = j_p^1 \varphi_\beta\} < \infty$ とする。このとき, $H_2(\text{Diff}_+^r(S^1))$ の元として $\langle \varphi_\alpha, \varphi_\beta \rangle = 0$ 。

証明の概略 $\text{Fix } \varphi_\alpha = \text{Fix } \varphi_\beta$ で, 固定点は有限個である。

Moussu-Roussarie [8] により, (補題 7 に注意すると), $\varphi_\alpha, \varphi_\beta$ で

生成される $\text{Diff}^r(S')$ の部分群は $\mathbb{Z}$ または $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ に同型なアルキメデスの順序群となる。 $\mathbb{Z}$ に同型の場合は $(m, n) = 1$ とする整数 m, n で $\varphi_\alpha^m \cdot \varphi_\beta^n = \text{id}$ とするものがあり補題5により $\varphi_\alpha, \varphi_\beta \neq \text{id}$ である。 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ に同型の場合は部分群による固定点以外の点の orbit は locally dense になり、任意の実数 s に対し φ_α^s が定義できる。このとき、 $\varphi_\alpha, \varphi_\beta$ はある C^∞ -vector 場 ξ の time 1 map f_1 , time t map f_t になっていることが次のようにして示される。Takens [13] により、 φ_α は各固定点の近傍である C^∞ -vector 場の time one map である。このとき、実数 t があって、各固定点の近傍で φ_β は、この vector 場の time t map である。 a, b を固定点とし、 (a, b) に固定点はないとする。 a, b の近傍で定義された vector 場を $\varphi_\alpha, \varphi_\beta$ により、 $[a, b), (a, b]$ に拡張したものを ξ_a, ξ_b とする。 $c \in (a, b)$ をとり、 $G_a(x) = \int_c^x \frac{dx}{\xi_a(x)}$, $G_b(x) = \int_c^x \frac{dx}{\xi_b(x)}$ と定義すると、すべての実数 s に対し、 $G_a(\varphi_\alpha^s(c)) - G_a(c) = s$, $G_b(\varphi_\beta^s(c)) - G_b(c) = s$. $G_a(c) = G_b(c) = 0$ ゆえ、 (a, b) で $G_a = G_b$. ゆえに (a, b) で $\xi_a = \xi_b$. こうして、 $\varphi_\alpha, \varphi_\beta$ は C^∞ -vector 場 ξ の time 1 map time t map である。

補題4により、 $t \in \mathbb{Z}$ としてよい。補題8の仮定をみたす $g \in \text{Diff}_+^r(S')$ を構成する。前のような区間 (a, b) , $c \in (a, b)$ をとる。 $[a, b]$ において g を $\eta(x) = \xi(x) \cdot \int_c^x \frac{dx}{\xi(x)}$ という vector 場の time log k map とすると、任意の実数 s に対し、 $g \circ f_s \circ g^{-1} = f_{ks}$

をみる。 $k + \frac{1}{k} = t$ とする。 Takens [13] の normal form を用いて計算すると、 $\chi(x)$ は $[a, b]$ で C^r -vector field である。 さらに、各区間で定義された g は、各固定点において、少なくとも r -jet まで一致し、 $g \in \text{Diff}_+^r(S')$ であることがわかる。 こうして、補題 8 を使って 定理 2 を得る。

7. 次の定理は holonomy が $\text{PGL}(1) = \text{SL}(2, \mathbb{R}) / \mathbb{Z}_2$ に属する時のものである。 この定理が最初に示された。

$\text{PGL}(1) = \text{SL}(2, \mathbb{R}) / \mathbb{Z}_2$ の S^1 への作用を $S' = \mathbb{R}P^1$ と考えた時の作用とする。 $\varphi_\alpha, \varphi_\beta \in \text{PGL}(1)$, $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha$ のとき、 $(\varphi_\alpha, \varphi_\beta)$ を標準型にしておくと、 $(\varphi_\alpha, \varphi_\beta) \sim \left(\begin{pmatrix} c & s \\ s & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c' & s' \\ s' & c' \end{pmatrix} \right)$
 $(c^2 + s^2 = 1, c'^2 + s'^2 = 1, c, s, c', s' \in \mathbb{R})$, $(\varphi_\alpha, \varphi_\beta) \sim \left(\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & a' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$
 $(a \in \mathbb{R})$, 又は $(\varphi_\alpha, \varphi_\beta) \sim \left(\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & \frac{1}{u} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & \frac{1}{v} \end{pmatrix} \right) (u, v \in \mathbb{R}^+)$ とする。
 順に elliptic, parabolic, hyperbolic と呼ぶ。 このとき、

定理 3 i) $(\varphi_\alpha, \varphi_\beta)$ が parabolic ならば、 $H_2(\text{PGL}(1))$ の元として $\{\varphi_\alpha, \varphi_\beta\} = 0$ 。

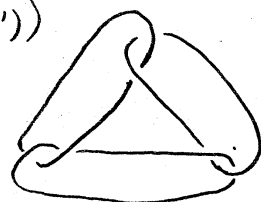
ii) $(\varphi_\alpha, \varphi_\beta)$ によって定義される foliation は C^∞ -foliation として, cobordant to zero.

証明の概略 i) は $\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ という Lie 環の元で表わされる vector field の time t map であることと、関係式 $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x^2 t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とにより補題 8 から得られる。

ii) elliptic ならば closed form で定義されるから $D^2 \times S^1 \times S^1$ の foliation に拡張される。($T^3 = \partial(D^2 \times S^1 \times S^1)$)

hyperbolic なものは右の link の管状

近傍の補集合をつかって、2つの elliptic



なもの之和と homologous であることが示される。(補題8の注意)

注意 elliptic hyperbolic な場合 $H_2(PGL(1))$ の元として0かどうかは未解決である。

8. Vector 場の time 1 map, time t map で表わされる $H_2(Diff_k^r(\mathbb{R}))$ の元については次の定理が得られる。 S^1 のある区間で0であるような vector 場の time 1 map, time t map についても同様のことが成立する。

定理4 ξ を $\mathbb{R}$ 上の compact support C^r -vector field ($r=1, \dots, \infty$) とする。これの time s map を f_s と書く。 t を2次の無理数とすると、 $\{f_1, f_t\}$ は $H_2(Diff_k^r(\mathbb{R}))$ の元として0である。

証明の概略 ξ は $[\frac{1}{2}, 1]$ の内部に support をもつとしてよい。 $\mathbb{R}$ の compact support C^∞ vector field η で $\eta(x) = -\frac{1}{x^2}$ ($x \in [0, 1]$) とするものを1つ固定する。 $\eta(x)$ の time one map を g とする。 $g^m([\frac{1}{2}, 1]) = [\frac{1}{m+2}, \frac{1}{m+1}]$ である。 $|t| < 1$ に対し、 $\mathbb{R}$ 上の vector field ζ を次で定める。

$$\zeta = \begin{cases} (-\infty, 0], [1, \infty) & \text{で } \zeta = 0 \\ [\frac{1}{m+2}, \frac{1}{m+1}] & \text{で } \zeta = g_*^m(t^m \xi) \quad m=0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

$\mathcal{C}$ は compact support C^∞ -vector 場になる。 $\mathcal{C}$ の time s map を F_s とする。このとき $g F_t g^{-1} = F_{\frac{1}{t}} f_{-\frac{1}{t}}$, $g^{-1} F_t g = F_t g^{-1} f g$ とする。

上の F を使って $t + \frac{1}{t} \in \mathbb{Q}$ のとき $\{f_t, f_t\} = 0$ を示す。

$\{f_t, f_{t+\frac{1}{t}}\} = 0$ ゆえ $|t| < 1$ としてよい。補題 2 により

$$\{F_t, g^{-1} F_t g\} = \{g F_t g^{-1}, F_t\}. \text{ ゆえに}$$

$$\{F_t, F_t g^{-1} f g\} = \{F_{\frac{1}{t}} f_{-\frac{1}{t}}, F_t\} = 0. \text{ 補題 2 により.}$$

$$\{F_t, F_t\} + \{F_t, g^{-1} f g\} = \{F_{\frac{1}{t}}, F_t\} - \{f_{-\frac{1}{t}}, f_t\} - \{f_{-\frac{1}{t}}, F_t f_t^{-1}\} = 0$$

補題 3 と注意により, $\{F_t, g^{-1} f g\} = 0$, $\{f_{-\frac{1}{t}}, F_t f_t^{-1}\} = 0$.

残った項をまとめると $\{F_t, F_{t+\frac{1}{t}}\} = \{f_{-\frac{1}{t}}, f_t\}$. $t + \frac{1}{t} \in \mathbb{Q}$ の

とき、補題 5 により $\{F_t, F_{t+\frac{1}{t}}\} = 0$. ゆえに

$$\{f_t, f_t\} = \{f_t, f_{t+\frac{1}{t}}\} - \{f_t, f_{\frac{1}{t}}\} = -\{f_t, f_{\frac{1}{t}}\} = \{f_{\frac{1}{t}}, f_t\} = -\{f_{\frac{1}{t}}, f_t\} = 0.$$

t を一般の 2 次の無理数 $t = \frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} \sqrt{m}$ ($p_1, p_2, q_1, q_2, m \in \mathbb{Z}$, $m \geq 2$, $q_1 \neq 0$, $q_2 \neq 0$) とする。vector 場として $\frac{1}{2q_2} \mathcal{C}$ とし、

$s + \frac{1}{s} = \frac{2(m+1)}{m-1}$ に対して上の結果を使うと $\{f_{\frac{1}{2q_2}}, f_{\frac{1}{2q_2} \frac{(m+1+2\sqrt{m})}{m-1}}\} = 0$

を得る。 $(s = \frac{m+1+2\sqrt{m}}{m-1})$ 補題 5 により $\{f_{\frac{1}{2q_2}}, f_{\frac{1}{2q_2} \frac{m+1}{m-1}}\} = 0$

ゆえ、補題 2 により $\{f_{\frac{1}{2q_2}}, f_{\frac{\sqrt{m}}{q_2(m-1)}}\} = 0$. 補題 2 により

$2p_2 q_2 (m-1)$ 倍して $\{f_t, f_{\frac{p_2 \sqrt{m}}{q_2}}\} = 0$. 一方補題 5 により

$\{f_t, f_{\frac{p_1}{q_1}}\} = 0$ ゆえ、補題 2 により $\{f_t, f_t\} = \{f_t, f_{\frac{p_1}{q_1}}\} + \{f_t, f_{\frac{p_2 \sqrt{m}}{q_2}}\}$

$= 0$.

REFERENCES

1. K. Fukui: A remark on the foliated cobordisms of codimension-one foliated 3-manifolds, J. Math. Kyoto Univ. 18-1 (1978) 189-197.
2. M. R. Herman: The Godbillon-Vey invariant of foliations by planes of T^3 , Geometry and Topology, Rio de Janeiro, Springer Lecture Note 597 (1976) 294-307.
3. N. Kopell: Commuting diffeomorphisms, Global Analysis, Symp. Pure Math. vol. XIV; A. M. S. (1970) 165-184.
4. J. N. Mather: Integrability in codimension 1, Comm. Math. Helv. 48 (1973) 195-233.
5. J. N. Mather: Commutators of Diffeomorphisms, Comm. Math. Helv. 49 (1974) 512-528.
6. T. Mizutani: Foliated cobordisms of S^3 and examples of foliated 4-manifolds, Topology vol. 13 (1974) 353-362.
7. S. Morita and T. Tsuboi: The Godbillon-Vey class of codimension one foliations without holonomy, to appear.
8. R. Moussu et R. Roussarie: Relations de conjugaison et de cobordisme entre certains feuilletages, I. H. E. S. Publ. Math. 43 (1974) 143-168.
9. T. Nishimori: Compact leaves with abelian holonomy, Tohoku Math. J. 27 (1975) 259-272.

10. T. Nishimori: SRH-decompositions of codimension-one foliations and the Godbillon-Vey class, to appear.
11. G. Oshikiri: The surgery of codimension-one foliations, to appear.
12. F. Sergeraert: Feuilletages et difféomorphismes infiniment tangents à l'identité, Inventiones math. 39 (1977) 253-275.
13. F. Takens: Normal forms for certain singularities of vector-fields, Ann. Inst. Fourier 23,2 (1973) 163-195.
14. W. Thurston: Non-cobordant foliations of S^3 , Bull. A. M. S. 78 (1972) 511-514.
15. W. Thurston: Existence of codimension-one foliations, Ann. of Math. 104 (1976) 249-268.
16. J. Wood: Bundles with totally disconnected structure group, Comm. Math. Helv. 46 (1971) 257-273.