

Vector bundle の integrable connection と Chern classes

千葉大 理 大槻 真

複素多様体上の正則ベクトル束 E に, 高々 1 位の対数的極をもつ積分可能な有理型接続が与えられた時, その留数と E の Chern class との間の関係を調べる.

§1. 記号と道具

M は m -dim. complex manifold, $Z \subset M$ の codim. 1 の anal. set で次の性質をもつものとする:

- (H.1) Z の特異点は高々 normal crossing のみ,
- (H.2) Z の各既約成分は滑らかである.

このとき, Z に高々 1 位の対数的極をもつ mero. 1-forms の層 $\Omega_M^1 \langle Z \rangle$ が定義される (Deligne [3]).

E は M 上の rank r の正則ベクトル束とし, E に mero. connection ∇ with simple log. poles along Z が与えられたとする. 即ち $\Gamma(E)$ は E の hol. section の層として

$$\nabla: \Gamma(E) \rightarrow \Omega_M^1 \langle Z \rangle \otimes_{\mathcal{O}_M} \Gamma(E)$$

For $\mathbb{C}$ -linear map τ ,

$$\nabla(fs) = df \cdot s + f \nabla(s) \quad f \in \mathcal{O}_M, s \in \Gamma(E)$$

を満たすものであり、以下 connection ∇ は積分可能、即ち

$$\nabla^2 = \nabla \circ \nabla: \Gamma(E) \rightarrow \Omega_M^2 \langle Z \rangle \otimes \Gamma(E)$$

は zero map でありと仮定する。

$Z_j, j=1, 2, \dots, N$, は Z の既約成分とし, $P = \{1, \dots, p\}$ に対し, $Z_P = \bigcap_{j \in P} Z_j$ とおく. Z_P は M の codim. p の submfd.

$x \in Z_P$ の mbd. U に対し, local coordinate $z_1, \dots, z_m$ は

$U \cap Z_j = \{z_j = 0\}, 1 \leq j \leq p$, とはるようにとり, 更に U 上の E の hol. frame field $S = {}^t(s_1, \dots, s_f)$ に對する

∇ の接続行列を Ω とおく:

$$\nabla(s) = \Omega s.$$

Ω は U 上にて

$$(1.1) \quad \Omega = \sum_{j \in P} A_j \frac{dz_j}{z_j} + B_P$$

と表わされる. ここで A_j は hol. func. の (g, g) -行列,

B_P は, 病々 $Z_k (k \notin P)$ 上の p pole を持つ mero. 1-form の (g, g) -行列である. このとき以下の性質は容易にわかる:

$$(1.1.1) \quad \text{Res}_{z_j} \Omega := A_j|_{z_j}$$

は Ω の表示 (1.1) に依らずに frame S のみに依り,

$\Gamma(Z_j, \mathcal{O}(\text{End } E|_{Z_j}))$ の元と与える. ... ∇ の Z_j 上の留数

$$(1.2) \quad [\text{Res}_{z_j} \Omega, \text{Res}_{z_k} \Omega] = 0 \quad \text{on } Z_{jk} = Z_j \cap Z_k.$$

$$(1.3) \quad \beta_P := B_P|_{Z_P}$$

とおくと, β_P は Z_P 上で, 高々 Z_k ($k \neq P$) にのみ pole をもつ mere. 1-form の (g.g.)-行列であり, ∇ の積分可能性から次のことが分かる:

$$(1.3.1) \quad \nabla^{(\beta_P)} \text{Res}_{Z_j} \Omega := d \text{Res}_{Z_j} \Omega - \beta_P \cdot \text{Res}_{Z_j} \Omega + \text{Res}_{Z_j} \Omega \cdot \beta_P = 0 \quad \text{for } j \in P.$$

$$(1.3.2) \quad d\beta_P - \beta_P \wedge \beta_P = 0.$$

β_P は $E|_{Z_P}$ の connection である (Z_j の defining fun. のとり方に依る) が, この β_P から $E|_{Z_P}$ の connection が次のようにして構成できる:

divisor Z_j の定める line bundle $\mathcal{O}([Z_j])$, $[Z_j]$ の C^∞ -metrical connection を ∇_j とする. $U_\pm$ での $[Z_j]$ の frame z_j に関して

$$(1.4) \quad \nabla_j(z_j) = \Gamma_j \cdot z_j$$

とする (Γ_j は $U_\pm$ の $C^\infty(1,0)$ -form). さて

$$(1.5) \quad \tilde{\beta}_P := \beta_P - \sum_{j \in P} \text{Res}_{Z_j} \Omega \cdot \Gamma_j|_{Z_P}$$

とおくと, $\tilde{\beta}_P$ は Z_j の defining fun. のとり方に依らずに決まり, $E|_{Z_P}$ の connection を与えることは, 容易な計算で確かめられる.

$\tilde{\beta}_P$ は次の性質をもつ:

$$(1.5.1) \quad \nabla^{(\tilde{\beta}_P)} \text{Res}_{Z_j} \Omega = 0 \quad j \in P$$

$$(1.5.2) \quad d\tilde{\beta}_P - \tilde{\beta}_P \wedge \tilde{\beta}_P = - \sum_{j \in P} \text{Res}_{Z_j} \Omega \cdot \partial \Gamma_j|_{Z_P}.$$

ここで, Γ_j は $[Z_j]$ の metrical connection であつたから, $d\Gamma_j = \bar{\partial}\Gamma_j$ であり, $\bar{\partial}\Gamma_j|_{Z_P}$ は $[Z_j]|_{Z_P}$ の curvature form に等しい。

§2. Chern class の計算

$\phi(A_1, \dots, A_k)$ は, $A_j \in \mathfrak{gl}(q, \mathbb{C})$ 変数とする invariant symmetric multilinear form とする. E の C^∞ -metrical connection Γ , その curvature $R = d\Gamma - \Gamma \wedge \Gamma = \bar{\partial}\Gamma$ に対して

$$\frac{1}{(2\pi i)^k} \phi(R, \dots, R)$$

は, type (k, k) の Dolbeault cohomology group $H^{k,k}(M)$ の元を定める. これを $\phi(E)$ とかく. 又, M の codim. k の submanifold W の定める $H^{k,k}(M)$ の元を $C_k(W)$ とかく. (特に $k=1$ ならば $C_1(W) = -C_1([W])$).

$J = \{j_1, \dots, j_k\} \in [1, N]^k$ に対して, $j_1, \dots, j_k$ のうち相異なるものを $j_1^*, \dots, j_r^*$ とし, j_λ^* が J 内に現われる個数を δ_λ とする.

$Z_J = \bigcap_{j \in J} Z_j = \bigcap_{\lambda=1}^r Z_{j_\lambda^*}$ は M の codim. p の submfd. であり, その連結成分を $Z_J^{(v)}$ とすると,

§1, (1.5.1) より, $\phi(\text{Res}_{Z_{j_1}} \Omega, \dots, \text{Res}_{Z_{j_k}} \Omega)$ は $Z_J^{(v)}$ 上で constant である. この値を

$\phi(R_{\alpha_{2j_1}}\Omega, \dots, R_{\alpha_{2j_k}}\Omega)^{(u)}$ と記す. 次の定理が成立:

Thm. 1 M, Z, E, ∇ は §1 の通りとする. k -変数の inv. sym. form ϕ に対して,

$$\phi(E) = \sum_{j \in [1, N]^k} \left\{ \sum_{\nu} \phi(R_{\alpha_{2j_1}}\Omega, \dots, R_{\alpha_{2j_k}}\Omega)^{(\nu)} c_{\nu}(Z_j^{(u)}) \right\} \prod_{\lambda=1}^p c_{\lambda}(Z_{j_{\lambda}}^*)^{\delta_{\lambda}-1}$$

が $H^{k,k}(M)$ 内で成立する.

(証明) $k=2$ でも. 一般の場合も同じである.

$$L = \Omega - \Gamma$$

とすると, L は type $(1,0)$ の (Γ は metrical connection!)

$$(2.1) \quad \bar{\partial}L = -\bar{\partial}\Gamma = -R \quad \text{on } M-Z$$

$$(2.2) \quad R_{\alpha_{2j}}L = R_{\alpha_{2j}}\Omega.$$

$\phi(R) = \phi(R, R)$ は M 上の $\bar{\partial}$ -closed $(2,2)$ -form であるが, これは $\Gamma_c(M, \Sigma^{m-2, m-2})$ (M 上の compact support をもつ $C^{\infty}(m-2, m-2)$ -forms の全体) 上の current とみれば計算する.

$$\varphi \in \Gamma_c(M, \Sigma^{m-2, m-2}) \quad \text{とる.}$$

$$(*) \quad \phi(R)[\varphi] = \int_M \phi(R, R) \wedge \varphi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{M_{\varepsilon}} \phi(R, R) \wedge \varphi$$

ここで, M_{ε} は Z の適当な ε -tubular nbd. Z_{ε} の complement: $M_{\varepsilon} = M - Z_{\varepsilon}$.

$$\begin{aligned}
\Phi &= \lim \int_{M_\varepsilon} \phi(-\bar{\partial}L, R) \wedge \varphi \\
&= -\lim \int_{M_\varepsilon} \bar{\partial} \phi(L, R) \wedge \varphi \quad (\because \bar{\partial}R=0) \\
&= -\lim \int_{M_\varepsilon} \bar{\partial} \{ \phi(L, R) \wedge \varphi \} + \lim \int_{M_\varepsilon} \phi(L, R) \wedge \bar{\partial} \varphi \\
&\because \varphi \in \Gamma_c(M, \Sigma^{m-2, m-1}) \quad \text{よって},
\end{aligned}$$

$$T[\varphi] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{M_\varepsilon} \phi(L, R) \wedge \varphi$$

と仮定し、これは Cauchy の主値積分であり、 T は well-defined な current である。従って

$$\begin{aligned}
\Phi &= -\lim \int_{M_\varepsilon} \bar{\partial} \{ \phi(L, R) \wedge \varphi \} + \bar{\partial} T[\varphi] \\
&= -\lim \int_{M_\varepsilon} d \{ \phi(L, R) \wedge \varphi \} + \bar{\partial} T[\varphi] \\
&= -\lim \int_{\partial M_\varepsilon} \phi(L, R) \wedge \varphi + \bar{\partial} T[\varphi] \\
&= \lim \int_{\partial Z_\varepsilon} \phi(L, R) \wedge \varphi + \bar{\partial} T[\varphi] \\
&= 2\pi i \sum_{j=1}^N \int_{Z_j} \text{Res} \phi(L, R) \wedge \varphi + \bar{\partial} T[\varphi] \\
&= 2\pi i \sum_{j=1}^N \int_{Z_j} \phi(R_{\infty Z_j}, R) \wedge \varphi + \bar{\partial} T[\varphi].
\end{aligned}$$

更に、この式の第1項を変形すると、

$$L_j = \tilde{\beta}_j - \Gamma|_{Z_j}$$

と書く。 ($\tilde{\beta}_j = \tilde{\beta}_{s_j}$)

L_j は次をみたす:

$$(2.3) \quad \bar{\partial} L_j = -\text{Res}_{z_j} \Omega \cdot \bar{\partial} \Gamma_j - R \quad \text{on } Z_j - \bigcup_{k \neq j} Z_k$$

$$(2.4) \quad \text{Res}_{z_k} L_j = \text{Res}_{z_k} \Omega \big|_{Z_j} \quad \text{for } k \neq j.$$

さて, 前項と同様に $Z_{j,\varepsilon}$ を, $Z_j \cap (\bigcup_{k \neq j} Z_k)$ の Z_j 内での ε -tubular nbd. とすると,

$$\odot \int_{Z_j} \phi(\text{Res}_{z_j} \Omega, R) \wedge \varphi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{Z_{j,\varepsilon}} \phi(\text{Res}_{z_j} \Omega, R) \wedge \varphi$$

$$= -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{Z_{j,\varepsilon}} \phi(\text{Res}_{z_j} \Omega, \bar{\partial} L_j) \wedge \varphi$$

$$= -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{Z_{j,\varepsilon}} \phi(\text{Res}_{z_j} \Omega, \text{Res}_{z_j} \Omega \cdot \bar{\partial} \Gamma_j) \wedge \varphi$$

$$= 2\pi i \sum_{k \neq j} \int_{Z_j \cap Z_k} \phi(\text{Res}_{z_j} \Omega, \text{Res}_{z_k} \Omega) \varphi$$

$$= \int_{Z_j} \phi(\text{Res}_{z_j} \Omega, \text{Res}_{z_j} \Omega) \bar{\partial} \Gamma_j \wedge \varphi + \{\bar{\partial}\text{-exact term}\}$$

$$= 2\pi i \sum_{j \neq k} \sum_{\nu} \phi(\text{Res}_{z_j} \Omega, \text{Res}_{z_k} \Omega)^{(\nu)} \int_{(Z_j \cap Z_k)^\nu} \varphi$$

$$= \phi(\text{Res}_{z_j} \Omega) \int_{Z_j} \bar{\partial} \Gamma_j \wedge \varphi + \{\bar{\partial}\text{-exact term}\}$$

$$= 2\pi i \sum_{j \neq k} \sum_{\nu} \phi(\text{Res}_{z_j} \Omega, \text{Res}_{z_k} \Omega)^{(\nu)} C_2((Z_j \cap Z_k)^\nu) [\varphi]$$

$$+ 2\pi i \phi(\text{Res}_{z_j} \Omega) C_1(Z_j)^2 [\varphi] + \{\bar{\partial}\text{-exact term}\}.$$

$$(\because C_1(Z_j) \sim -\frac{1}{2\pi i} \bar{\partial} \Gamma_j)$$

以上より $H^{3,2}(M)$ 内で

$$\phi(E) = \sum_{j \neq k} \sum_{\nu} \phi(\text{Res}_{z_j} \nabla, \text{Res}_{z_k} \nabla)^{(\nu)} c_2((z_j, z_k)^\nu) + \sum_j \phi(\text{Res}_{z_j} \Omega) c_1(z_j)^2$$

これは定理の $k=2$ の場合についている //

Remark $\phi(\text{Res}_{z_{j_1}} \nabla, \dots, \text{Res}_{z_{j_k}} \nabla)$ の値は Z_J の成分ごとに異なる値をとる可能性はあるが、実はそのような例はみつかっていない。従って次の予想を立てる:

Conjecture $\phi(\text{Res}_{z_{j_1}} \nabla, \dots, \text{Res}_{z_{j_k}} \nabla)$ は Z_J ($J = \{j_1, \dots, j_k\}$) の全ての成分の上で同一の値をとる。

この予想が正しいければ、Thm. 1 はより簡明な次の形をとる。

Thm. 2 (Conj. を仮定して)。

$$\phi(E) = \sum_{1 \leq j_1, \dots, j_k \leq N} \phi(\text{Res}_{z_{j_1}} \nabla, \dots, \text{Res}_{z_{j_k}} \nabla) \prod_{\lambda=1}^k c_1(z_{j_\lambda}).$$

§3. Conjecture に関して

上の Conj. は次の意味で“一般に”正しい。

Thm. 3 各 j について、 $\text{Res}_{z_j} \nabla$ の任意の2つの固有値 α, β が、 $\alpha - \beta \notin \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ を満たすならば、§2の Conj. は成り立つ。

(証明の方針) $Z_j \cap Z_k$ の 2つの成分 $(Z_j \cap Z_k)^i$ $i=1,2$, 12の順で, $C_2(\text{Res}_{Z_j}\Omega, \text{Res}_{Z_k}\Omega)^{(i)}$ が等しいことをみる. 一般の場合も同様にしてやる.

$(Z_j \cap Z_k)^i \ni p^i \quad i=1,2$

とし, p^i の nbd. U^i 内に

ある $q^i \notin Z$ をとる

q^i を基点とする local fundamental groups

$\pi_1(U^i - Z_j \cap Z_k, q^i)$

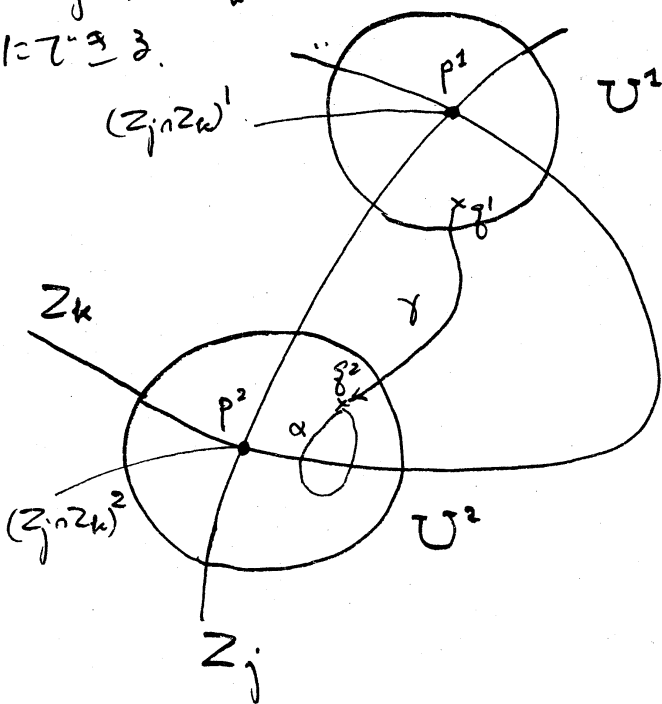
$(\cong \mathbb{Z}^2)$ は,

次の意味で役割である:

Lemma q^1 を始点, q^2 を終点とする $M-Z$ 内の適当な path γ をとり, $\alpha \in \pi_1(U^2 - Z_j \cap Z_k, q^2)$ に対して, $\gamma^{-1}\alpha\gamma$ を考えますと, これは $\pi_1(M-Z, q^1)$ の元として, $\pi_1(U^1 - Z_j \cap Z_k, q^1)$ の元と homotopic であり, かつこの対応によつて $\pi_1(U^2 - Z_j \cap Z_k, q^2)$ の generators は $\pi_1(U^1 - Z_j \cap Z_k, q^1)$ の元になる.

この Lemma の証明は略す.

ところで, ∇ によつて $M-Z$ 上に integrable な diff. equation が与えられており, その解による $\pi_1(U^i - Z_j \cap Z_k, q^i)$ の monodromy 表現が得られるが, 上の Lemma は



それらの monodromy 表現は同値であることを示している(γ₁₂沿って解を接続する)。一方 Thm. 3 の仮定は, monodromy 表現の logarithm としての residue が一意に定まるということを表わしており, 従ってその invariant としての $C_2(\text{Res}_{z_j} D, \text{Res}_{z_k} D)^i$, $i=1, 2$ は等しい //

References

1. Bott. Michigan Math. J. (1967)
2. Chern. Complex Mfds. without Potential Theory.
3. Deligne. Eq. Diff. à Points Sing. Rég.