

ある種の無限積について

東洋大・工 豊泉正男 (Masao Toyoizumi)

$\lambda > 0$ に対し $f(\lambda) = \exp(2\pi i z / \lambda) (Im(z) > 0)$ とおくとき.

$$\eta(z) = \exp(\pi i z / 12) \prod_{n=1}^{\infty} (1 - f(1)^n)$$

と

$$g(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - f(2)^{2n}) (1 + f(2)^{2n-1})^2$$

が weight $\frac{1}{2}$ の modular form であることはよく知られている。本稿では、ある種の無限積で定義された modular form を決定する。なお、証明等は、[2] を参照して下さい。

まず、 $a \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{Z} \supset \{a(n)\}_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{で} \quad a(n) = O(n^c) \quad (\exists c > 0)$$

$$\varphi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s}$$

$$\xi(s) = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{-s} \Gamma(s) \varphi(s) \zeta(s+1) \quad \text{とおく.}$$

さらに.

$$f(z) = \exp(2\pi i a z) \prod_{n=1}^{\infty} (1 - z(\lambda)^n)^{a(n)} \quad (1)$$

とあくと, $f(z)$ は上半平面で正則な函数になる。(1)の対数をと
り, Melin 変換を使えば, 次を得る.

補題 1 $k \in \mathbb{R}$ のとき.

$$(A) \quad f(-\frac{1}{z}) = (\frac{z}{\lambda})^k f(z)$$

$\Longleftrightarrow$

$$(B) \quad \xi(s) + \frac{k}{s^2} + 2\pi i \left(\frac{1}{1-s} + \frac{1}{1+s} \right) \text{ が任意の垂直な} \\ \text{帯領域で有界な正則函数で, } \xi(s) = \xi(-s)$$

条件 (B) を $\varphi(s)$ で (1) におすと.

補題 2 $k \in \mathbb{R}$ のとき.

(A) $\Longleftrightarrow$ (C) (1) $\varphi(s)$ が全平面で有理型な函数に解析
接続できる

(2) $s(s-1)\varphi(s)\zeta(s+1)$ が位数有限な整函数

(3) $\lambda^s \varphi(s) \zeta(-s) = \lambda^{-s} \varphi(-s) \zeta(s)$

(4) $\operatorname{Res}_{s=1} \varphi(s) = \frac{24a}{\lambda}$, $\varphi(0) = -k$

次に, Dirichlet 級数に関する補題を述べます.

補題3 $\operatorname{Re}(s) \gg 0$ で収束する Dirichlet 級数 $D(s) (\neq 0)$ が全平面で有限個の poles をもつ位数有限な有理型函数に解析接続でき. $\lambda^s D(s) = \lambda^{-s} D(-s)$

$\Rightarrow \lambda^2 \in \mathbb{N}$ である.

$$D(s) = \sum_{n|\lambda^2} \frac{c(n)}{n^s}, \text{ 但し } c(n) = c(\lambda^2/n) (\forall n|\lambda^2)$$

以下、次を仮定しておく.

(仮定) $\varphi(s)$ が全平面で有限個の poles をもつ. 有理型函数に解析接続でき, $\varphi(s) \neq 0$.

このとき、補題2と補題3から次がでる。

定理 $\exists k \in \mathbb{R}$ such that

$$f(-\frac{1}{z}) = \left(\frac{z}{i}\right)^k f(z) \quad (2)$$

$\Rightarrow \lambda^2 \in \mathbb{N}$ である.

$$f(z) = \exp(2\pi i a z) \prod_{m|\lambda^2} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q(\lambda)^{nm})^{c(m)} \quad (3)$$

ここで. $c(m) (m|\lambda^2) \in \mathbb{Z}$ である. $c(m) = c(\lambda^2/m) (\forall m|\lambda^2)$

$$a = \frac{\lambda}{24} \sum_{m|\lambda^2} \frac{c(m)}{m} \quad (4)$$

$$k = \frac{1}{2} \sum_{m|\lambda^2} c(m) \quad (5)$$

逆に, $\lambda^2 \in \mathbb{N}$ で, $c(m) (m|\lambda^2) \in \mathbb{Z}$, $c(m) = c(\lambda^2/m)$
 $(\forall m|\lambda^2)$ のとき, $f(z)$, a , k を (3), (4), (5) で"定めれば".
 $f(z)$ は, (2) をみたす。

系 $\lambda = 1$ で, $\exists k \in \mathbb{R}$ such that

$$f\left(-\frac{1}{z}\right) = \left(\frac{z}{\lambda}\right)^k f(z)$$

$\Rightarrow$

$$f(z) = \eta(z)^{24a}$$

これは, [1] の結果である。

[1] On certain infinite products, to appear
in Mathematika.

[2] On certain infinite products II,
preprint.