

$H^1(U^n)$ についての2,3の話

東北大理 教 田 公 三

§ 1. 序

Unit Polydisc U^n 上の Hardy class の研究は、主として A. Zygmund によって、境界近郊の挙動に因して行われた。その後 W. Rudin は一次元の時の色々な事実が $n(z)$ 変数のときどこまで成立つかを組織的に調べ、その結果をレクチャーノートとしてまとめている [3]。この小論においては彼のやり残したうちの $H^1(U^n)$ の extreme points と extremum problems について調べてみる。そのために定義をいくつか列挙する。

- U^n ; open unit polydisc $\{z=(z_1, \dots, z_n); |z_1|<1, \dots, |z_n|<1\}$
- T^n ; U^n の distinguished boundary $\{w; |w_1|= \dots = |w_n|=1\}$
- m_n ; T^n 上の正規化された Haar measure
- $H(U^n)$; U^n 上の正則函数の全体
- $N(U^n)$; $\{f \in H(U^n); \sup_{0 < r < 1} \int_{T^n} \log^+ |f(rw)| dm_n(w) < +\infty\}$
- $N_*(U^n)$; $\{f \in N(U^n); \{\log^+ |f(rw)|; 0 < r < 1\} \text{ が一様可積分な族を作る}\}$

- $H^p(U^n) ; \{f \in N_*(U^n) ; \int_{T^n} |f(rw)|^p dm_n(w) < +\infty\} \quad (0 < p \leq \infty)$
- $f^*(w) ; U^n$ 上の函数 $f(z)$ に対して $\lim_{r \rightarrow 1} f(rw) \quad (w \in T^n)$ が存在するとき, f の radial limit と呼び, $f^*(w)$ と書く。
- $P[f] ; f$ の Poisson 積分
- $u[f] ; f \in N(U^n)$ で $f \neq 0$ のとき, $\log|f|$ の 最小の n -harmonic majorant のことを $u[f]$ と書く。
- $f \in H(U^n)$ が outer であるとは, $f \in N_*(U^n)$ で $\log|f(0)| = \int_{T^n} \log|f^*(w)| dm_n(w)$ が成り立つことをい。
- $f \in H(U^n)$ が inner であるとは $f \in H^\infty(U^n)$ で $|f^*| = 1$ a.e. on T^n のことをい。

§ 2. $N_*(U^n)$ の基本的な Lemma

Lemma 1. a) $f \in N(U^n), f \neq 0$ ならば

f^* は殆んど全ての T^n 上の点に対して存在し, $\log|f^*| \in L^1(T^n)$ であり, 又, 次のような singular measure が存在する,
 $u[f] = P[\log|f^*| + d\sigma_f]$ 。

b) 次の 3) の命題は同値である。 ($f \in N(U^n)$ の下に)

(1) $f \in N_*(U^n)$

(2) $u[f] \leq P[\log|f^*|], \text{ i.e. } \sigma_f \leq 0$

(3) $\log|f| \leq P[\log|f^*|]$ 。 ([3] p. 47)

Lemma 2. $f \in N_*(U^n)$ のとき $(0 < p \leq \infty)$

$$f \in H^p(U^n) \iff |f^*|^p \in L^1(T^n). \quad ([3], p. 51)$$

Lemma 3.

$$f: \text{outer} \iff f \in N_*(U^n), \quad 1/f \in N_*(U^n).$$

§ 3. $H^1(U^n)$ ($n \geq 2$) の extreme point と outer function の関係.

まず、一次元の時のものが平行に成立する定理を述べる。

Th. 1. outer function (norm 1) は $H^1(U^n)$ の単位球 S の extreme point である。

Th. 2. $f = gh$; $g: \text{inner}$, $h \in H^1(U^n)$ と分解できるならば f は S の extreme point ではない。

Th. 1, 2 の証明は de Leeuw-Rudin [1] をたどればよい。
norm 1 の outer functions の closure (色々な位相の) について、

Th. 3. $f \in H^1(U^n)$ が norm 1 の outer functions 全体の norm-closure に属するための必要十分条件は

$$\|f\| = 1, \quad f(z) \neq 0 \quad (z \in U^n) \quad \text{である。}$$

Th. 4. $f \in H^1(U^n)$ が norm 1 の outer functions 全体の weak*-closure に属するための必要十分条件は

$$\|f\| \leq 1 \text{ で } f(z) \neq 0 (z \in U^n) \text{ が又は } f \equiv 0 \text{ である。}$$

Th. 3.4 の証明も de Leeuw-Rudin [1] も少し変更すれば容易にできる。さて Th. 1 の逆は一次元の場合は真であるが、 $n \geq 2$ のときはどうか？ が問題になると思う。しかし、それは次の例によって否定される。

Th. 5. $\frac{\pi}{4}(z_1 + z_2)$ は $H^1(U^n) (n \geq 2)$ の単位球 S の extreme point である。

この例は U^n の中で zero をもつから、勿論 outer でない。
この証明は § 5 で与える。

§ 4. $H^1(U^n)$ の extremum problem

$\phi \in L^\infty(T^n)$ のとき、 T_ϕ を次のように定義する。

$$T_\phi(f) = \int_{T^n} f^*(w) \phi(w) dm_n(w) \quad (f \in H^1(U^n)).$$

又 $S_\phi = \{f \in S; T_\phi(f) = \|T_\phi\| = \sup_{g \in S} |T_\phi(g)|\}$ とする。

S_ϕ が T_ϕ に対する extremum problem の解の集合である。

この時、一次元の時と同じように次の Lemma が成立する。

Lemma 4. $f, g \in S_\phi$

$$\Leftrightarrow \arg f^*(w) = \arg g^*(w) \quad \text{a.e. } w \in T^n \text{ かつ } \|f\| = \|g\| = 1.$$

1. したがって, もし $f \in H^1(U^n)$, $\|f\|=1$ がある S_f に属していれば $S_f = S_{1/f^*}$ と書ける。よってこのとき S^f と書くことにする。すると, 次の事実がわかる。

Th. 6. a) $f \in H^1(U^n)$, $\|f\|=1$, f outer で $1/f^* \in L^1(T^n)$

ならば S^f は f のみからなる。

b). もし S^f が f のみであれば, f は S の extreme point であり, かつ, すべての inner function $u(z)$ に対して

$$f(z)/(1-u(z))^2 \notin H^1(U^n) \quad \text{である。} \quad (n \geq 1)$$

Th. 7. $f \in H^1(U^n)$, $\|f\|=1$, f outer かつ $1/f^* \in L^p(T^n)$

($1/2 \leq p \leq 1$) ならば, $S^f - \{f\}$ は $H^0(U^n)$ ($1/p + 1/q = 2$) の元を含まない。 ($n \geq 1$)

又 Th. 6.7 の証明の方法を用いて, 次の Neuwirth-Newman の定理 (及びその n -次元への一般化) の証明を与え得る。

Th. 8. $f \in H^{1/2}(U^n)$ で, かつ $f^*(w) \geq 0$ a.e. on T^n ならば f は constant である。 ($n \geq 1$)

Th. 6 (a) は Th. 7 の特別な場合である。又, Neuwirth-Newman の定理から出発して Th. 7 を証明することもできる

が、§3 の由連も考えて、恒等の定理を使わずに §6.7 Th.7 を示す。

§5. Th.5 の証明

簡単のため $n=2$ のときを示す。(他も全く同じやり方である。)

Th.5 を示すためには、 $z_1 + z_2 = \frac{f_1(z_1, z_2) + f_2(z_1, z_2)}{2}$, $f_1, f_2 \in H^1(U^2)$, $\|f_1\| = \|f_2\| = \|z_1 + z_2\| = \frac{4}{\pi}$ と θ_1, θ_2 とき、 $f_1 = f_2 = z_1 + z_2$ が示せればよい。

上のことを示すために

$$(1) \quad \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (|f_1^*(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2})| + |f_2^*(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2})|) d\theta_1 d\theta_2 = \frac{8}{\pi}$$

であり、

$$(2) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f_1^*(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}) + f_2^*(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2})| d\theta_1 \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |2(e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2})| d\theta_1 = \frac{8}{\pi} \quad \text{a.e. } \theta_2 \in (0, 2\pi) \end{aligned}$$

である。したがって、 $m(E_1) = 1$ となる可測集合 E_1 があ、 τ

$$(3) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (|f_1^*(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2})| + |f_2^*(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2})|) d\theta_1 = \frac{8}{\pi} \quad (\theta_2 \in E_1)$$

又、 τ $m(E_2) = 1$ となる可測集合 E_2 があ、 τ

$$\lim_{r_2 \rightarrow 1} f_j(z_1, r_2 e^{i\theta_2}) = f_j(z_1, e^{i\theta_2}) \in H^1(U) \quad (j=1,2, \theta_2 \in \bar{E}_2)$$

$$\lim_{r_1 \rightarrow 1} f_j(r_1 e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}) = f_j^*(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}) \quad \text{a.e. } \theta_1 \in (0, 2\pi) \\ (\theta_2 \in \bar{E}_2, j=1,2).$$

である (A. Zygmund [4] p. 328)。

$E = E_1 \cap E_2$ とおき、

$$\|f_j(z_1, e^{i\theta_2})\|_1 = \alpha_j(\theta_2), \quad j=1,2, \theta_2 \in E \quad \text{とおく。}$$

すなわち、(3) によつて $\alpha_1(\theta_2) + \alpha_2(\theta_2) = \frac{8}{\pi}$ である。

$\chi = \pi$, $\theta_2 \in E$ を一々固定し、 $\alpha_1(\theta_2) \leq \alpha_2(\theta_2)$ と仮定して、

$$g_1(z_1) = f_1(z_1, e^{i\theta_2}) + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2\alpha_2} f_2(z_1, e^{i\theta_2})$$

$$g_2(z_1) = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2\alpha_2} f_2(z_1, e^{i\theta_2})$$

とおく。すなわち $\|g_j(z_1)\|_1 \leq \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = \frac{4}{\pi} \quad (j=1,2)$ である。

$\|z_1 + e^{i\theta_2}\|_1 = \frac{4}{\pi}$ で $z_1 + e^{i\theta_2}$ は outer function であり、一々

のとき outer function は extreme point であることに注意し

$$\text{て、} \frac{g_1(z_1) + g_2(z_1)}{2} = \frac{f_1(z_1, e^{i\theta_2}) + f_2(z_1, e^{i\theta_2})}{2} = z_1 + e^{i\theta_2} \quad \text{である。}$$

と見れば、 $g_j(z_1) = z_1 + e^{i\theta_2} \quad (j=1,2)$ でなければなら

ないことがわかる。したがって、

$$(4) \quad f_j(z_1, e^{i\theta_2}) = \frac{\pi}{4} \alpha_j(\theta_2) (z_1 + e^{i\theta_2}) \quad (j=1,2)$$

を得る。この表現は明かに $\alpha_1 > \alpha_2$ のときも成り立つ。

1 なる θ_1 と, すべて $\theta_2 \in E$ に対して成立する。さて,
 $m(E_3) = 1$ となる 次のような可測集合 E_3 と $\theta_2 \in (0, 2\pi)$ が存
 在する,

$$f_1(e^{i\theta_1}, z_2) \in H^1(U)$$

$$\begin{aligned} \text{すなわち } \lim_{r_1 \rightarrow 1} \lim_{r_2 \rightarrow 1} f_1(r_1 e^{i\theta_1}, r_2 e^{i\theta_2}) &= \lim_{r_2 \rightarrow 1} \lim_{r_1 \rightarrow 1} f_1(r_1 e^{i\theta_1}, r_2 e^{i\theta_2}) \\ &= f_1^*(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}) \quad \theta_2 \in E_3. \quad (\text{A. Zygmund (4), p. 228}) \end{aligned}$$

この事実と (4) を使えば, $\alpha_1(\theta_2)$ を U の中に正則に拡張できる。

$$f_1(e^{i\theta_1}, z_2) = \frac{\pi}{4} \alpha_1(z_2) (e^{i\theta_1} + z_2) \quad (z_2 \in U).$$

こゝで $e^{i\theta_1} + z_2$ は outer function であり, $f_1(e^{i\theta_1}, z_2) \in H^1(U)$
 だから, $\alpha_1(z_2) \in N_+(U)$ である。又 $0 \leq \alpha_1(\theta_2) \leq \frac{4}{\pi}$ であ
 るから $\alpha_1(z_2) \in H^\infty(U)$ である (Lemma 2)。1 なる θ_1 と
 $\alpha_1(z_2)$ は constant でなければならぬ。 α_1, α_2 の定義を考
 慮に入れれば $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{4}{\pi}$ が得られる。これは $f_1 = f_2$
 $= z_1 + z_2$ を示す。(証明終り)。

§ 6. Th. 7 の証明

まず, de Leeuw-Rudin (1) p. 491 をよく見ると次のことが分
 かる。

Lemma. 5. $f \in H^1(U)$ (p. 21) ならば, 次のような $g \in H^1(U)$

が存在する,

$$i) \|f+g\|_1 = \|f-g\|_1 = \|f\|_1$$

また, $\tau, 2$

$$\arg(f^*(w) + g^*(w)) = \arg(f^*(w) - g^*(w)) = \arg f^*(w) \quad \text{a.e. } w \in T.$$

ii) $f \pm g$ は outer.

これを用いて基本的な形の Lemma を得る.

Lemma 6. $f \in H^p(U)$ ($\frac{1}{2} \leq p \leq 1$) が outer function であるとき, $h \in H^q(U)$ ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 2$) が $f^* h^* \geq 0$ a.e. on T とならば, fh は constant である。

(証明) $\frac{1}{2} \leq p \leq 1$ と $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 2$ 故に $1 \leq q \leq \infty$ である。

Lemma 5 によつて $\exists g \in H^q(U)$; $h \pm g$ outer, $\arg(h^* \pm g^*) = \arg h^*$ a.e. T . $f \pm h \pm g$ は outer であるから, zero を

含まない, したがつて $\sqrt{f} \in H^p(U)$, $\sqrt{h \pm g} \in H^{2q}(U)$ である。

これより $\sqrt{f} \sqrt{h \pm g} \in H^1(U)$. 一方 $f^* h^* = 0$,

$\arg(h^* \pm g^*) = \arg h^*$ a.e. on T より, $f^*(h^* \pm g^*) \geq 0$ a.e. on T

を得る。このことは $(\sqrt{f} \sqrt{h \pm g})^*$ が real a.e. on T である。

す。 $H^1(U)$ の函数の境界値が real であるの故に

$\sqrt{f} \sqrt{h \pm g}$ はそれぞれ constant であることが分る。

これから f_h も constant でなければならぬ。(終り).
(Th. 7 の証明).

f は outer であるから $1/f \in N_+(U^n)$ (したがって $1/f^* \in L^1(T^n)$)
より $1/f \in H^1(U^n)$ である。これから、殆んど全ての $w \in T^n$
に対して $f_w(\lambda) = f(\lambda w) \in H^1(U)$ であり、 $1/f_w(\lambda) \in H^1(U)$ で
ある。さて、 $g \in S^1 \cap H^2(U^n)$ としよう。すると、
Lemma 4 によつて、 $g_w^*(e^{i\theta})/f_w^*(e^{i\theta}) \geq 0$ a.e. on T である。
Lemma 3 より $1/f_w(\lambda)$ が outer であることに注意して、Lemma 6
を使つて、殆んど全ての $g_w/f_w(\lambda)$ は constant である。
しかし、一対円板 $\{\lambda w; |\lambda| < 1\}$ は原点で交わるから
 $g_w/f_w(\lambda) = g/f(0)$ a.e. $w \in T^n$ を得る。 g/f は U^n で正
則だから、各次元周することにし、 $g/f \equiv g/f(0)$ を得る。
 $\|g\| = \|f\| = 1$ だから、 $g/f = 1$ でなければならぬ。(終り).

(注) Th. 6 は de Leenw-Rudin [1] の Th. 8 の gap を少
し埋めるものである。又次のことがいえる。Th. 6. で
 $1/f^* \in L^1(T^n)$ を $1/f^* \in L^p(0 < p < 1)$ でおきかえることはでき
ない。実際、 $f = (1 - z_1)^\alpha / \|(1 - z_1)^\alpha\|$, ($1 < \alpha < 1/p$) は S^1 から
少くとも 2 つの元を含む例である。(但し、 $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, $|z_i| < 1$).

参考文献

- [1]. K. de Leeuw and W. Rudin, Extreme points and extremum problems in H_1 , Pacific J. Math., 8 (1958), 463 - 485.
- [2]. J. Newirth and D. J. Newman, Positive $H^{\frac{1}{2}}$ functions are constants, Proc. Amer. Math. Soc., 18 (1967), 958.
- [3]. W. Rudin, Function Theory in Polydisks, Benjamin 1969.
- [4]. A. Zygmund, Trigonometrical series II. 1959.