

Foliated bundlesの接続について

北大 理学部 鈴木 治夫

1. Foliated principal GL_r -bundles における, transverse projectable connections の構成と, それによって定まる 2 次特性コホモロジー類の, 一つの性質について考察する.

"微分可能"は C^∞ をいぬるものとし, 微分可能多様体はすべてパラコンパクト, ハウスドルフであると仮定しておく.

$\mathcal{F}$ を n 次元微分可能多様体 M の上の, codimension q の foliation とする. $T(M)$ を M の接ベクトル・バンドル, $F \subset T(M)$ を,

$\mathcal{F}$ の leaves に接するベクトルから成る, 部分ベクトル・バンドルとする. Foliation $\mathcal{F}$ をもつ多様体 M を $(M, \mathcal{F})$ とかき,

$E(M, p, GL_r)$ を $(M, \mathcal{F})$ の上の foliated principal GL_r -bundle とする.

M はパラコンパクトだから, $E(M, p, GL_r)$ の上にリーマン接続が存在する. とくに, 剰余ベクトル・バンドル $V_T = T(M)/F$ の

Bott 接続 [1] により, V_T の frame bundle $E(V_T)$ は, $(M, \mathcal{F})$ の上の foliated principal GL_r -bundle ($q=r$) となる. これを $E_T(M, p_T, GL_r)$

とかく. Bott 接続は, その transverse connection となる [2].

M_1 を微分可能多様体, $f: M_1 \rightarrow M$ を $\mathfrak{F}$ に transverse な微分可能写像, $\mathfrak{F}_1 := f^*\mathfrak{F}$ を, f によって $\mathfrak{F}$ から誘導される, M_1 の上の co-dimension q foliation とする. f による $E(M, p, GL_r)$ の誘導バンドルを $f^*E(M, p, GL_r)$ とし, f に対応する principal bundle map を $\bar{f}: f^*E(M, p, GL_r) \rightarrow E(M, p, GL_r)$ とかく. $f^*E(M, p, GL_r)$ は, $(M_1, \mathfrak{F}_1)$ の上の foliated principal GL_r -bundle $E(M_1, p_1, GL_r)$ となることが容易にわかる.

$WO_{q,r}$ を differential algebra: $R[c_1, c_2, \dots, c_s]/(\deg > q) \otimes \wedge(h_1, h_3, \dots, h_l)$, (R は実数体), $s := \min(q, r)$, $l := \max\{2m+1 \leq r\}$, $d(c_i) = 0$, $d(h_j) = c_j$ ($j \leq s$), $q < l$ の場合, $d(h_j) = 0$ ($j > s$) とする. M 上の複素数係数の微分形式環を $A^*(M)$ とかく. M 上の principal GL_r -bundle E の接続 θ の曲率形式に対し, GL_r の Lie 環 $\mathfrak{gl}_r$ の, 次数が q より大きい任意の不変多項式の値が, 0 となるならば, θ とリーマン接続 θ^0 とのワッファイン結合を用いることにより, 一般化された Bott の differential algebra map, $\lambda_{q,r}(\theta): WO_{q,r} \rightarrow A^*(M)$ が構成され, コホモロジー準同形, $\Delta_{q,r}(\theta): H^*(WO_{q,r}) \rightarrow H_{DR}^*(M; \mathbb{C})$ (H_{DR} は de Rham コホモロジー, $\mathbb{C}$ は複素数体) が得られる. E が $(M, \mathfrak{F})$ 上の foliated principal bundle $E(M, p, GL_r)$ で, θ がその transverse connection ならば, $\Delta_{q,r}(\theta)$ は, θ のとり方によらずに定まる. ([1], [2] 参照). これは, $(M, \mathfrak{F})$ の $E(M, p, GL_r)$ の

特性準同形とよばれるものである。 とくに, $WO_q := WO_{q,0}$ とおき, $E = E_r(M, p, GL_r)$ にとるとき, $\Delta_{q,r}(\theta)$ は, Bott の特性準同形 $\Delta_q(\theta): H^*(WO_q) \rightarrow H_{DR}^*(M; \mathbb{C})$ となる. WO_q のコサイクルを γ とかく.

M を $q=2r+1$ 次元微分可能多様体, θ を M の上の codimension r の foliation とし, $\mathcal{F}(\theta)$ を submersion $f: M_1 \rightarrow M$ による, M_1 の foliation とする.

定理 $\mathcal{F}$ が non-trivial な Bott の q 次元 2 次特性コホモロジー類, $\Delta_r(\mathcal{F})[\gamma] \neq 0$ をもち, $f^*: H^*(M; \mathbb{R}) \rightarrow H^*(M_1; \mathbb{R})$ が injective ならば, $(M_1, \mathcal{F}(\theta))$ の上の foliated principal GL_r -bundle $E_0(M, p, GL_r) := f^*E(\mathcal{F})$ において, transverse projectable connections ω^0 および ω が存在し, γ に対する 2 次特性コホモロジー類が, それぞれ $\Delta_{[0],r}(\omega^0)[\gamma] = 0$ および $\Delta_{[2],r}(\omega)[\gamma] \neq 0$, $([2] = r)$ となる.

$\Delta_r(\mathcal{F})[\gamma]$ として, 例えば, Godbillon-Vey コホモロジー類, $\Delta_r(\mathcal{F})[c_1 \eta]$ をとることができる, submersion f とし, M のベクトル・バンドルの射影写像をとることができる.

2. 一般に, θ に transverse な微分可能写像, $f: M_1 \rightarrow M$ による誘導バンドル, $f^*E(M, p, GL_r) = E(M_1, p, GL_r)$ において, 次の補題が成立つ.

補題 2.1. θ , θ^0 および ω を, それぞれ, (M, θ) の上

の $E(M, p, GL_r)$ の transverse, リーマンおよび transverse projectable connection [2] とするとき, $\tilde{f}^*\theta$, $\tilde{f}^*\theta^0$ および $\tilde{f}^*\omega$ は, それぞれ $(M_1, \mathcal{F}_1)$ の上の $E(M_1, p_1, GL_r)$ の transverse, リーマンおよび transverse projectable connection となる.

証明 $\mathcal{F}_E \in \mathcal{F}$, $\mathcal{F}$ の $E(M, p, GL_r)$ におけるリフトとし, F_E を $\mathcal{F}_E$ の leaves の接ベクトルから成る, $T(E(M, p, GL_r))$ の部分ベクトル・バンドルとする. $\mathcal{F}_{1,E} := \tilde{f}^*\mathcal{F}_E$ は, $E(M_1, p_1, GL_r)$ における $\mathcal{F}_1$ のリフトであり, 対応する部分ベクトル・バンドルを $F_{1,E}$ とかく.

$e \in E(M_1, p_1, GL_r)$ に対し, $X \in F_{1,E|e}$ ならば, $\tilde{f}_*X \in F_E|_{\tilde{f}(e)}$ だから, $\tilde{f}^*\theta(X) = \theta(\tilde{f}_*X) = 0$ となる. これは, $\tilde{f}^*\theta$ が transverse connection であることを示している. V を $E(M, p, GL_r)$ に対応するベクトル・バンドル, v_i を V の局所基底ベクトル場とし, w_i を v_i に対応する $\tilde{f}^*V$ の局所ベクトル場 $(w_i(y) = (v_i(\tilde{f}(y)), y), y \in M_1)$, $i = 1, 2, \dots, r$ とする. θ^0 に対応する V の接続を ∇^0 とするとき, M_1 の局所接ベクトル場 Y に対して,

$$\begin{aligned} (\tilde{f}^*\nabla^0)_Y \langle w_i, w_j \rangle (y) &= \nabla_{\tilde{f}_*Y}^0 \langle v_i, v_j \rangle (y) \\ &= \langle (\nabla_{\tilde{f}_*Y}^0 v_i, y), (v_j(\tilde{f}(y)), y) \rangle + \langle (v_i(\tilde{f}(y)), y), (\nabla_{\tilde{f}_*Y}^0 v_j, y) \rangle \\ &= \langle (\tilde{f}^*\nabla)_Y w_i, w_j \rangle (y) + \langle w_i, (\tilde{f}^*\nabla)_Y w_j \rangle (y). \end{aligned}$$

この関係式は, 接続の条件の下で保存されるから, $\tilde{f}^*V$ の任意のベクトル場 s_1, s_2 に対して成り立つ. E の任意の局所 section s と, これに対応する $\tilde{f}^*E$ の局所 section s' とあれば,

$s^*(f^*\theta^0) = f^*s^*\theta^0$ となり, したがって $f^*\theta^0$ は, f^*V のリーマン接続に対応するから, $E(M, p, GL_r)$ のリーマン接続となる.

N を, 常に transverse な, M の q 次元局所部分多様体とし, N の上 N の r の r の局所 submersion を f とする. f は $E(M, p, GL_r)$ の局所積構造の開集合 $U \subset M$ の上で定義されるとしてよい.

必要ならば, N をさらに小さくとり, M_1 の中に微分可能 q 次元局所部分多様体 N_1 を見出し, f によって, N の上に微分位相同形に写されるようにすることが出来る. このとき, M_1 の開集合 $U_1 \subset f(U)$ が存在し, $f_{11} := (f|_{N_1}) \cdot f \cdot f|_{U_1} : U_1 \rightarrow N_1$ は, U_1 における r_1 の局所 submersion と出来るようにできる. あきらかに,

$f \cdot f|_{U_1} = f \cdot f_{11}$. $E(M, p, GL_r)|_U \cong f^*E(M, p, GL_r)|_N$, $E(M_1, p_1, GL_{r_1})|_{U_1} \cong f_{11}^*E(M, p, GL_r)|_{N_1}$ から, f および f_{11} の covering principal bundle maps, $\bar{f} : E(M, p, GL_r)|_U \rightarrow E(M, p, GL_r)|_N$ および $\bar{f}_{11} : E(M_1, p_1, GL_{r_1})|_{U_1} \rightarrow E(M, p, GL_r)|_{N_1}$ があるから, $\bar{f}_{11} \cdot \bar{f}|_{E(M_1, p_1, GL_{r_1})|_{U_1}} = \bar{f} \cdot \bar{f}_{11}$ と出来る. $E(U) := E(M, p, GL_r)|_U$, $E(U_1) := E(M_1, p_1, GL_{r_1})|_{U_1}$ 等とかくことにする.

$w|_{E(U)} = \bar{f}^*(w|_{E(N)})$ から,

$$\begin{aligned} \bar{f}_{11}^* w|_{E(U_1)} &= (\bar{f}|_{E(U_1)})^* (w|_{E(U)}) \\ &= (\bar{f}|_{E(U_1)})^* \cdot \bar{f}^*(w|_{E(N)}) \\ &= (\bar{f}_{11} \cdot \bar{f}|_{E(U_1)})^* (w|_{E(N)}) \\ &= (\bar{f}_{11} \cdot \bar{f})^* (w|_{E(N)}) \\ &= \bar{f}_{11}^* (\bar{f}^* w|_{E(N)}) \end{aligned}$$

となる。したがって、 $f^*\omega$ は $(M_1, \mathcal{F}_1)$ の上の $E(M_1, p_1, GL_r)$ の, transverse projectable connection である。証明終

gl_r の不変多項式環 $\mathbb{R}[gl_r]$ とかく。実数体上の $r \times r$ 行列 A に対し, 不変多項式 c_i を, $\det(I+tA) = 1 + \sum_{i=1}^r t^i c_i(A)$ (t は不定元) と定めるとき, $I(gl_r) = \mathbb{R}[c_1, c_2, \dots, c_r]$ となることはよく知られている。 $\pi: M \times \mathbb{R} \rightarrow M$, $\bar{\pi}: E(M, p, GL_r) \times \mathbb{R} \rightarrow E(M, p, GL_r)$ を自然な射影とする。 $E(M, p, GL_r)$ の接続 θ およびリーマン接続 θ^0 に対し, $\bar{\theta} := \pi^*((1-t)\theta + t\theta^0)$ ($t \in \mathbb{R}$) とおく。 $\bar{\theta}$ は $E(M, p, GL_r) \times \mathbb{R}$ の接続となる。 $\lambda(\theta), \lambda(\theta^0, \theta): I(gl_r) \rightarrow A^*(M)$ を, $\lambda(\theta) := (\frac{1}{2\pi})^r c_i(\omega)$ (c_i は i 次不変多項式, ω は θ の曲率形式), $\lambda(\theta^0, \theta)(c_j) := \pi_* \lambda(\bar{\theta})(c_j) |_{M \times [0, 1]}$, π_* は trivial bundle π の integration over the fibre と定める。

$d\{\lambda(\theta^0, \theta)(c_{2i-1})\} = \lambda(\theta)(c_{2i-1})$ ($1 \leq 2i-1 \leq r$) が成立つ ([1], [2]) から, θ の曲率形式に対して, $I(gl_r)$ の $\mathbb{R}$ より大きい次数の, 任意の多項式の値が 0 となるとき, differential map, $\lambda_{k,r}(\theta): W_{k,r} \rightarrow A^*(M)$ が, $\lambda_{k,r}(\theta)(c_i) := \lambda(\theta)(c_i)$ ($1 \leq i \leq \min(k, r)$), $\lambda_{k,r}(\theta)(h_j) := \lambda(\theta^0, \theta)(c_j)$ ($j=1, 3, \dots, l$) によって定まる。とくに, $(M, \mathcal{F})$ 上の $E(M, p, GL_r)$ の transverse connection θ に対して, Bott の vanishing theorem により, $\lambda_{q,r}(\theta)$ が定まる。補題 2.1 により, $f^*\theta$ は $(M_1, \mathcal{F}_1)$ の上の $E(M_1, p_1, GL_r)$ の transverse connection となるから, 同様に $\lambda_{q,r}(f^*\theta)$ が定まる。

補題 2.2. $\lambda_{q,r}(f^*\theta)(c_i) = f^*(\lambda_{q,r}(\theta)(c_i)) \quad 1 \leq i \leq s,$

$$\lambda_{q,r}(f^*\theta)(h_j) = f^*(\lambda_{q,r}(\theta)(h_j)) \quad j=1, 3, \dots, l.$$

証明 $\rightarrow$ 1式は, 直接の計算により容易に示される. 補題2.1により, $f^*\theta^0$ がリーマン接続であることを注意する.

$\pi_1: M_1 \times R \rightarrow M_1$ を自然射影とすると, integration over the fibre の naturality [3, VII §5 PROP. VIII] により,

$$\begin{aligned}\lambda_{g,r}(f^*\theta)(c_j) &= \lambda(f^*\theta^0, f^*\theta)(c_j) \\ &= \pi_{1*}(\lambda(f \times id)^*\bar{\theta})(c_j) |_{M_1 \times [0,1]} \\ &= \pi_{1*}((\frac{f}{2\pi})^* c_j (f \times id)^* \Omega(\bar{\theta})) |_{M_1 \times [0,1]} \\ &= f^* \pi_{**}((\frac{f}{2\pi})^* c_j (\Omega(\bar{\theta})) |_{M \times [0,1]}) \\ &= f^*(\lambda(\theta^0, \theta)(c_j)) \\ &= f^*(\lambda_{g,r}(\theta)(c_j)),\end{aligned}$$

となるから, $\rightarrow$ 2式が得られる. 証明終

3. 定理の証明. θ を $(M, \mathcal{F})$ 上の $E_T(M, p, GL_r)$ の, transverse connection とする. $f^*E_T(M, p, GL_r)$ は, $(M_1, \mathcal{F}_1) = (M_1, f^*\mathcal{F})$ 上の foliated principal GL_r -bundle で, $E_T(M_1, p_1, GL_r)$ と一致する. 定理の仮定と補題2.2により,

$$[\lambda_{r,r}(f^*\theta)(\gamma)] = [f_* \lambda_{r,r}(\theta)(\gamma)] = f_* \Delta_r(\mathcal{F})(\gamma) \neq 0.$$

$f^*E(V_r)$ において, codimension g foliation $\mathcal{F}(f)$ のリフトとして, submersion $\bar{f}: f^*E(V_r) \rightarrow E(V_r)$ における foliation $\bar{\mathcal{F}}$ とすることにより, $f^*E(V_r)$ は, $(M, \mathcal{F}(f))$ 上の foliated principal GL_r -bundle $E_0(M, p, GL_r)$ となる.

$E_T(M, p, GL_r)$ 上のリーマン接続 θ^0 , $\mathcal{F}$ の transverse connection θ

をとり, $\omega_0 = f^* \theta^0$, $\omega_i = f^* \theta^i$ とおく. ω^0, ω は共に, $(M_1, \pi(f))$ の上の $E_0(M_1, p_1, GL_1)$ の transverse projectable connections で, Bott の strong vanishing theorem が成立つから, $\Delta_{[\frac{q}{2}], r}(\omega^0)$ および $\Delta_{[\frac{q}{2}], r}(\omega)$ が定まる. 補題 2.1 によって, ω^0 はリーマン接続だから, $\lambda_{[\frac{q}{2}], r}(\omega^0)(h_j) = 0$ となり, したがって, $\Delta_{[\frac{q}{2}], r}(\omega^0)[\gamma] = 0$ となる.

$$\Delta_{[\frac{q}{2}], r}(\omega) = [\lambda_{r, r}(\omega)(\gamma)] \neq 0.$$

証明終

$\pi \in M$ の上の codimension q foliation とする. (M, π) 上の, foliated principal GL_r -bundle $E(M, p, GL_r)$ における, transverse projectable connection ω に対し, $W\Omega_{[\frac{q}{2}], r}$ の 2 サイクル,

$$\gamma = c_{i_1} \cdots c_{i_s} \otimes h_{j_1} \wedge \cdots \wedge h_{j_m}$$

$$1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_s \leq s = \min([\frac{q}{2}], r), \quad 1 \leq j_1 < \cdots < j_m \leq l \quad (j_\beta \text{ は奇数}),$$

をとるとき, $2(\sum_{\alpha=1}^s i_\alpha + j_1) > q+1$ なるものは, 対応する 2 次特性コホモロジー類, $\Delta_{[\frac{q}{2}], r}(\omega)[\gamma]$ は ω のとり方によらない ([2]) が, γ の 2 サイクルの条件 $2(\sum_{\alpha=1}^s i_\alpha + j_1) > q$ だけでは, 例えは $\gamma = c_1 h_1$ で, $q = 2r+1$ のとき, $\Delta_{[\frac{q}{2}], r}(\omega)[\gamma] = \Delta_{r, r}(\omega)[\gamma]$ が, ω のとり方によって異なることを, 定理は示している.

文 献

- [1] R. Bott, Lectures on characteristic classes and foliations, Lecture Notes in Mathematics, 279, Springer-Verlag,

Berlin-New York, 1972, 1-76.

- [2] H. Suzuki, Characteristic classes of foliated principal GL_r -bundles, Hokkaido Math. J. IV (1975), 159-168.
- [3] W. Greub, S. Halperin and R. Vanstone, Connections, curvature, and cohomology, Vol. I, Academic Press, 1972.