

最小素数定理について^(*)

日本大学 本橋洋一

§ 1. 序

この論説の目的は, Linnik の最小素数定理 (及びその Fogels, Gallagher による拡張) に, 新しい篩法の観点に立つ証明をあたえることである。勿論, 我々の興味は, その方法にあるのであって, いかにしてそこに達するかをくわしく述べたいと思う。ここに示す証明が最も簡明なものであるとは断言できるが, 我々の方法においては, Turán の和理論, (Linnik 型) 零実密度理論, 更には Deuring-Heilbronn 現象を全く必要としないのである。数論的に相当に簡明かつ完備したものであると信じる次第である。

まず問題の歴史を概観してみよう。1944 年に Linnik は [L1][L2] において次のことを証明した。

(*) Y. Motohashi: On primes in arithmetic progressions (to appear in *Inventiones Math.*) をくわしく書きくわえたものである。

定理 1. (Linnik の最小素数定理)

法 q についての任意の算術級数にあつれる最小の素数は q^L を与える。但し L は計算可能な絶対常数である。

この L のことを Linnik 常数というのであるが、この結果の注目すべき点は、次の点にある。すなわち、それまでの素数分布論においては、このような結果は、準リーマン予想の全 L -函数への拡張というような強烈な仮定なくしては、証明不可能と思われていたのであるが、Linnik は Bohr-Landau-Hoheisel の系列上につらなる考えによつて、そのような仮定を回避できることを発見したのである。その最も基本になるのが Linnik 型零点密度定理

$$(1) \quad \sum_{\chi \pmod{q}} N(\sigma, T, \chi) \ll (qT)^{O_1(1-\sigma)}$$

である。(但し Linnik は $T \ll q^L$ の条件下で考へてゐる。)

ここにおいて、拡張されたリーマン予想を零点密度理論でおきかえるという、強力な手段が確立され、素数分布論に多くの目覚しい結果をもたらす歴史がはじまるのである。そしてそれは Bombieri の平均素数定理によつて一つの頂点に達する訳である。

所で Linnik の証明 [L1] [L2] であるが、これは更に困難なものであり、Davenport をして '恐るべき' と評した

程である。主たる道見は、整函数の凸性定理及び Brunn-Titchmarsh 定理の二つに帰着するのであるが、その応用は複雑で難渋を極める。(筆者自身、いまだに完全に理解した気持になれないままである。) そこで、当然、その簡易化及び深化がもたられるのであるが、Rodosskii [R; Kap. X] の整理はあったものの、これは全くの Limmik の証明のいいかえであり、簡易化とは程遠いものであった。本当の意味の新しく簡明な証明は、Limmik の後十数年を経て Turán [T1] によつてはじめてなされとげられた。Turán の証明は、Limmik の用いた凸性定理を、Turán 自身による '巾和の方法' (Power sum method) で置きかえる点新しいのである。そしてその中心となるものは次の不等式である。

$$(2) \quad \max_{M \leq \nu \leq M+N} \left| \sum_{j=1}^N z_j^{\nu} \right| \geq \left(\frac{N}{8e(M+N)} \right)^N \quad (\text{但し } z_1 = 1).$$

しかしながら、あえて苦言を呈すれば、(2) の証明はかなり困難なものであり、しかもこれは、一種の暗箱を理論にもち込んだかの観がある。更にもう一つの難点は、(2) の応用は常数 e の評価にあまり良い効力をもたない点にもある。とは言うものの、それでもなお且つ (2) は定理 1 の証明をより近づくやすくするものである。実際 Turán のすゝめとをつけて、Knapowski [K] は、Deuring-Heilbromm 現象の (2) を通しての

証明を得、理論全体を書きかえたのである。そしてなお重要なことは、Turánのideaがその後のより深い発展をきたる源泉となったことである。そのような発展のうちでも、特にFogels [F] は (1) において、 $T \ll q^2$ の条件をとり 23 = 2 に成功し、その直接の効果として、次のことを証明した。

定理 2. (Fogelsの素数定理)

計算可能な絶対常数 A が存在して

$$\pi(x+h; q, l) - \pi(x; q, l) \gg \frac{h}{q^2 \log x}$$

が $q^A \leq x/q \leq h \leq x$ において成立する。

これは明らかに定理 1 を深めたものである。Fogelsの証明に於ては、Turánのideaの他に一つの重要な突がある。それは、Dirichlet多項式の平均値の評価についで注目すべき新しい方法であり、これは後にのべる様にGallagherの方法の出発点になったものである。Fogelsの[F]が出た1965年は、解析的整数論において更に収穫多き年であったが、そのうちでもBombieriによるLarge Sieveのめざましい発展がまず第一にあげられよう。そしてこれは、当然に、定理2のlarge sieve型への拡張をうながした記であるが、それには、やや時間かかって、1970年にGallagher [G] が成功したのである。Gallagherの結果を述べるには、やや準備がいるので、まずここで用い

られた3つの重要な補題を示しておこう。それらはすでに示された Turán の (2) と, Bombieri-Davenport ([B, Théorème 8]) による Brun-Titchmarsh 型定理の large-sieve 型への拡張, 及び Gallagher 自身による Dirichlet 級数についての平均値定理である。この第2のものは,

定理 3. (Bombieri-Davenport)

n が Q 以下の素因子をもつとき $a_n = 0$ であれば,

$$\sum_{q \leq Q} \log \frac{Q}{q} \sum_{\chi \pmod{q}}^* \left| \sum_{n=1}^{M+N} a_n \chi(n) \right|^2 \leq (N + Q^2) \sum_{n=1}^{M+N} |a_n|^2.$$

そして第3のものは,

定理 4. (Gallagher の平均値定理)

$\sum |a_n| < +\infty$ であれば, $T \geq 1$ に対して,

$$\int_{-T}^T \left| \sum a_n n^{it} \right|^2 dt \ll T^2 \int_0^\infty \left| \sum_y \frac{ye^{i/t}}{y} a_n \right|^2 dy/y.$$

定理3は, 特別の場合として Brun-Titchmarsh 定理をもたらしるのであるが, この結果が large sieve の '篩' の効力を研究するはじまりとなった。そして, それは Montgomery によって本来の意味の 'large' sieve へと発展する訳である。又, 定理4は, それまで素数分布論の文献にあらわれていた, 雑多

個別的な Dirichlet 級数の平均値の計算を美しく統一するものである。

さて、本論説の目的とする Gallagher の素数定理であるが、それを述べる前に、謂る例外零点あるいは例外指標について、その意味を固定しておく必要がある。これは有名な Page-Landau の定理にあらわれるのであるが、ここでは便宜上、もう一歩すすめて、次のような形にして、導入するにとする。

Pracher [P] の第 4 章定理 7.1 によれば、(それを少々拡張して) 次のことが知られる。 $\chi \pmod{q}$, ($q \leq Q$, $Q \geq 2$), は原始指標として、領域

$$(3) \quad \sigma \geq 1 - K(\log Q(t+1))^{-1}, \quad (1 \geq K > 0: \text{絶対常数})^{(*)}$$

において、

$$(4) \quad \frac{L'}{L}(s, \chi) + O(\log Q(t+1)) = \begin{cases} 0 & \chi \neq \chi_0, \chi_1 \text{ のとき,} \\ -(s-1)^{-1} & \chi = \chi_0 \text{ のとき,} \\ (s-1+\delta)^{-1} & \chi = \chi_1 \text{ のとき,} \end{cases}$$

が成立する。但し、 $\chi_0 \equiv 1$, 亦なわち $L(s, \chi_0) = \zeta(s)$. 又、 $\chi_1 \pmod{q_1}$ は(存在するとすれば)唯一の実指標で、 $L(s, \chi_1)$ は (3) において 唯一の (実) 根 $1-\delta$ ($\delta > 0$) をもつ。以下の議論では、

$$(5) \quad \delta \leq \frac{K}{10} (\log Q)^{-1}$$

(*)

$1 \geq K$ という条件は不要であるが、以下(特に第 4 節)の議論を容易にするために仮定しておく。

となるとき χ_1 を例外 (くわしくは Q -例外) 指標, $1-\delta$ を例外 (くわしくは Q -例外) 零点とよぶことにする。そして, χ_1, q_1, δ は記号として, 必ず, この意味で用いることにする。この約束のもとに, Gallagher の素数定理は次のようになる。

定理 5. (Gallagher の素数定理)

例外指標が存在する場合は $\Delta = \delta \log Q$, 存在しない場合は $\Delta = 1$ と定める。そして,

$$\tilde{\psi}(x, \chi) = \begin{cases} \sum_{n \leq x} \chi(n) \Lambda(n) & \chi \neq \chi_0, \chi_1 \text{ のとき,} \\ \sum_{n \leq x} \Lambda(n) - x & \chi = \chi_0 \text{ のとき,} \\ \sum_{n \leq x} \chi_1(n) \Lambda(n) + \frac{x^{1-\delta}}{(1-\delta)} & \chi = \chi_1 \text{ のとき,} \end{cases}$$

とおく。このとき, 計算可能な絶対常数 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 > 0$ が存在して,

$$\sum_{q \leq Q} \sum_{\chi \pmod{q}}^* |\tilde{\psi}(x+h, \chi) - \tilde{\psi}(x, \chi)| \leq \alpha_1 \Delta h \exp(-\alpha_2 (\log x) / \log Q)$$

が条件

$$Q^{\alpha_3} \leq x/Q \leq h \leq x, \exp((\log x)^{1/2}) \leq Q$$

のもとに成立する。

これは勿論，定理1及び2を特別の場合として含んでいる。

Gallagher の証明は，Fogels の場合と同じく，零乗密度定理に帰着するものであるが，この際，それは

$$(6) \quad \sum_{q \leq Q} \sum_{\chi \pmod{q}}^* N(\alpha, T, \chi) \ll (QT)^{C_2(1-\alpha)}$$

という形のものに存する。このことの証明に，中和理論，定理3及び4が必要とされ，更にそれを定理5にもすかすけるために，Deuring-Heilbromm 現象が援用された訳である。

このようにして，Linnik の最小素数定理は深い発展をしたのであるが，その基本には，つねに密度定理の改良，拡張があった。この点において Turán の方法は確然たる，正しい訳であるが，上に述べたように，その方法には一つの大きな欠点がある。それは，明確な形で述べれば，(6)における，常数 C_2 の評価に有効に作用しなれり，すなわち，あまりにも大きな値をもたらしてしまう，という点である。これは Turán の方法そのものに内在するのであって，これを改良するには，Turán の方法にかわるものを見つけなければならぬ。

しかるに，Selberg [S2] は，それ（少なくともその端初を）を発見したのである。Selberg の方法は，もとをただせば，遠く [S1] にまでさかのぼれるのであるが，large sieve の概念を得て，全く新しい様相を示してゐるのである。そして

彼の方法の中心となるものは、定理3の深化とも言うべき、次の結果である。

定理6. (Selberg)

$$\psi_r(n) = \mu((r, n)) \varphi((r, n))$$

とすると,

$$\sum_{\substack{qr \leq Q \\ (q, r)=1}} \frac{\mu^2(r) q}{\varphi(qr)} \sum_{\chi(\bmod q)}^* \left| \sum_M^{M+N} a_n \chi(n) \psi_r(n) \right|^2 \\ \leq (N + Q^2) \sum_M^{M+N} |a_n|^2.$$

この証明には、まず r が "sugar-free" であること

$$\mu(r) \psi_r(n) = c_r(n) = \sum_{\substack{h=1 \\ (h, r)=1}}^r e^{2\pi i \frac{h}{r} n} \quad (\text{Ramanujan和})$$

となることに注意し、 $\chi(n)$ を Gauss 和によつてあらわし、それをまとめれば、通常の加法的 large sieve の形になるというにこじめておく。([B, Théorème 7A] をみよ。) 定理3の条件を a_n につけかわえれば $a_n \psi_r(n) = a_n$ であり、且つ又、

$$(7) \quad \sum_{\substack{x \leq x \\ (x, 2)=1}} \frac{\mu^2(x)}{\varphi(x)} \geq \frac{\varphi(2)}{2} \log x$$

に注意する = により、定理6が定理3を含むことが知られる。

実は、定理6は、のちにわかるように、Selberg の他のいくつか

つかの着想をつけくわえれば、例外指標が存在しない場合、Gallagherの素数定理をもたらしするのである。そして、しかも、それには、Turánの方法、密度理論をともに必要としないのである。但し Selberg 自身は、定理6の応用として、(6)の次のような驚くべき改良を示したのである。

$$(8) \quad \sum_{q \leq Q} \sum_{\chi(\bmod q)}^* N(\alpha, T, \chi) \ll_{\varepsilon} (Q^{5+\varepsilon} T^{3+\varepsilon})^{1-\sigma}$$

従って、今くとも、Linnik 常数の評価に大きな進展が予想されるのであるが、ただそのためには、Deuring-Heilbronn 現象にかかわる常数を改良しなくてはならぬ。そして、更に、そのためには、Turánの方法を用い、Deuring-Heilbronn 現象の証明がとめられる訳である。このことは筆者によつてごく最近にいたして解決したのであるが、その出発点は、やはり定理6にある。それを以下に説明しよう。

まず、 $\psi_r(n)$ がどうして出てくるのかをよく考えてみる必要がある。 $\psi_r(n)$ の導入は定理6に (linear) sieve としての効力をあたえるのであつたが、一方、linear sieve は、最も簡単に考えて、Selberg の篩法

$$(9) \quad \sum_{n \leq N} \left(\sum_{\substack{d|m \\ d \leq R}} \theta_d \right)^2 \quad (\theta_1 = 1)$$

によつて処理される。この θ_d の最適な値は、よく知られ

て 113 ように (はじめで得たのは [S1]!))

$$(10) \quad \theta_d = \left\{ \sum_{r \leq R} \varphi(r)^{-1} \mu^2(r) \right\}^{-1} \left\{ \sum_{\substack{r \leq R/d \\ (r,d)=1}} \varphi(r)^{-1} \mu^2(r) \right\} \mu(d) d / \varphi(d).$$

所が, このことから容易に, 次の等式がみえてくる。

$$(11) \quad \left\{ \sum_{\substack{d|m \\ d \leq R}} \theta_d \right\} \left(\sum_{r \leq R} \frac{\mu^2(r)}{\varphi(r)} \right) = \sum_{r \leq R} \frac{\mu^2(r)}{\varphi(r)} \psi_r(n).$$

すなわち, $\psi_r(n)$ の根拠は Selberg の節にある記である。さて,

Deuring - Heilbromm 現象の証明にあたり, これは, '伝統的に' Linnik の着想により

$$(12) \quad \begin{aligned} F(s, \chi) &= L(s, \chi) L(s + \delta, \chi \chi_1) \\ &= \sum \chi(n) B(n) n^{-s}, \quad (\sigma > 1) \end{aligned}$$

但し

$$(13) \quad B(n) = \sum_{d|m} \chi_1(d) d^{-\delta},$$

を考える必要がある。一方 (10) の θ_d は,

$$\sum \theta_d \chi(d) d^{-s}$$

が $L(s, \chi)$ の molifier とみ, て 113 という関係をもっており,

り, これが結果として $L(s, \chi)$ の零点の評価にむすびつく。

([S1] ではこうして

$$\int_{1/2}^1 N(\sigma, T) d\sigma \ll T$$

が示されたのであった。)

従って、いま我々が考察すべきは、 $F(s, \chi)$ の有効な modifier の発見であると想像しよう。そして、上記の事情から、これは恐らく、節

$$(14) \quad \sum_{n \leq N} B(n) \left(\sum_{\substack{d|m \\ d \leq R}} \Theta_d \right)^2 \quad (\Theta_1 = 1)$$

をしらべて、(11)に相当する ε をみつければよいのではなからうか。

さて、(14) は

$$(15) \quad \sum_{d_1, d_2 \leq R} \Theta_{d_1} \Theta_{d_2} \sum_{n \leq N/[d_1, d_2]} B([d_1, d_2]n)$$

で、 $\varepsilon = 1$ に d_1, d_2 は square-free と考えてよいから、

$$\sum_{n \leq x} B(dn) \quad (d: \text{square-free})$$

を計算しよう。容易にわかるように、 $\delta > 1$ で、

$$\sum B(dn) n^{-s} = F(s, \chi_0) \prod_{p|d} \left(1 + \frac{\chi_1(p)}{p^\delta} - \frac{\chi_1(p)}{p^{s+\delta}} \right).$$

よって Perrom の反転公式により

$$(16) \quad \sum_{n \leq x} B(dn) = x L(1+\delta, \chi_1) \prod_{p|d} \left(1 + \frac{\chi_1(p)}{p^\delta} - \frac{\chi_1(p)}{p^{1+\delta}} \right) + O\left((x^{1/2} q_1^{1/4})^{1+\varepsilon} d^\varepsilon \right).$$

但し、 $\varepsilon = \varepsilon'$

$$(17) \quad L(s, \chi) \ll (q(t+1))^{\frac{1}{2}(1-\alpha)+\varepsilon} \\ (\chi \pmod{q}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1, \quad |s-1| \geq 1/2)$$

を用いた。(15) は $\alpha=1$ により, $(\Theta_d \ll 1$ とは α が 1 になるから),

$$(18) \quad \sum_{n \leq N} B(n) \left(\sum_{\substack{d|m \\ d \in R}} \Theta_d \right)^2 \\ = N L(1+\delta, \chi_1) \sum_{d_1, d_2 \in R} \frac{\Theta_{d_1} \Theta_{d_2}}{[d_1, d_2]} \prod_{p|d_1 d_2} \left(1 + \frac{\chi_1(p)}{p^\delta} - \frac{\chi_1(p)}{p^{1+\delta}} \right) \\ + O((N^{1/2} q_1^{1/4} R)^{1+\varepsilon})$$

となる。よって, Selberg の篩法により, Θ_d の最適値は,

$$(19) \quad \Theta_d = \left\{ \sum_{x \in R} \mu^2(x) g(x) \right\}^{-1} \left\{ \sum_{\substack{x \in R/d \\ (x, d)=1}} \mu^2(x) g(x) \right\} \mu(d) / K(d)$$

ただし

$$(20) \quad g(x) = \prod_{p|x} \frac{\left(1 + \frac{\chi_1(p)}{p^\delta} - \frac{\chi_1(p)}{p^{1+\delta}} \right)}{(p-1) \left(1 - \frac{\chi_1(p)}{p^{1+\delta}} \right)}, \quad K(d) = \prod_{p|d} \left(1 - \frac{1}{p} \right) \left(1 - \frac{\chi_1(p)}{p^{1+\delta}} \right).$$

よから容易に,

$$(21) \quad \left(\sum_{\substack{d|m \\ d \in R}} \Theta_d \right) G(R) = \sum_{x \in R} \mu^2(x) g(x) \Psi_x(m)$$

但し

$$\Psi_x(m) = \mu((x, m)) g((x, m))^{-1}$$

(22)

$$G(R) = \sum_{x \in R} \mu^2(x) g(x)$$

を得る。そして又, 基本的な操作により,

$$(23) \quad \sum_{\substack{(r, q)=1 \\ r \in R}} \mu^2(r) g(r) \geq G(R) K(q)$$

も得られる。

さて、これを全体としてながめれば、

$$\varphi(r) \longleftrightarrow g(r)^{-1}, \quad q/\varphi(q) \longleftrightarrow K(q)^{-1}, \quad \psi_r(n) \longleftrightarrow \Psi_r(n)$$

という対応があることに気がつく。よって定理6から類推して、

$$\sum_{\substack{qr \leq Q \\ (q, r)=1}} \frac{\mu^2(r) g(r)}{K(q)} \sum_{\chi(\bmod q)}^* \left| \sum_{\substack{M \\ M+N}}^{M+N} a_n \chi(n) \Psi_r(n) \right|^2$$

を考察すればよいのではなからいである。しかしながら、事情はもう少し複雑なのである。で、実際は次のような結果が得られるのである。

定理7. (Motohashi)

$B(n)$, $g(r)$, $K(q)$, $\Psi_r(n)$ は上記の通りとして、条件

$N \ll M$, $q_r \leq Q$ のときは

$$\sum_{\substack{q \leq Q \\ r \in R \\ (q, r)=1}} \frac{\mu^2(r) g(r)}{K(q)} \sum_{\chi(\bmod q)}^* \left| \sum_{\substack{M \\ M+N}}^{M+N} a_n \chi(n) B(n)^{1/2} \Psi_r(n) \right|^2$$

$$\leq (N L(1+\delta, \chi_1) + O((QR)^{3+\varepsilon} M^{1/2+\varepsilon})) \sum_{\substack{M \\ M+N}}^{M+N} |a_n|^2.$$

この証明は次節で示される。そしてこの結果はまさに我々の

の当初の目的にかなうものであり, Deuring-Heilbronn 現象の新しい証明をあたえるのである。しかしながら, よりもなお一層重要な帰結は, この結果が, Gallagher の素数定理の, より困難な場合, すなわち, 例外指標が存在する場合に, その全く新しい立脚点にたつ証明をあたえることにある。それはこの長い序文の最初でのべたように, Turán の中和理論, 零点密度理論, Deuring-Heilbronn 現象を全く必要とするものである。なお且つ (くわしくは示さぬが) それは含まれる常数の評価に当ても, 在来の方法よりもよりよい結果をもたらすのである。

以下, 定理 7 の証明, それらの応用としての定理 3 の証明に入るが, 出てくる常数は全て計算可能である。

§ 2. 定理 7 の証明.

定理の式の左辺は a_n についてのエルミート形式であり, 右辺はその最大固有値を評価しているものとみなせる故, 一般論により, 共役な形式

$$J = \sum_{m=1}^{M+N} B(m) \left| \sum_{\substack{q \leq Q \\ r \leq R \\ (q,r)=1}} \left\{ \frac{\mu^2(r)g(r)}{K(q)} \right\}^{1/2} \Psi_r(n) \sum_{\chi(\bmod q)}^{-\chi} \chi(m; b(r, \chi)) \right|^2.$$

を考察してもよい。但し $b(r, \chi)$ は任意の複素数である。展開して,

$$\begin{aligned}
 J = & \sum_{\substack{q, q' \leq Q \\ r, r' \leq R \\ (q, r) = (q', r') = 1}} \left\{ \frac{\mu^2(r) g(r) \mu^2(r') g(r')}{K(q) K(q')} \right\}^{1/2} \times \\
 (24) \quad & \times \sum_{\substack{\chi \pmod{q} \\ \chi' \pmod{q'}}}^* \left\{ S_{r, r'}(M+N; \chi, \chi') - S_{r, r'}(M; \chi, \chi') \right\} b(r, \chi) \overline{b(r', \chi')}
 \end{aligned}$$

$= = 1 =$

$$S_{r, r'}(y; \chi) = \sum_{n \leq y} B(n) \chi \Psi_r \Psi_{r'}(n)$$

$$(\chi \Psi_r \Psi_{r'}(n) = \chi(n) \Psi_r(n) \Psi_{r'}(n)).$$

$\chi = \chi'$ $S_{r, r'}(y; \chi)$ を評価する ために,

$$\sum_n B(n) \chi \Psi_r \Psi_{r'}(n) n^{-s} \quad (s > 1)$$

を考へる。 r, r' を square-free とあることに注意して, 是れ

は,

$$\prod_p \left\{ 1 + \Psi_r \Psi_{r'}(p) \sum_{m=1}^{\infty} \chi(p^m) B(p^m) p^{-ms} \right\}$$

$$= F(s, \chi) \prod_p \left((1 - \Psi_r \Psi_{r'}(p)) \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right) \left(1 - \frac{\chi \chi_1(p)}{p^{s+\delta}}\right) + \Psi_r \Psi_{r'}(p) \right)$$

(25)

$$\begin{aligned}
 = & F(s, \chi) \prod_{\substack{p \mid r \\ p \nmid r'}} \left(\left(1 + \frac{1}{g(p)}\right) \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right) \left(1 - \frac{\chi \chi_1(p)}{p^{s+\delta}}\right) - \frac{1}{g(p)} \right) \times \\
 & \times \prod_{\substack{p \nmid r \\ p \mid r'}} \left(\left(1 + \frac{1}{g(p)^2}\right) \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right) \left(1 - \frac{\chi \chi_1(p)}{p^{s+\delta}}\right) + \frac{1}{g(p)^2} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 = & (g(r)g(r'))^{-1} F(s, \chi) \prod_{\substack{p \mid [r, r'] \\ (r, r')}} \left(\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \left(1 - \frac{\chi_1(p)}{p^{1+\delta}}\right)^{-1} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right) \left(1 - \frac{\chi \chi_1(p)}{p^{s+\delta}}\right) - 1 \right) \times \\
 & \times \prod_{p \nmid (r, r')} \left((g(p)^2 + 1) \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right) \left(1 - \frac{\chi \chi_1(p)}{p^{s+\delta}}\right) + 1 \right)
 \end{aligned}$$

$$= (g(r)g(r'))^{-1} F(s, \chi) A_{r, r'}(s, \chi)$$

とある。

反転公式により,

$$g(r)g(r')S_{r, r'}(y; \chi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_0 - i\tau}^{\sigma_0 + i\tau} F(s, \chi) A_{r, r'}(s, \chi) \frac{y^s}{s} ds + O((QR)^{-5})$$

但し $\sigma_0 = 1 + (\log QTRy)^{-1}$, $\tau \gg (QRy)^c$ (c : 充分大),

そして y は奇数の 2 分の 1。

$F(s, \chi)$ は χ の主指標 (mod q) のとき $s=1$ において極数

$L(1+\delta, \chi_1) K(q)$ をもち, しかもこの場合 $(rr', q)=1$ であら

ば, $A_{r, r'}(1, \chi) = g(r)$ ($r=r'$) $A_{r, r'}(1, \chi) = 0$ ($r \neq r'$) であ

る。従って $\delta_{r, r'}$ は Kronecker の δ として, χ, χ' の原始指標であらば, (24) において,

$$\begin{aligned} S_{r, r'}(y; \chi \bar{\chi}') &= y K(q) g(r)^{-1} L(1+\delta, \chi_1) \delta_{r, r'} \delta_{\chi, \chi'} \\ (26) \quad &+ O \left\{ \frac{y^{1/2}}{g(r)g(r')} \int_{-\tau}^{\tau} |F(\frac{1}{2}+it, \chi \bar{\chi}') A_{r, r'}(\frac{1}{2}+it, \chi \bar{\chi}')| \frac{dt}{|t|+1} \right\} \\ &+ O((QR)^{-5}). \end{aligned}$$

但し $\tau = 2\tau$ (17) を用いた。一方

$$\begin{aligned} &|A_{r, r'}(\frac{1}{2}+it, \chi \bar{\chi}')| \\ &\leq \prod_{p | \frac{[r, r']}{(r, r')}} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4}{p^{m/2}} \right\} \prod_{p | (r, r')} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{p^{m/2}} \right\} \\ &\ll (rr')^{\epsilon} [r, r']^{-1/2} \end{aligned}$$

そこで λ は, (26) と (24) に λ を代入して,

$$\begin{aligned}
 J &= L(1+\delta, \chi_1) N \sum_{\substack{r \leq R \\ q \leq Q \\ (q, r)=1}} \sum_{\chi \pmod{q}}^* |b(r, \chi)|^2 \\
 &+ O \left\{ (RQ)^{\varepsilon} M^{1/2} \sum_{\substack{q, q' \leq Q \\ r, r' \leq R \\ (q, r)=(q', r')=1}} (g(r)g(r'))^{-1/2} \sum_{\substack{\chi \pmod{q} \\ \chi' \pmod{q'}}}^* |b(r, \chi)|^2 \int_{-T}^T |F(\frac{1}{2}+it, \chi \bar{\chi}')| \frac{dt}{|t|+1} \right\} \\
 &+ O \left\{ (RQ)^{-5+\varepsilon} \sum_{\substack{q, q' \leq Q \\ r, r' \leq R \\ (q, r)=(q', r')=1}} (g(r)g(r'))^{-1/2} \sum_{\substack{\chi \pmod{q} \\ \chi' \pmod{q'}}}^* |b(r, \chi)|^2 \right\}
 \end{aligned}$$

(27)

$$\begin{aligned}
 &= L(1+\delta, \chi_1) N \sum_{\substack{q \leq Q \\ r \leq R \\ (q, r)=1}} \sum_{\chi \pmod{q}}^* |b(r, \chi)|^2 \\
 &+ O \left((RQ)^2 M^{1/2} \sum_{\substack{q' \leq Q \\ r' \leq R \\ (q', r')=1}} \frac{1}{\sqrt{g(r')r'}} \sum_{\chi \pmod{q'}}^* |b(r', \chi')|^2 I_1 \right) \\
 &+ O \left((RQ)^{-5+\varepsilon} \sum_{\substack{q \leq Q \\ r \leq R \\ (q, r)=1}} \frac{1}{\sqrt{g(r)}} \sum_{\chi \pmod{q}}^* |b(r, \chi)|^2 I_2 \right).
 \end{aligned}$$

但し $I_1 =$

$$I_1 = \left\{ \sum_{r \leq R} \frac{(r, r')^{1/2}}{\sqrt{g(r)r}} \right\} \left\{ \sum_{q \leq Q} \sum_{\chi \pmod{q}}^* \int_{-T}^T |F(\frac{1}{2}+it, \chi \bar{\chi}')| \frac{dt}{|t|+1} \right\},$$

$$I_2 = \left\{ \sum_{r' \leq R} \frac{1}{\sqrt{g(r')}} \right\} \left\{ \sum_{q \leq Q} \sum_{\chi \pmod{q}}^* 1 \right\}.$$

$z \in \overline{\mathbb{Q}}^*$,

$$\begin{aligned}
 (28) \quad g(r) &= \prod_{p|r} \frac{1 + \frac{X_1(p)}{p^\delta} - \frac{X_1(p)}{p^{1+\delta}}}{(p-1)(1 - \frac{X_1(p)}{p^{1+\delta}})} = \prod_{p|r} \left(\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} \left(1 - \frac{X_1(p)}{p^{1+\delta}}\right)^{-1} - 1 \right) \\
 &\geq \prod_{p|r} \left(\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} \left(1 + \frac{1}{p^{1+\delta}}\right)^{-1} - 1 \right) \geq \prod_{p|r} \left(\left(1 - \frac{1}{p^{1+\delta}}\right)^{-1} \left(1 + \frac{1}{p^{1+\delta}}\right)^{-1} - 1 \right) \\
 &\geq \prod_{p|r} \frac{1}{p^{2(1+\delta)}} = r^{-(2+\delta)} \quad (\because r: \text{square-free})
 \end{aligned}$$

z があるとき, $\delta \leq \kappa (\log Q)^{-1} < \varepsilon$ (Q : 充分大) に注意して,

$$\begin{aligned}
 \sum_{r \leq R} \frac{(r, r')^{1/2}}{\sqrt{g(r)r}} &\ll R^\varepsilon \sum_{r \leq R} (r(r', r))^{1/2} \\
 &\ll R^\varepsilon R^{\frac{3}{2}} r'^\varepsilon \ll R^{\frac{3}{2} + \varepsilon},
 \end{aligned}$$

$$\sum_{r' \leq R} \frac{1}{\sqrt{g(r')}} \ll R^{2+\varepsilon}$$

従って, (27) から,

$$\begin{aligned}
 J &= (L(1+\delta, \chi_1) N + O(QR)^{-2+\varepsilon}) \sum_{\substack{q \leq Q \\ r \leq R \\ (q, r)=1}} \sum_{\chi(\bmod q)}^* |b(r, \chi)|^2 \\
 (29) \quad &+ O(Q^\varepsilon R^{2+\varepsilon} M^{1/2} \sum_{\substack{q' \leq Q \\ r' \leq R \\ (q', r')=1}} \sum_{\chi'(\bmod q')}^* |b(r', \chi')|^2 I_3).
 \end{aligned}$$

$==$ 1 =

$$I_3 = \sum_{q \leq Q} \sum_{\chi(\bmod q)}^* \int_{-T}^T |F(\frac{1}{2} + it, \chi \bar{\chi}')|^2 \frac{dt}{|t|+1}.$$

よ、で残るのは、 I_3 の評価であるが、これには Ramachandra [B, p.80-82] の方法を用いるのが一番早い。まず

$$(30) \quad I_3 \leq \left\{ I\left(\frac{1}{2}, \chi\right) I\left(\frac{1}{2} + \delta, \chi' \chi_1\right) \right\}^{1/2}$$

$$I(n, \chi) = \sum_{q \leq Q} \sum_{\chi \pmod{q}}^* \int_{-T}^T |L(n+it, \chi \bar{\xi})|^2 \frac{dt}{|t|+1}.$$

であるから、以下 $I(n, \xi)$, $\xi \pmod{f}$ を考えることにする。

勿論 ξ は原始指標とはかぎらない。そして又、凸性定理によ

り $I(\frac{1}{2}, \xi)$ を考えるのは充分である。

さて

$$(31) \quad \chi \bar{\xi} \text{ をみちびく原始指標を } \chi^* \pmod{q^*} \text{ とする.}$$

このことを明らかに、

$$I\left(\frac{1}{2}, \xi\right) \ll (Qf)^\varepsilon \sum_{q \leq Q} \sum_{\chi \pmod{q}}^* \int_{-T}^T |L\left(\frac{1}{2} + it, \chi^*\right)|^2 \frac{dt}{|t|+1}.$$

そして更に、指標の理論により

$$(32) \quad (n, f) = 1 \text{ であれば } \chi^*(n) = \chi \bar{\xi}(n)$$

である。これは、 χ が原始指標であるから言えるのである。

以下これらのことを注意して、

$$\tilde{I}\left(\frac{1}{2}, \xi\right) = \sum_{q \leq Q} \sum_{\chi \pmod{q}}^* \int_{-T}^T |L\left(\frac{1}{2} + it, \chi^*\right)|^2 dt$$

を評価する = ことにしよう。

$L(s, \chi^*)$ の函数等式を

$$(33) \quad L(s, \chi^*) = \psi(s, \chi^*) L(1-s, \bar{\chi}^*)$$

$$\left(\psi(s, \chi^*) = \varepsilon_{\chi^*} \left(\frac{\pi}{q^*} \right)^{-\frac{1}{2}+s} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}(1-s+a_{\chi^*}))}{\Gamma(\frac{1}{2}(s+a_{\chi^*}))} \right)$$

とかくと出来る。そして

$$Z = (TQf)^{1/2}, \quad s = \frac{1}{2} + it, \quad |t| \leq T$$

とする。Mellin の積分公式を用いて、

$$L(s, \chi^*) = \sum_n \chi^*(n) n^{-s} e^{-n/Z}$$

$$= E(\chi^*) Z^{1-s} \Gamma(1-s) - \frac{1}{2\pi i} \int_{(c)} L(s+w, \chi^*) \Gamma(w) Z^w dw$$

但し $-1 < c < -1/2$ である。この積分を分割して、

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(c)} L(s+w, \chi^*) \Gamma(w) Z^w dw$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{(c_1)} \psi(s+w, \chi^*) \left(\sum_{n \geq 1} \bar{\chi}^*(n) n^{s+w-1} \right) \Gamma(w) Z^w dw$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{(c_1)} \psi(s+w, \chi^*) \left(\sum_{n \geq 1} \bar{\chi}^*(n) n^{s+w-1} \right) \Gamma(w) Z^w dw$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_{(c_2)} \psi(s+w, \chi^*) \left(\sum_{n \leq Z} \bar{\chi}^*(n) n^{s+w-1} \right) \Gamma(w) Z^w dw.$$

$$\text{但し } c_1 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{\log Z}, \quad c_2 = -\frac{1}{\log Z} \quad \text{とある。}$$

$$z \neq 0, \quad c_1 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{\log z} \quad (\operatorname{Re} w = c_1) \quad z \neq 0 \quad (33) \text{ 行}$$

$$(\operatorname{Im} w = v)$$

$$\begin{aligned} \psi(s+w, \chi^*) z^w &\ll z^{-\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}} \frac{(1+t+v+1)^{\frac{1}{2} Q \chi^*}}{(1+t+v+1)^{\frac{1}{2} (Q \chi^* - 1)}} \\ &\ll (T q^*)^{\frac{1}{2}} z^{-\frac{1}{2}} + |v|^{\frac{1}{2}} \left(\frac{q^*}{z}\right)^{1/2} \quad (\because |t| \leq T) \\ &\ll (T Q f)^{1/2} z^{-\frac{1}{2}} + |v|^{1/2} \left(\frac{Q f}{z}\right)^{1/2} \quad (\because q^* \leq Q f) \\ &\ll (T Q f)^{1/4} (1 + |v|^{1/2}). \end{aligned}$$

同様に $z \neq 0$

$$c_2 = -\frac{1}{\log z} \quad (\operatorname{Re} w = c_2) \quad z \neq 0$$

$$\begin{aligned} \psi(s+w, \chi^*) z^w &\ll (\log z) \cdot (1+t+v+1)^{1/\log z} \\ &\ll (\log z) (1 + |v|^{1/2}) \quad (\because |t| \leq T). \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} |L(s, \chi^*)| &\ll \left| \sum_{n \geq 1} \chi^*(n) n^{-s} e^{-n/2} \right| + E(\chi^*) e^{-|t|} (Q f T)^{1/4} \\ &\quad + (T Q f)^{1/4} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \sum_{n \geq 1} \frac{\chi^*(n)}{n^{1 + \frac{1}{\log z} + i(t+v)}} \right| e^{-|v|} (|v|+1)^{1/2} dv \\ &\quad + \log z \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \sum_{n \geq 1} \frac{\chi^*(n)}{n^{\frac{1}{2} + \frac{1}{\log z} + i(t+v)}} \right| e^{-|v|} (|v|+1)^{1/2} dv. \end{aligned}$$

したがって,

$$\widetilde{I}\left(\frac{1}{2}, \varepsilon\right) \ll I^{(1)} + I^{(2)} + I^{(3)} + I^{(4)}$$

$$I^{(1)} = \sum_{q \leq Q} \sum_{\chi(\bmod q)}^* \int_{-T}^T \left| \sum \chi^*(n) m^{-s} e^{-n/Z} \right|^2 dt,$$

$$I^{(2)} = (QfT)^{1/2} \int_{-T}^T e^{-|t|} dt,$$

$$I^{(3)} = (QfT)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} (|v|+1) e^{-|v|} dv \sum_{q \leq Q} \sum_{\chi(\bmod q)}^* \int_{-T}^T \left| \sum_{n > Z} \frac{\chi^*(n)}{n^{1 + (\log Z)^{-1} + i(t+v)}} \right|^2 dt,$$

$$I^{(4)} = (\log Z)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} (|v|+1) e^{-|v|} dv \sum_{q \leq Q} \sum_{\chi(\bmod q)}^* \int_{-T}^T \left| \sum_{n \leq Z} \frac{\chi^*(n)}{n^{\frac{1}{2} + (\log Z)^{-1} + i(t+v)}} \right|^2 dt.$$

$I^{(1)}$ を評価しよう。まず,

$$\begin{aligned} \sum \chi^*(n) m^{-s} e^{-n/Z} &= \sum_{d|f^\infty} \sum_{(n, f^\infty)=d} \chi^*(n) m^{-s} e^{-n/Z} \\ &= \sum_{d|f^\infty} \frac{\chi^*(d)}{d^s} \sum_{(n, f)=1} \chi^*(n) m^{-s} e^{-nd/Z} \end{aligned}$$

但し $d|f^\infty$ は d の素因子の全て f を含むこと, $(n, f^\infty)=d$ と同じ

ように意味をとる。したがって (32) によれば, $=$ は

$$\sum \chi^*(n) m^{-s} e^{-n/Z} = \sum_{d|f^\infty} \frac{\chi^*(d)}{d^s} \sum \chi_{\bar{\xi}}^*(n) m^{-s} e^{-nd/Z}$$

を意味する。よって

$$I^{(1)} \ll \left\{ \sum_{d|f^\infty} \frac{1}{\sqrt{d}} \right\} \left\{ \sum_{d|f^\infty} \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{q \leq Q} \sum_{\chi(\bmod q)}^* \int_{-T}^T \left| \sum \chi_{\bar{\xi}}^*(n) m^{-\frac{1}{2} - it - nd/Z} e^{-n/Z} \right|^2 dt \right\}$$

$$\ll \prod_{p|f} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{p}}\right)^{-1} \sum_{d|f}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_n \frac{n + Q^2 T}{n^{1 + (\log Z)^{-1}}} e^{-nd/Z} \quad (*)$$

$$\ll \prod_{p|f} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{p}}\right)^{-1} \sum_{d|f}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{d}} \left\{ \frac{Z}{d} + Q^2 T \right\} \log Z$$

$$\ll f^{\varepsilon} \left((Q^2 T f)^{1/2} + Q^2 T \right) \log(Q T f)$$

全く同様の評価が, 同じようにして, $I^{(3)}, (I^{(4)})$ にもして証明される。= 3 をまとめると

$$\tilde{I}\left(\frac{1}{2}, \varepsilon\right) \ll (Q^2 T + (Q T f)^{1/2}) f^{\varepsilon} (\log Q T)^2$$

(30) により, 部分積分により

$$I_3 \ll \left\{ Q^2 + (Q q')^{1/2} \right\}^{1/2} \left\{ Q^2 + (Q q, q')^{1/2} \right\}^{1/2 + \varepsilon} (\log T)^3$$

$$\ll Q^{2 + \varepsilon} (\log T)^3.$$

= 3 を (29) に代入すると, $\log T \ll \log(Q R M)$ により

$$J = \left\{ N L(1 + \delta, \chi_1) + O((Q R)^{2 + \varepsilon} M^{1/2 + \varepsilon}) \right\} \sum_{\substack{q \leq Q \\ r \leq R \\ (q, r) = 1}} \sum_{\chi \pmod{q}}^* |b(r, \chi)|^2$$

を得る。= 4 は定理 7 の共役な結果であり, = 4 で証明を終る。

(*) = 2 でよく知られた Gallagher の結果を用いた。

§ 3. 補題

これから、定理 7 にはいくつかの補題をつけくわえて、Gallagher の素数定理の証明を行う訳であるが、まずはじめに、定理 4 と 7 から、容易に、

補題 1. (Motokhashi)

$B(n)$, $g(r)$, $K(q)$, $\Psi_r(n)$ は上記の通りとして、任意の

$T \geq 1$ 及び $\sum |a_n| n^\varepsilon < +\infty$ に対して、

$$\sum_{\substack{q \leq Q \\ r \leq R \\ (q,r)=1}} \frac{\mu^2(r) g(r)}{K(q)} \sum_{\chi(\bmod q)}^* \int_{-T}^T \left| \sum a_n \chi(n) B(n) \Psi_r(n) n^{it} \right|^2 dt$$

$$\ll \sum (L(1+\delta, \chi_1) m + T(QR)^{2+\varepsilon} m^{1/2+\varepsilon}) |a_m|^2 B(n).$$

定理 6 を応用する際に Selberg は更に 2 つの重要な着想を得ているが、そのはじめのものは、

補題 2. (Selberg)

$\eta_d = O(|\mu(d)|)$, r : square-free であれば, $\sigma > 1$

のとき、

$$\sum \chi(n) \Psi_r(n) \left(\sum_{d|n} \eta_d \right) n^{-s} = L(s, \chi) M_r(s, \chi; \eta)$$

$$M_r(s, \chi; \eta) = \sum_d \chi(d) \Psi_r(d) \eta_d \prod_{\substack{p|d \\ p \nmid r}} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^{s-1}} \right).$$

これの我々の場合の類似物は,

補題 3. (Motohashi)

η_d, r は上記と同じとして, $\sigma > 1$ のとき,

$$\sum_n \chi(n) B(n) \Psi_r(n) \left(\sum_{d|n} \eta_d \right) n^{-s}$$

$$= F(s, \chi) \tilde{M}_r(s, \chi; \eta)$$

$$\tilde{M}_r(s, \chi; \eta) = g(r)^{-1} \sum_d \chi(d) \eta_d \mu(r, d) d^{-s} \prod_{p|d} \left(1 + \frac{\chi_1(p)}{p^\sigma} - \frac{\chi \chi_1(p)}{p^{s+\sigma}} \right) \times$$

$$\times \prod_{\substack{p|d \\ p \nmid r}} \left(\left(1 - \frac{1}{p} \right)^{-1} \left(1 - \frac{\chi_1(p)}{p^{s+\sigma}} \right)^{-1} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s} \right) \left(1 - \frac{\chi \chi_1(p)}{p^{s+\sigma}} \right) - 1 \right)$$

これを証明するには, まず χ : square-free のとき

$$\Psi_r(dm) = \Psi_r(d) \Psi_u(n), \quad u = \frac{r}{(r, d)}$$

に注意する. すると,

$$\sum_n \chi(n) B(n) \Psi_r(n) \left(\sum_{d|n} \eta_d \right) n^{-s}$$

$$= \sum_d \chi(d) \eta_d d^{-s} \sum_n \chi(n) B(dm) \Psi_r(dm) n^{-s}$$

$$= \sum_d \chi(d) \eta_d d^{-s} \Psi_r(d) \sum_n \chi(n) B(dm) \Psi_u(n) n^{-s}$$

しかるに, d は square-free としてよいから,

$$\sum_n \chi(n) B(dm) \Psi_u(n) n^{-s} =$$

$$\prod_{p|d} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\chi(p^m)}{p^{ms}} B(p^m) \Psi_u(p^m) \right\} \prod_{p|d} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\chi(p^m)}{p^{ms}} B(p^{m+1}) \Psi_u(p^m) \right\}$$

$p \nmid u$ の $p|d$ の s に対するものは、

$$\begin{aligned} \prod_{p|d} &= \prod_{p|d} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\chi(p^m)}{p^{ms}} B(p^{m+1}) \right) \\ &= \prod_{p|d} \left(1 + \frac{\chi_1(p)}{p^s} - \frac{\chi\chi_1(p)}{p^{s+\delta}} \right) \prod_{p|d} \left(1 - \frac{\chi_1(p)}{p^s} \right)^{-1} \left(1 - \frac{\chi\chi_1(p)}{p^{s+\delta}} \right)^{-1} \end{aligned}$$

一方

$$\prod_{p \nmid d} = \prod_{p \nmid d} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s} \right)^{-1} \left(1 - \frac{\chi\chi_1(p)}{p^{s+\delta}} \right)^{-1} \prod_{p \nmid d} \left\{ 1 + \Psi_u(p) \left(\left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s} \right)^{-1} \left(1 - \frac{\chi\chi_1(p)}{p^{s+\delta}} \right)^{-1} - 1 \right) \right\}.$$

よって、

$$\begin{aligned} &\sum_n \chi(n) B(dn) \Psi_u(n) n^{-s} \\ &= F(s, \chi) \prod_{p|d} \left(1 + \frac{\chi_1(p)}{p^s} - \frac{\chi\chi_1(p)}{p^{s+\delta}} \right) \prod_{p|u} \left(\left(1 - \Psi_u(p) \right) \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s} \right) \left(1 - \frac{\chi\chi_1(p)}{p^{s+\delta}} \right) + \Psi_u(p) \right) \\ &= \frac{F(s, \chi)}{g(u)} \prod_{p|d} \left(1 + \frac{\chi_1(p)}{p^s} - \frac{\chi\chi_1(p)}{p^{s+\delta}} \right) \prod_{p|u} \left(\left(1 - \frac{1}{p} \right)^{-1} \left(1 - \frac{\chi_1(p)}{p^{s+\delta}} \right)^{-1} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s} \right) \left(1 - \frac{\chi\chi_1(p)}{p^{s+\delta}} \right) - 1 \right) \end{aligned}$$

そして、 $\Psi_{u,r}(d)/g(u) = \mu(r, d)/g(r)$ に注意して補足
の証明を終る。

さて Selberg のもう一つの着想は、すでに [S1] に出てい
るのであるが、次のものである。

補題 4 (Selberg)

$\vartheta > 0$, $z > 1$ とし

$$\lambda_d = (\vartheta \log z)^{-1} \{ \lambda_d^{(1)} - \lambda_d^{(0)} \}$$

$$\lambda_d^{(j)} = \begin{cases} \mu(d) \log \frac{z^{1+j\vartheta}}{d} & d \leq z^{1+j\vartheta} \\ 0 & d > z^{1+j\vartheta} \end{cases}$$

とおく。このとき

$$\lambda_d = \mu(d), \quad d \leq z.$$

且つ

$$\sum \left(\sum_{d|m} \lambda_d \right)^2 m^{-\omega} = O_{\vartheta}(1)$$

が条件

$$\omega > 1, \quad 1 \ll (\omega-1) \log z$$

のもとに成立する。

我々の目的には、この結果は弱くてつかえない。そこで、これをつよめたものであるが、そのために、次のような観察をする。(10)にまで戻って、 $z=1$ における Θ_d は $R \rightarrow \infty$ のとき

$$(34) \quad (\log R) \Theta_d \sim \mu(d) \log \frac{R}{d}$$

となる。従って上記の重み $\lambda_d^{(j)}$ は (9) となんらかの関係があると思てよからう。一方又 (34) の右辺は

$$M(R) = \sum_{d < R} \mu(d)$$

の第1 Riesz 平均 $M_1(R)$ にあてはる。

$$M_1(R) = \int_1^R M(y) dy/y.$$

そして更に, λ_d は '第1近似' とも言うべき

$$\{M_1(R^{1+\delta}) - M_1(R)\} (\log R^{1+\delta} - \log R)^{-1}$$

にあてられる。さて, 我々が目的とするのは, $B(n)$ を含むものであり, 上記の事情からみて, (14) を再び観察する必要がある。しかも $B(n)$ は χ_1, δ をふくみ困難である故, $B(n) \subseteq \tau(n)$ (約数函数) に注意して, 一歩ゆずり,

$$\sum_{n \leq N} \tau(n) \left(\sum_{\substack{d|n \\ d \leq R}} \Theta'_d \right)^2, \quad \Theta'_1 = 1$$

を考へることにする。この最適値をもとめると, $R \rightarrow \infty$ のとき

$$\Theta'_d (\log R)^2 \sim \mu(d) \left(\log \frac{R}{d} \right)^2$$

となつてゐる。すなわち, $M(R)$ の第2 Riesz 平均

$$M_2(R) = \int_1^R M_1(y) dy/y,$$

従つて又, '第2近似'

$$(M_2(R^{1+2\delta}) - 2M_2(R^{1+\delta}) + M_2(R)) ((\log R^{1+2\delta})^2 - 2(\log R^{1+\delta})^2 + (\log R)^2)^{-1}$$

を考へればよいのではなからうか。こうして, これを発展させて, 我々は次の結果を証明する。

補題 5. (Motohashi)

 $\vartheta > 0, z > 1$ とし

$$\Lambda_d^{(k)} = \frac{1}{k! (\vartheta \log z)^k} \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \Lambda_d^{(k,j)}$$

$$\Lambda_d^{(k,j)} = \begin{cases} \mu(d) \left(\log \frac{z^{1+j\vartheta}}{d} \right)^k & (d \leq z^{1+j\vartheta}), \\ 0 & (d > z^{1+j\vartheta}). \end{cases}$$

とすると

$$\Lambda_d^{(k)} = \mu(d), \quad d \leq z.$$

且つ

$$\sum \tau_k(n) \left(\sum_{d|n} \Lambda_d^{(k)} \right)^2 n^{-\omega} = O_{\vartheta,k}(1) \quad (*)$$

が条件

$$\omega > 1, \quad 1 \ll (\omega-1) \log z$$

のもとに成立する。

まず $d \leq z$ では

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \Lambda_d^{(k,j)} &= \mu(d) \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \left(\log \frac{z^{1+j\vartheta}}{d} \right)^k \\ &= \mu(d) \sum_{l=0}^k (-1)^{k-l} \binom{k}{l} (\log z)^l (\log d)^{k-l} \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} (1+j\vartheta)^l. \end{aligned}$$

したがってよく知られたことより

$$\sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} j^l = \begin{cases} k! & (l=k), \\ 0 & (l < k). \end{cases}$$

(*)

$$\tau_k(n) = \sum_{m=u_1 u_2 \cdots u_k} 1$$

であるから, 上記の和は $\mu(d)k!(\log z)^k$ となり補題の前半は証明された。次に後半を証明するには,

$$D_j = \sum_n \tau_k(n) \left(\sum_{d|n} \Lambda_d^{(k,j)} \right)^2 n^{-\omega} = O((\log z)^{2k})$$

$j = 0, 1, 2, \dots, k$

を示せば充分である。それに又, 当然のことながら,

$$1 \ll (\omega-1)\log z \ll 1$$

と仮定してよからう。結局, この条件下で, $j=0$ のときのみを考へればよいことになる。さて,

$$D_0 = \sum_{d_1, d_2} \frac{\Lambda_{d_1}^{(k,0)} \Lambda_{d_2}^{(k,0)}}{[d_1, d_2]^\omega} \sum_n \tau_k([d_1, d_2]n) n^{-\omega}$$

$d = [d_1, d_2]$ は square-free としてよからう

$$\begin{aligned} \sum_n \tau_k(dn) n^{-\omega} &= \prod_{p|d} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\tau_k(p^m)}{p^{m\omega}} \right) \prod_{p \nmid d} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\tau_k(p^{m+1})}{p^{m\omega}} \right) \\ &= \prod_{p|d} \left(1 - \frac{1}{p^\omega} \right)^{-k} \prod_{p \nmid d} p^\omega \left(\left(1 - \frac{1}{p^\omega} \right)^{-k} - 1 \right) \\ &= \zeta(\omega)^k \prod_{p|d} p^\omega \left(1 - \left(1 - \frac{1}{p^\omega} \right)^k \right). \end{aligned}$$

すなわち,

$$D_0 = \zeta(\omega)^k \sum_{d_1, d_2} \Lambda_{d_1}^{(k,0)} \Lambda_{d_2}^{(k,0)} \prod_{p|d_1, d_2} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{p^\omega} \right)^k \right)$$

これを

$$(35) \quad D_0 = \zeta(\omega)^k E$$

と書く。

Selberg の節 の方法で変形すれば

$$\begin{aligned} E &= \sum_d \prod_{p|d} \left(\left(1 - \frac{1}{p^\omega}\right)^{-k} - 1 \right)^{-1} \left\{ \sum_{d|u} \Lambda_u^{(k,0)} \prod_{p|u} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{p^\omega}\right)^k\right) \right\}^2 \\ &= \sum_{d \in \mathbb{Z}} \prod_{p|d} \left(1 - \frac{1}{p^\omega}\right)^k \left(1 - \left(1 - \frac{1}{p^\omega}\right)^k\right) \left\{ \sum_{\substack{u \in \mathbb{Z}/d \\ (u,d)=1}} \Lambda_{du}^{(k,0)} \prod_{p|u} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{p^\omega}\right)^k\right) \right\}^2 \end{aligned}$$

と $\tilde{E}$ とが容易にわかる。 $= \tilde{E}$

$$(36) \quad E = \sum_{d \in \mathbb{Z}} \prod_{p|d} \left(1 - \frac{1}{p^\omega}\right)^k \left(1 - \left(1 - \frac{1}{p^\omega}\right)^k\right) \left\{ E_d(\mathbb{Z}/d) \right\}^2$$

と $k < \infty$ にする。 $\tilde{E}$ と,

$$\begin{aligned} E_d(x) &= \sum_{\substack{n \leq x \\ (n,d)=1}} \mu(n) \left(\log \frac{x}{n} \right)^k \prod_{p|n} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{p^\omega}\right)^k\right) \\ (37) \quad &= \frac{k!}{2\pi i} \int_{(2)} \left\{ \sum_{(n,d)=1} \frac{\mu(n)}{n^s} \prod_{p|n} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{p^\omega}\right)^k\right) \right\} \frac{x^s}{s^{k+1}} ds \end{aligned}$$

しかるに,

$$\begin{aligned} \sum_{(n,d)=1} \frac{\mu(n)}{n^s} \prod_{p|n} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{p^\omega}\right)^k\right) &= \prod_{p \nmid d} \left(1 - \frac{1}{p^s} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{p^\omega}\right)^k\right)\right) \\ &= \zeta(s+\omega)^{-k} \prod_{p|d} \left(1 - \frac{1}{p^{s+\omega}}\right)^{-k} \prod_{p \nmid d} \left(1 - \frac{1}{p^{s+\omega}}\right)^k \left(1 - \frac{1}{p^s} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{p^\omega}\right)^k\right)\right) \\ &= \zeta(s+\omega)^{-k} Y_d(s). \end{aligned}$$

すなわち $\tilde{E}$ には, $Y_d(s)$ は $\sigma \geq -3/4$ で絶対収束し,

かつ

$$Y_d(s) \ll \prod_{p|d} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{p}}\right)^k \quad (\sigma \geq -1/2)$$

が d について 一樣に成立する。(37)で積分路を

$$l: \sigma = 1 - \omega - c(\log(|t|+2))^{-1}, \quad (c: \text{充分小})$$

にうつすまゝに、次のように注意する。

$$l \text{ 上 } \zeta(s+\omega) \ll \log(|t|+2)$$

又 $s=0$ の近くで

$$\zeta(s+\omega)^{-k} = \sum_{j=0}^{\infty} O((\omega-1)^{k-j}) s^j,$$

$$Y_d(s) = \sum_{j=0}^{\infty} O\left(\prod_{p|d} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{p}}\right)^k\right) s^j.$$

ゆゑより (37) から

$$\begin{aligned} E_d(x) &= \frac{k!}{2\pi i} \operatorname{Res} \left\{ \zeta(s+\omega)^{-k} Y_d(s) x^s s^{-k-1} \right\}_{s=0} \\ &\quad + \frac{k!}{2\pi i} \int_l \zeta(s+\omega)^{-k} Y_d(s) x^s s^{-k-1} ds \end{aligned}$$

$$\ll \prod_{p|d} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{p}}\right)^k \sum_{j=0}^k ((\omega-1) \log x)^k$$

$$+ \prod_{p|d} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{p}}\right)^k \int_l (\log(|t|+2))^k \frac{x^{-\sigma}}{|s|^{k+1}} |ds|$$

$$= O \left(|t| \leq \exp((\log x)^{1/2}), |t| > \exp((\log x)^{1/2}) \text{ に対して} \right)$$

2

$$E_d(z) \ll \prod_{p|d} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{p}}\right)^k \left\{ \sum_{j=0}^k (\omega-1) \log z)^j + \exp(-c(\log z)^{1/2}) \right\}$$

従って $(\omega-1) \log z \ll 1$ と仮定していいのであるから,

$$E_d(z/d) \ll \prod_{p|d} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{p}}\right)^k.$$

よって, (36) から,

$$E \ll (\log z)^k$$

が直ちに従う。よって (35) から

$$\begin{aligned} D_0 &\ll (\log z)^k \zeta(\omega)^k \\ &\ll (\log z)^k (\omega-1)^{-k} \ll (\log z)^{2k}. \end{aligned}$$

よって 補題 5 の証明を終る。

補題の応用の一つとして, 後で有用な次のことを示しておく。

補題 6.

$\widetilde{M}_x(s, \chi; \eta)$ は 補題 3 の通りとして, $z \geq z_1^E$, $R \leq z^{1+\varepsilon}$ であるとき,

$$\sum_{x \leq R} \mu^2(x) g(x) |\widetilde{M}_x(1, \chi_0; \Lambda^{(2)})|^2 \ll (L(1+\delta, \chi_1) \log z)^{-1}.$$

補題 3 からわかるように,

$$\widetilde{M}_x(1, \chi_0; \Lambda^{(2)}) = \frac{\mu(x)}{g(x)} \sum_{\substack{d \leq x^{1+2\theta} \\ x|d}} \frac{\Lambda_d^{(2)}}{d} \prod_{p|d} \left(1 + \frac{\chi_1(p)}{p^\delta} - \frac{\chi_1(p)}{p^{1+\delta}}\right).$$

よ、 τ

$$\begin{aligned} & \sum_{x \leq R} \mu^2(x) g(x) |\widetilde{M}_x(1, \chi_0; \Lambda^{(2)})|^2 \\ &= \sum_{x \leq R} \frac{\mu^2(x)}{g(x)} \left\{ \sum_{\substack{d \leq x^{1+2\theta} \\ x|d}} \frac{\Lambda_d^{(2)}}{d} \prod_{p|d} \left(1 + \frac{\chi_1(p)}{p^\delta} - \frac{\chi_1(p)}{p^{1+\delta}}\right) \right\}^2 \\ &\leq \sum_x \frac{\mu^2(x)}{g(x)} \left\{ \sum_{x|d} \frac{\Lambda_d^{(2)}}{d} \prod_{p|d} \left(1 + \frac{\chi_1(p)}{p^\delta} - \frac{\chi_1(p)}{p^{1+\delta}}\right) \right\}^2 \end{aligned}$$

(Selbergの方法を逆に用いて)

$$= \sum_{d_1, d_2} \frac{\Lambda_{d_1}^{(2)} \Lambda_{d_2}^{(2)}}{[d_1, d_2]} \prod_{p|d_1, d_2} \left(1 + \frac{\chi_1(p)}{p^\delta} - \frac{\chi_1(p)}{p^{1+\delta}}\right).$$

これを H とおく。ことにする。(18) に代えて

$$\begin{aligned} & \sum_{m \leq N} B(m) \left(\sum_{d|m} \Lambda_d^{(2)} \right)^2 \\ &= N L(1+\delta, \chi_1) H + O\left((N^{\frac{1}{2}} q_1^{\frac{1}{4}} x^{1+2\theta})^{1+\varepsilon} \right). \end{aligned}$$

従って部分積分により、任意の $\omega > 1$ に対して、

$$\begin{aligned} & \sum_{m > x^b} B(m) \left(\sum_{d|m} \Lambda_d^{(2)} \right)^2 m^{-\omega} \\ &= L(1+\delta, \chi_1) H (\omega-1)^{-1} x^{-b(\omega-1)} + O\left(q_1^{\frac{1}{4}+\varepsilon} x^{1+2\theta-(\omega-\frac{1}{2})b+\varepsilon} \right). \end{aligned}$$

そこで、 b を充分大にとり、 $B(m) \leq \tau(m)$ に注意すれば、 $\omega =$

$1 + (\log x)^{-1}$ ととることにより補題5により、

$$L(1+\delta, \chi_1) H(\omega-1)^{-1} z^{-b(\omega-1)} = O(1),$$

すなわち $L(1+\delta, \chi_1) H \log z \ll 1$. これは補題6の結果である。

更に下記のことをつけくわえておく。

補題7.

(22) における $G(R)$ について

$$G(R) \geq (2\delta)^{-1} L(1+\delta, \chi_1) + O(q_1^{\frac{1}{4}+\varepsilon} R^{-\frac{1}{2}+\varepsilon})$$

更に

$$L(1+\delta, \chi_1) \gg \delta \gg q_1^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}.$$

$\delta \gg q_1^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}$ であることはよく知られているので、その他のことを証明する。

$$G(R) = \sum_{r \leq R} \mu^2(r) g(r) \geq R^{-2\delta} \sum_{r \leq R} \mu^2(r) g(r) r^{2\delta}$$

所で

$$\begin{aligned} \sum_r \mu^2(r) g(r) r^{2\delta-s} &= \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^{s-2\delta}} \frac{1 + \frac{\chi_1(p)}{p^\delta} - \frac{\chi_1(p)}{p^{1+\delta}}}{(p-1)(1 - \frac{\chi_1(p)}{p^{1+\delta}})} \right) \\ &= \zeta(s+1-2\delta) L(s+1-\delta, \chi_1) A(s). \end{aligned}$$

ここに $A(s)$ は $\sigma > -1$ で絶対収束し、 $\sigma = 0$ で有界である。

従って、反転公式により ($A(2\delta) = 1$ に注意して)

$$\sum_{r \leq R} \mu^2(r) g(r) r^{2\delta} = \frac{L(1+\delta, \chi_1)}{2\delta} R^{2\delta} + O(R^{-\frac{1}{2}+\epsilon} q_1^{\frac{1}{4}+\epsilon})$$

が (17) を通して得られる。これは $G(R)$ の下からの評価をあたえる。又、この等式の左辺は明らかに 1 以上であるから、 R を充分大きくとれば

$$\frac{L(1+\delta, \chi_1)}{2\delta} R^{2\delta} > 1/2$$

となる。しかるに R は q_1 の適当な冪に与れ、且 $\delta \ll (\log Q)^{-1} \leq (\log q_1)^{-1}$ であるから 此れより $L(1+\delta, \chi_1) \gg \delta$ がしたがう。これで補題 7 の証明を終る。

§ 4. 定理 5 の証明.

以上を準備として Gallagher の素数定理の新証明をあたえる。しかし、ここでは、例外指標が存在する場合のみを考へることとする。例外指標が存在しない場合には序で注意したように、Selberg の定理 6 から証明がみちびかれるのであるが、その議論は以下のものと酷似しており、しかもより単純である。

さて 例外指標が存在する場合は、(3)(4)(5) から、線分

$$\sigma = \sigma_0 = 1 - K(\log QT)^{-1}, \quad |t| \leq T = Q^5$$

の上で

$$(38) \quad \frac{L'}{L}(s, \chi) = O(\log Q)$$

が全ての原始指標 $\chi \pmod{q}$, $q \leq Q$ に対して成立する。こゝで

$$\sigma_0 = 1 - K(\log Q)^{-1} < 1 - \frac{K}{10}(\log Q)^{-1} \leq 1 - \delta$$

であるから, $\widetilde{\Psi}(x, \chi)$ の定義により

$$\widetilde{\Psi}(x, \chi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_0 - iT}^{\sigma_0 + iT} \left\{ -\frac{L'}{L}(s, \chi) \right\} \frac{x^s}{s} ds + O\left(\frac{x}{T} (\log Qx)^2\right)$$

と書けることも容易にわかる。次に Heilbromm-Gallagher のよく知られた変形を応用するのであるが, $\Lambda^{(2)}$ 従って $\mathcal{J}$, $\mathcal{Z}$ は補題 5 により定義されたものとして,

$$\begin{aligned} -\frac{L'}{L}(s, \chi) &= -\frac{L'}{L}(s, \chi) \left(1 - F(s, \chi) \widetilde{M}_r(s, \chi; \Lambda^{(2)}) \right)^2 \\ &\quad - \left\{ 2L'(s, \chi)L(s+\delta, \chi\chi_1)\widetilde{M}_r(s, \chi; \Lambda^{(2)}) \right. \\ &\quad \left. - L(s, \chi)L'(s, \chi)L^2(s+\delta, \chi\chi_1)\widetilde{M}_r(s, \chi; \Lambda^{(2)})^2 \right\} \\ &= -\frac{L'}{L}(s, \chi) U_r(s, \chi)^2 + V_r(s, \chi) \end{aligned}$$

と置く。こうして,

$$\begin{aligned} \widetilde{\Psi}(x, \chi) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_0 - iT}^{\sigma_0 + iT} \left\{ -\frac{L'}{L}(s, \chi) \right\} U_r(s, \chi)^2 \frac{x^s}{s} ds \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_0 - iT}^{\sigma_0 + iT} V_r(s, \chi) \frac{x^s}{s} ds + O\left(\frac{x}{T} (\log Qx)^2\right). \end{aligned}$$

次に, この第 2 の積分において積分路を

$$\sigma = \sigma_1 = (\log x)^{-1}, \quad |t| \leq T \quad (= Q^5)$$

に変えるのであるが、その前に $U_r(s, \chi)$, $V_r(s, \chi)$ の評価をしておく必要がある。補題3及び $\Lambda^{(2)}$ の定義から、 $0 \leq \sigma \leq 1$ において

$$\begin{aligned} & \widetilde{M}_r(s, \chi; \Lambda^{(2)}) \\ & \ll g(r)^{-1} \sum_{d \leq z^{1+2\theta}} d^{-\sigma} \prod_{p|d} \left(1 + \frac{1}{p^\sigma} + \frac{1}{p^{\sigma+\delta}}\right) \prod_{\substack{p|d \\ p \nmid r}} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{p^{m\sigma}}\right) \\ & \ll g(r)^{-1} (rz)^\varepsilon \sum_{d \leq z^{1+2\theta}} d^{-\sigma} \frac{(r, d)^\sigma}{r^\sigma} \\ & \ll \frac{(rz)^\varepsilon}{r^\sigma g(r)} z^{(1+2\theta)(1-\sigma)} \end{aligned}$$

よって (17) と 組み合わせる

$$\begin{aligned} U_r(s, \chi) & \ll \frac{1}{r^{\sigma-\varepsilon} g(r)} (z^{1+2\theta} q q_1^{\frac{1}{2}} (1+1))^{1-\sigma+\varepsilon}, \\ V_r(s, \chi) & \ll \frac{1}{r^{2\sigma-\varepsilon} g(r)^2} (z^{1+2\theta} q q_1^{\frac{1}{2}} (1+1))^{2(1-\sigma)+\varepsilon}. \end{aligned}$$

が $\chi \pmod{q}$, $|s-1| \geq 1/2$, $0 \leq \sigma \leq 1$ のとき成立する。そこで更に次のように各変数を定める。

$$\begin{aligned} q & \leq Q, \quad r \leq R, \quad R = Q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}, \quad T = Q^5, \quad z = (Q^5 R^4 T^2)^{1+\varepsilon}, \\ \theta & = \varepsilon, \quad x/Q \leq h \leq x, \quad \log x \leq (\log Q)^2 \end{aligned}$$

により

$$\begin{aligned} (39) \quad U_r(s, \chi) & \ll \frac{1}{r^\sigma g(r)} (Q^{17} T^6)^{\frac{1}{2}(1-\sigma)+\varepsilon} \\ V_r(s, \chi) & \ll \frac{1}{(r^\sigma g(r))^2} (Q^{17} T^6)^{1-\sigma+\varepsilon} \end{aligned}$$

が

$0 \leq \sigma \leq \sigma_0$, $|t| \leq T$, $\chi \pmod{q}$, $q \leq Q$, $r \leq R$

で成立してゐる。さてこの $V_r(s, \chi)$ の評価から

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}(x, \chi) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_0 - iT}^{\sigma_0 + iT} \left\{ -\frac{L'}{L}(s, \chi) \right\} U_r(s, \chi)^2 \frac{x^s}{s} ds \\ &\quad + O\left(g(r)^{-2} (Q^{17} T^6)^{1+\varepsilon}\right) + O\left(\frac{x Q^\varepsilon}{(rg(r))^2 T}\right) \end{aligned}$$

ここで $(rg(r)) \ll x^\varepsilon$ を用いた。(38)により,

$$\begin{aligned} |\tilde{\Psi}(x+h, \chi) - \tilde{\Psi}(x, \chi)| \\ &\ll h \log Q \exp\left(-\kappa \frac{\log x}{\log QT}\right) \int_{-T}^T |U_r(\sigma_0 + it, \chi)|^2 dt \\ &\quad + g(r)^{-2} (Q^{17} T^6)^{1+\varepsilon} + (rg(r))^{-2} T^{-1} Q^\varepsilon x. \end{aligned}$$

この両辺に $\mu^2(r)g(r)$ を乗じて, $r \leq R$, $(r, q) = 1$ について和をとれば (23) (28) に注意して

$$\begin{aligned} K(q)G(R) |\tilde{\Psi}(x+h, \chi) - \tilde{\Psi}(x, \chi)| \\ &\ll h \log Q \exp\left(-\kappa \frac{\log x}{\log QT}\right) \sum_{\substack{r \leq R \\ (r, q) = 1}} \mu^2(r)g(r) \int_{-T}^T |U_r(\sigma_0 + it, \chi)|^2 dt \\ &\quad + (R^3 Q^{17} T^6)^{1+\varepsilon} + R Q^\varepsilon T^{-1} x \end{aligned}$$

更に $K(q)^{-1}$ を乗じて, χ 原始 $\pmod{q}$, $q \leq Q$ について加えれば

$$\begin{aligned} G(R) \sum_{q \leq Q} \sum_{\chi \pmod{q}}^* |\tilde{\Psi}(x+h, \chi) - \tilde{\Psi}(x, \chi)| \\ &\ll h \log Q \exp\left(-\kappa \frac{\log x}{\log QT}\right) \sum_{\substack{q \leq Q \\ r \leq R \\ (q, r) = 1}} \frac{\mu^2(r)g(r)}{K(q)} \sum_{\chi \pmod{q}}^* \int_{-T}^T |U_r(\sigma_0 + it, \chi)|^2 dt \end{aligned}$$

$$+ (R^3 Q^{19} T^6)^{1+\varepsilon} + \chi R Q^{2+\varepsilon} T^{-1}.$$

さて,

$$I = \sum_{\substack{q \leq Q \\ r \leq R \\ (q, r)=1}} \frac{\mu^2(r) g(r)}{K(q)} \sum_{\chi(\bmod q)}^* \int_{-T}^T |U_r(\sigma_0 + it, \chi)|^2 dt$$

とおく。これの評価には、零点密度理論がよく用いられる方法をつかう。すなわち、 $U_r(s, \chi)$ の Mellin 変換をつかうのである。このために

$$X = (Q^3 T^2)^5$$

とする。そして

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{(2)} U_r(s+w, \chi) \Gamma(w) X^w dw \\ &= \sum_{n>1} \chi(n) B(n) \Psi_r(n) \left(\sum_{d|n} \Lambda_d^{(2)} \right) n^{-s} e^{-n/X} \\ &= W_r^{(1)}(s, \chi) \end{aligned}$$

とおく。積分路を $\operatorname{Re}(w) = -\sigma_0$ とおき $\sigma = \sigma_0 + \varepsilon$ により, (39) に注意して

$$\begin{aligned} W_r^{(1)}(s, \chi) &= E(\chi) L(1+\delta, \chi_1) T(1-s) X^{1-s} \tilde{M}_r(1, \chi; \Lambda^{(2)}) K(q) \\ &\quad + U_r(s, \chi) + O(g(r)^{-1} X^{-\sigma_0} (Q^{17} T^6)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}) \end{aligned}$$

$$= W_r^{(2)}(s, \chi) + U_r(s, \chi) + O(W_r^{(3)}(s, \chi))$$

とおく。すると,

$$I \ll I^{(1)} + I^{(2)} + I^{(3)}.$$

$I^{(1)}$ は I の定義における $U_r(s, \chi)$ を $W_r^{(1)}(s, \chi)$ で置きかえたものである。

まず $I^{(1)}$ については, $\Lambda_d^{(2)} = \mu(d)$ ($d \leq z$) であるから, 補題 1 により

$$\begin{aligned} I^{(1)} &= \sum_{\substack{q \leq Q \\ r \leq R \\ (q, r)=1}} \frac{\mu^2(r)g(r)}{K(q)} \sum_{\chi(\bmod q)}^* \int_{-T}^T \left| \sum_{n \geq z} \chi(n) B(n) \Psi_r(n) \left(\sum_{d|m} \Lambda_d^{(2)} \right) n^{-\sigma_0 - it} e^{-\frac{n}{X}} \right|^2 dt \\ &\ll \sum_{n \geq z} (L(1+\delta, \chi_1) m + T(QR)^{2+\varepsilon} m^{\frac{1}{2}+\varepsilon}) \left(\sum_{d|m} \Lambda_d^{(2)} \right)^2 B(n) n^{-2\sigma_0} e^{-2\frac{n}{X}} \end{aligned}$$

しかるに 補題 7 により

$$\begin{aligned} &L(1+\delta, \chi_1) m + T(QR)^{2+\varepsilon} m^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \\ &\ll L(1+\delta, \chi_1) m \left(1 + \frac{Q^{\frac{5}{2}+\varepsilon} R^{2+\varepsilon}}{\sqrt{m}} m^{\varepsilon} T \right) \end{aligned}$$

である故, 前に仮定したように $z = (Q^5 R^4 T^2)^{1+\varepsilon}$ とおけば

$$\begin{aligned} I^{(1)} &\ll L(1+\delta, \chi_1) \sum_m B(n) \left(\sum_{d|m} \Lambda_d^{(2)} \right)^2 m^{1-2\sigma_0} e^{-2\frac{n}{X}} \\ &\ll L(1+\delta, \chi_1) \sum_{m \leq X^2} B(n) \left(\sum_{d|m} \Lambda_d^{(2)} \right)^2 m^{1-2\sigma_0} e^{-2\frac{n}{X}} \\ &\ll L(1+\delta, \chi_1) \sum_{m \leq X^2} B(n) \left(\sum_{d|m} \Lambda_d^{(2)} \right)^2 m^{-1-(\log Q)^{-1}} \end{aligned}$$

この最後の不等式は $m \leq X^2$ であるとき $m^{1-2\sigma_0} \ll m^{-1-(\log Q)^{-1}}$

であることによるのである。ここで更に $B(n) \leq \tau(n)$ を注意し

て、結局、補題 5 により、

$$\begin{aligned} I^{(1)} &\ll L(1+\delta, \chi_1) \sum_n \tau(n) \left(\sum_{d|n} \Lambda_d^{(2)} \right)^2 n^{-1-(\log Q)^{-1}} \\ &\ll L(1+\delta, \chi_1) \quad (\because \log Q \gg \log z). \end{aligned}$$

次に $I^{(2)}$ については、

$$\begin{aligned} I^{(2)} &\ll L(1+\delta, \chi_1)^2 \sum_{r \leq R} \mu^2(r) g(r) \int_{-T}^T |T(1-\sigma_0+it) Z^{1-\sigma_0+it}|^2 dt \times \\ &\quad \times |M_r(1, \chi_0; \Lambda^{(2)})|^2 \end{aligned}$$

したがって

$$\int_{-T}^T |T(1-\sigma_0+it)|^2 dt \ll (1-\sigma_0)^{-1} \ll \log Q$$

であるから、

$$I^{(2)} \ll L(1+\delta, \chi_1)^2 \log Q \sum_{r \leq R} \mu^2(r) g(r) |M_r(1, \chi_0; \Lambda^{(2)})|^2$$

ここで明らかに補題 6 の条件が満たされてゐる故

$$\begin{aligned} I^{(2)} &\ll L(1+\delta, \chi_1)^2 \log Q \quad (L(1+\delta, \chi_1) \log z)^{-1} \\ &\ll L(1+\delta, \chi_1). \end{aligned}$$

$$\text{又} \quad W_r^{(3)}(s, \chi) \ll (Q^{17} T^6)^{\frac{1}{2}+\varepsilon} g(r)^{-1} X^{-1}$$

より、

$$I^{(3)} \ll (R Q^{19} T^7)^{1+\varepsilon} X^{-2} \ll Q^{-1} \ll L(1+\delta, \chi_1)$$

以上より

$$I \ll L(1+\delta, \chi_1).$$

すなわち,

$$\sum_{q \leq Q} \sum_{\chi \pmod{q}}^* |\tilde{\Psi}(x+h, \chi) - \tilde{\Psi}(x, \chi)|$$

$$\ll h \log Q \exp\left(-\kappa \frac{\log x}{\log QT}\right) L(1+\delta, \chi_1) G(R)^{-1} \\ + (R^3 Q^{14} T^6)^{1+\varepsilon} + 2RQ^{2+\varepsilon} T^{-1}.$$

補題 7 により

$$\sum_{q \leq Q} \sum_{\chi \pmod{q}}^* |\tilde{\Psi}(x+h, \chi) - \tilde{\Psi}(x, \chi)|$$

$$\ll h \delta \log Q \exp\left(-\kappa \frac{\log x}{\log QT}\right) + (Q^{\frac{41}{2}} T^6)^{1+\varepsilon} + 2Q^{\frac{5}{2}+\varepsilon} T^{-1}$$

$$\ll h \delta \log Q \exp\left(-\kappa \frac{\log x}{\log QT}\right) \left\{ 1 + (h\delta)^{-1} \exp\left(\kappa \frac{\log x}{\log QT}\right) (Q^{\frac{41}{2}} T^6)^{1+\varepsilon} \right. \\ \left. + (Th\delta)^{-1} 2 \exp\left(\kappa \frac{\log x}{\log QT}\right) Q^{\frac{5}{2}+\varepsilon} \right\}$$

さて, $T = Q^5$ とおくと

$$(h\delta)^{-1} \exp\left(\kappa \frac{\log x}{\log QT}\right) (Q^{\frac{41}{2}} T^6)^{1+\varepsilon}$$

$$\ll \frac{1}{h} Q^{51+\varepsilon} \exp\left(-\frac{\kappa}{6} \frac{\log x}{\log Q}\right)$$

$$\ll \frac{1}{h} Q^{52+\varepsilon} \quad (\because (\log x)/\log Q \leq \log Q)$$

すなわち $h \geq Q^{52}$ を要求する。

一方

$$\frac{x}{Th\delta} \exp\left(k \frac{\log x}{\log Q}\right) Q^{\frac{5}{2}+\varepsilon} \\ \ll \frac{x}{h} Q^{-2+\frac{k}{6}+\varepsilon} \ll Q^{-1+\frac{k}{6}+\varepsilon} \quad (\because x/h \leq Q)$$

以上から

$$x \geq Q^{53}$$

とすれば

$$\sum_{q \leq Q} \sum_{\chi(\bmod q)}^* |\tilde{\varphi}(x+h, \chi) - \tilde{\varphi}(x, \chi)| \\ \ll h \delta \log Q \exp\left(-\frac{k}{6} \frac{\log x}{\log Q}\right)$$

これより定理5の証明を終る。

— 付記 —

第2及び3節でのベータとは、 $B(n)$ のかわりに、乗法的函数 $f(n)$ について一般化できるのであるが、ここでは、簡単のために、 $f(n)$ に次の条件をつけることにする。

(I) 全ての n について $f(n) \geq 0$, $f(n) \ll \tau_k(n)$.

(II) $F_p(s) = \sum_{m=0}^{\infty} f(p^m) p^{-ms}$, $F_p(1) = F_p$ とかくとき,

全ての p について $F_p - 1 \geq c p^{-\alpha}$ とする常数 c , $\alpha > 0$ が存在する。

(III) 全ての p , 及び $\alpha > 0$ について,

$$F_p(s)^{-1} = \sum_{m=0}^{\infty} f_1(p^m) p^{-ms}$$

とある乗法的函数 f_1 が存在する。

(IV) 量 $\mathcal{O}$, $D > 0$, $D^\varepsilon \gg \mathcal{O}$, が存在し, 任意の $\chi(\bmod q)$

に対して

$$\sum_{m \leq y} \chi(m) f(m) = y \mathcal{O} K_f(q) E(\chi) + O(D y^\beta q^r)$$

とある $\beta, r \geq 0$ が存在する。但し $\chi = 1$ なら $K_f(q) = \prod_{p|q} F_p^{-1}$

これらの条件 (とくに (III)) はゆるめる = ともかくあるが, =

ではくわしい = ともかくある = となる。

定理 7 に対応して

定理 7A

f により条件 (I) - (IV) を仮定する。又

$$g_f(x) = \prod_{p|x} (F_p - 1^{-1}), \quad \Psi_x(m; f) = \mu(x, m) g_f(x, m)^{-1}$$

とある。このとき, $M \gg N$ であるとき,

$$\sum_{\substack{q \leq Q \\ x \leq R \\ (q, x) = 1}} \frac{\mu^2(x) g_f(x)}{K_f(q)} \sum_{\chi(\bmod q)}^* \left| \sum_M^{M+N} a_n \chi(n) f(n)^{1/2} \Psi_x(n; f) \right|^2$$

$$\leq (\mathcal{O} N + O_\varepsilon(Y_f(M; Q, R))) \sum_M^{M+N} |a_n|^2.$$

$$Y_f(M; Q, R) = \{DM^\beta Q^{2(1+\gamma)} (R^{\alpha-2\beta+1} + R^{\frac{\alpha}{2}-\beta+1})\}^{1+\varepsilon}$$

参考文献

- [B] E. Bombieri, Le grand crible dans la théorie analytique des nombres. Soc. Math. France, Astérisque no. 18 (1974).
- [F] E. Fogels, On the zeros of L -functions. Acta Arith., 11, 67-96 (1965).
- [G] P. X. Gallagher, A large sieve density estimate near $\sigma = 1$. Inventiones Math., 11, 329-339 (1970).
- [K] S. Knapowski, On Linnik's theorem concerning exceptional L -zeros. Publ. Math. Debrecen 9, 168-178 (1962).
- [L₁] U. V. Linnik, On the least prime in an arithmetic progression. I. The basic theorem. Rec. Math., 15, 139-178 (1944).
- [L₂] ———, ——— II. The Dering-Heilbronn phenomenon. ibid. 347-368.
- [P] K. Prachen, Primzahlverteilung. Springer (1957).
- [S] A. Selberg, Remarks on sieves. Proc. 1972 Number Theory Conf. Boulder, 205-216.
- [T] P. Turán, On a density theorem of Yu. V. Linnik. Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci., 6, 165-179 (1961).

(1977年3月9日 記)