

大型構造解析における数値計算法について

三菱重工業 長崎研究所 志岐 邦夫

1. はじめに

船舶、航空機等の大型構造解析を対象として、最近、~~構造~~有限要素法に基づく、構造解析用汎用プログラムが数多く
(表-1に示す)と
開発され始めている。

筆者も、この数年、有限要素法による構造解析に関わつた。また、それらを通じて経験したこと、或いは文献等を通じて知り得た事柄について、特に計算機に関連した、数値計算 Algorithm に重点を置いて、概説してみたい。

一般的に云つて、大型構造解析に於ける数値計算の特徴として

①対象構造が複雑で、Analytical に解けず、数値計算によらねばならぬこと。

②計算時の未知数も数百ないし数千と次数の高いこと。

③類似の構造、荷重条件での計算頻度の高いこと。

iv) おみやかに答を出すこと。精度はどちらかといえば二次的に考えられる。

v) 或程度の費用はかかることが出来る。

vi) 計算機に適した Algorithm であること。

事が挙げられよう。今のところは、これらの特徴を持つものとして有限要素法があり、この場合の例は、本法が、大型構造解析の主要を占めるものと考えられる。

有限要素法は、原理的には簡単であるけれども、大型構造解析を対象とするとき、取扱う連立方程式は数百ないし数千元となる。よって、通常の数値解法では処理し得ず、効率の良い解法を求めて、単に数学的考察のみならず、構造解析全体としての見方に立って、種々の工夫がなされている。

以下、具体的に各種計算法について述べる前に、有限要素法による構造解析の手順につき、簡単にふれておきたい。

- ①: 構造の idealization
- ②: Input Data の準備
- ③: Element Stiffness Cal.
- ④: 系全体の釣合方程式

$$KX = F \quad \text{--- (1)}$$

- ⑤: Boundary Condition の導入
- ⑥: 連立方程式 (1) を解くこと。
- ⑦: Element Stress の計算
- ⑧: Print Output Data
- ⑨: Output Data の図示

通常③～⑧まで計算機がやってくれる。実際は①, ②, ④に殆んど人手に時間を喰われ、費用的に云っても計算費は $\frac{1}{3}$ ～ $\frac{1}{2}$ 程

度である。一例を表-2に示す。

2. 大型構造解析に於る各種数値計算法

2-1. Hyper Matrix 演算による法

1) 基本 Algorithm

- (1) 式の数値行列 K を右図
の通り In-Core 処理可能な
小行列 K_{ij} に分割し、(1)を
に取扱う。

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdot & K_{1n} \\ K_{21} & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ K_{n1} & \cdot & \cdot & K_{nn} \end{bmatrix}$$

- 2 のとき解法として Gaussian Elimination と同様の Algorithm
を K_{ij} について行えばよい。

2) 特徴

- joint numbering に制約がないので、mesh の自動分割も容易
となる。
- 解き得る問題の大きさは、殆んど制限がない。
- load case が多くても同時処理が出来る。

3) 欠点

- 計算時間が非常に長い。
- 4) その他
○ ASKA がこの方法を採用している。

2-2. SOR: Successive Over Relaxation Method²⁾

1) 基本 Algorithm

◦ 出発値: $x^{(0)}$ (任意)

◦ 反復式:

$$x_i^{(k+1)} = -\left(\frac{\omega}{k_{ii}}\right) \left\{ \sum_{j=1}^{i-1} k_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^n k_{ij} x_j^{(k)} - f_i \right\} - (\omega-1) x_i^{(k)} \dots \dots \dots (2)$$

$i: 1 \sim n$

ω : 加速係数 ($1 \leq \omega \leq 2$)

2) 特徴

◦ joint numbering に自由に行える。

◦ K が与えらる 2 -sparsity に十分に生かせる。

◦ solid のなる剛性構造では、うまく使えば非常に早い。

3) 難点

◦ 構造によっては発散し、解が得られないことがある。

(収束性の保証: $|k_{ii}| \geq \sum_{j \neq i} |k_{ij}|$ が満足されているとばかりではない。)

◦ ω の設定、収束の判定等使い方に多少の経験を要する。

◦ load case の多いとき、同時処理が出来る。

3-2. C.G. 法³⁾

1) 基本 Algorithm

◦ 出発値: $x^{(0)}$ (任意)

$$r^{(0)} = f - K x^{(0)}$$

$$p^{(0)} = r^{(0)}$$

$$\left. \begin{array}{l} r^{(0)} = f - K x^{(0)} \\ p^{(0)} = r^{(0)} \end{array} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

◦ 反復式: $\alpha_k = (p^{(k)}, r^{(k)}) / (K p^{(k)}, p^{(k)})$

$$\begin{aligned}
 x^{(k+1)} &= x^{(k)} + \alpha_k p^{(k)} \\
 p^{(k+1)} &= p^{(k)} - \alpha_k K p^{(k)} \\
 \beta_k &= (K p^{(k)}, p^{(k+1)}) / (K p^{(k)}, p^{(k)}) \\
 p^{(k+1)} &= p^{(k+1)} - \beta_k p^{(k)}
 \end{aligned}
 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \text{--- (4)}$$

2) 特徴

- joint numbering を自由に行い得る。
- 係数行列 K が変らぬので, non-zero element の数 (n, j, k, i) の形で藏えておけば, 何度でも使える。
- joint 番号差に制約されぬので, solid 等の解析に使える。

3) 難点

- 釣りの橋等, 剛でない構造では収束しないことが経験される。
- load case の多いとき同時処理出来ない。

2-4. Band Method

1) 基本 Algorithm

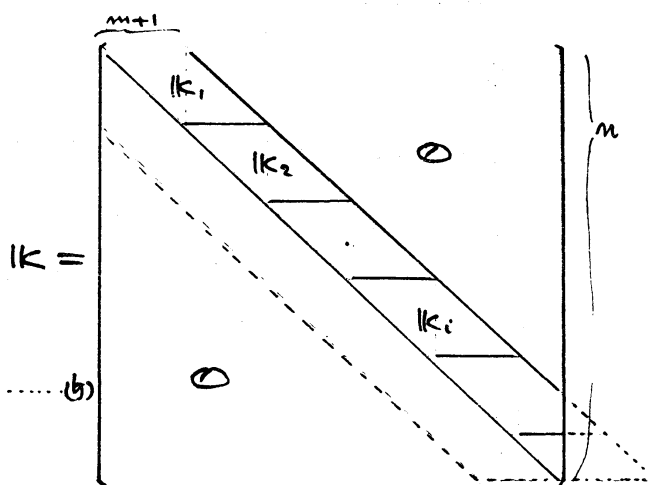
- Element joint $(i-j-k)$ の numbering に依り,

$$\max(i-j, j-k, k-i) \leq m/2 \quad \text{--- (5)}$$

(joint の自由度 2 の場合)

の制限を付ける。29

とき係数行列は右図の通り Band となる。



- K が positive definite である場合のみ、 $K = K_1 + K_2 + \dots + K_n$ と 1行3列に分けて保存する。

- triangularization:

$$K = L^T D L \quad \dots \dots \dots (6)$$

$$\text{or. } l_{ii} = k_{ii} \quad (i=1 \sim n)$$

$$l_{ij} = k_{ij} - \sum_{t=1}^{i-1} l_{ti} l_{tj} / l_{tt} \quad (i \leq j \leq n, i=2 \sim n) \quad \dots \dots (6')$$

- forward reduction:

$$(L^T D^{-1}) Y = F \quad \dots \dots \dots (7)$$

- backward reduction;

$$L X = Y \quad \dots \dots \dots (8)$$

2) 特徴

- 非常に早く、確実に解が得られる。
- 精度も悪くない。
- load case が多くても同時に処理が出来る。

3) 欠点

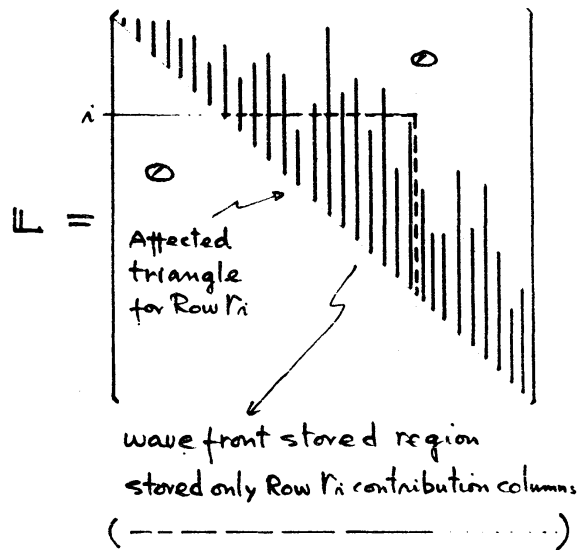
- joint numbering に余分の配慮が必要である。
- mesh が細かくすると、(6) の制約を満たす構造も出ない。

2-5. Wave Front 法⁴⁾

1) 基本 Algorithm

◦ joint numbering と wave front の minimum になる標、付着する。

◦ 係数行列 K を (6) で分解する。このとき L は (零要素が多いため) 右図の形になる。



◦ triangularization に際して、row element l_{ij} が K 下の element に対する寄与 i.e. 点線より上にある要素の (6) 式の第 2 項も、In-core に一次元 array と i を store しておき、この ~~row~~ row の decomposition に準備する。

◦ decomposition が済めば通常の forward & backward reduction になる。

2) 特徴

◦ 非常に早いという (band 法の $\frac{1}{2} \sim \frac{1}{4}$)

3) 欠点

◦ joint numbering に余分の配巻が必要。

◦ プログラムが複雑になる。

◦ あまり大きな構造は解けない (32kw Machine で Band 幅程度 ≈ 200)

2-6. Unit 分割法⁵⁾ (Matrix tri-diagonal Form)

1) 基本 Algorithm

- joint を Unit 単位で group 分け
を行う。係数行列 K が右図の
形に matrix tri-diagonal form
となる特徴がある*1。

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & & & \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & & \\ & K_{32} & K_{33} & K_{34} & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & K_{nn-1} & K_{nn} \end{bmatrix}$$

- 2つあり、通常の Gaussian

Elimination により解を得る。

2) 特徴

- 取扱える範囲が Band 法の制約よりゆるい。
- 計算時間も割合々早い。
- 精度も悪くない。
- load case が多くても、同時処理可能。

3) 欠点

- input の準備に手間がかかる。
- mesh を細くと、Unit の制約外となり解けぬ場合もある。

2-7 Substructure 法^{6),7)}

1) 基本 Algorithm

- 解かんとする構造を部分構造 (Substructure) 単位で処理する。i.e. 部分構造の内点を消去し、外点のみに関する剛性を求める。

*1. 実際は Unit 分けと呼ばれる用いられている手法は、もう少し拡張されている。

○部分構造を系全体と12集める。

○よとは、ほい前述の tri-diagonal form に2処理する。

2)特徴

○構造解析者になじみやすい。

○substructure を数段階に level 分けなければ、さらに使い易くなる。

○同じ構造部分があるとき、その計算を流用出来る。

3)欠点

○プログラムが煩雑となる。

○mesh と細くと、Substructure の自由度が大きくなって、計算出来る場合も起る。

2-8. 最小固有値の解法^{8),9)}

最後に座屈等の解析に必要な

$$AX = \lambda BX \quad \dots \dots \dots (9)$$

の最小固有値の解法について述べる。

1)基本 Algorithm

○出発値: $X^{(0)}$ (仮定)

○反復式: $Y^{(k)} = BX^{(k)}$

$$AX^{(k+1)} = Y^{(k)}$$

$$\lambda^{(k)} = (X^{(k+1)} \cdot X^{(k)}) / (X^{(k+1)} \cdot X^{(k+1)})$$

..... (10)

ただし $X^{(k)}$ は適当に normalize して用いる。

2) 特徴

- 元数の大きなものでも、容易に計算出来る。
- Band 法と組み合わせれば、非常に早い。
- Algorithm を改良すれば、低次の固有値も求め得る。

3) 難点

- 近接固有値のとき収束が悪くなる。
- いながら、計算時間の予測がつけ難い。

3. 計算例

以上、種々の計算法について述べたが、1~2 具伴例を示すこととする。

3-1. ピストン・クランクの熱伝導解析¹⁰⁾

図-1 参照のこと。

3-2. 内燃機関機構、台板の強度解析¹¹⁾

図-2 参照のこと。

3-3. $\mathcal{T} = \mathcal{R}$ - Trans Ring の強度解法¹²⁾

図-3~9. 参照のこと。

4. あとがき

終りに当たって、大型構造解法の問題点について、今後の方向を述べてみたい。

大型構造物の強度解法に於て、数値解法が、従来の実験に代るものとして、今後ますます用いられる様になると思はれる。

一 汎用計算機の記憶容量は、2Mに十分見合うもの増大とは考えられない。したがって、今後とも、数値計算 Algorithm, 各種ラックの開発が必要とされるであろう。中でも、膨大な Input & Output Data の処理を如何にうまく行うか、現在の最大の問題点の一つである。2つに於ては、数式的な Algorithm のみでなく、具体的に Physical Meaning を考え、場合によっては、専用の Hardware を開発し、問題に適する処置をとらねば、解決は困難の様である。

また、2M とは別に、計算機の使用桁数に関連して、計算精度が明確にされねばならない。¹³⁾

その他、以下に示す点を挙げることも可い。

① Hyper Matrix Form による各種 Matrix Operation Module

ii) Non-zero element Matrix Form に おける各種 Matrix Operation Module

等をとり、つぎのように整理しておくと、有用であることが
わかる。

種々の資料を提供して頂いた。当所、三原、国分、諸
田、和田、倉本の各位に感謝致す。

[参考文献]

- 1). 巻坂 「欧米における大型構造解析応用プログラム、シス
テム」 日本造船学会誌 第486号 p596 昭44-12
- 2) 川股, 塩屋 「反復法による構造釣合方程式の解法」 大次
元行列の計算に関する研究会報告集 p34 '60-4-24, 25 東京
- 3) 戸川 「多元連立一次方程式の解法」 JSSC vol.4, No.35 '68
- 4) Melosh, et. al. "Efficient Solution of Load Deflection Equations"
Proc. ASCE, ST4 p661~676 April '69
- 5). 信原 「FRAN 概要」 JSSC vol.3 no. 19 '67
- 6) Smith, et. al. "Practical Considerations in the Applications
of Finite Element Technique to Ship Structures" ISD,
ISSC Symposium on FEM. June '69 Stuttgart Univ.
- 7). Taig, I.C. "Automated Stress Analysis Using Substructures"
1st Conf. Matrix Methods in Structural Mechanics, Wright-Patterson

AFB, '66, AFFDL-TR-66-80

- 8) 山川 他 「行列の最小固有値の一計算法」 航技研TM-132
昭43-5
- 9) 大坂 「大型行列の最小固有値問題の一数値解法」 大坂大
行列の計算に関する研究全報告集 p.77, '70-4-24.25 未ス
- 10) 三原, 山口, 藤田, 平田 「高次元一般に特異値2つの
超光弾性による熱応力解析」 三菱重工技報 vol.7, no.2 昭45
- 11) 高垣, 河野, 小野, 和田, 島口 「機殻架構台板の構造に
関する研究」 三菱重工技報 vol.7, no.1 昭45
- 12) 志岐, 田口, 倉本, 永元 「有限要素法による船体座屈強
度解析に関する研究」 西部造船会会報第40号 p.115 昭45-7
- 13) Melosh, R.J. & E.L. Palacal "Manipulation Errors in Finite
Element Analysis of Structures" NASA CR-1385 Aug. '69

名称	开发时期	开发场所 担当者	计算机	内容					I/O Gen.	建立方程式	最大自由度	備考
				基础理论	弹性	塑性	屈服	接触				
SAMIS	1965	美国 NASA Melosh	IBM7094	变位法	0	0	0	0	20	Wave Front SAR	10,000	
FORMAT	1968	美国 USAF Douglas	IBM7094 (GE635)	变位法	0	0	0	0	20 Display	Gauss ie	2,000	
STRUDL	1969	美国 IBM MIT	IBM 360/65	变位法	0	0	0	0	20	Gauss	Unlimited	計算時間 長。
MAGIC	1969	美国 NASA Bell Aeros.	IBM7094	变位法	0	0	0	0	20	Cholesky ie	2000 Unit	
NCRE 70533	1968~	英国 NCRE Kendrick	?	变位法	0	-	-	-	20	Gauss (Substructuring)	Tankers 3 Tank程度	専用2000 米200
DAISY	1969	美国 Arizona Proj. Kamel	CDC6600 (6400)	变位法	0	0	-	-	Tankers	Gauss	6,500	
ASKA	1970	西独 Stuttgart Argyris	CDC6600 (U1108) (IBM3606)	变位法	0	0	0	0	Topological Variable	Gauss C.G. SAR	Unlimited	計算時間 長。
SESAM 69	1970 ~	苏联 Novoske-Ventus Univ. 1108		变位法	0	0	0	0	20	Cholesky	5000(?)	計算時間 7053333

0:有 -:无

表-1 有限单元法大型构造解析用705333

作業項目	所要時間	所要経費比率
① 構造のidealization	20 hr	15 %
② Input Dataの準備	50 hr	37 %
③ Input Read, Check & El. Stiffness	20 min*1	6 %
④ 系全体の釣合方程式	15 min	5 %
⑤ Boundary Conditionの輸入		
⑥ 連立方程式の解法	25 min	8 %
⑦ Element Stress	5 min	2 %
⑧ Output Data	15 min	5 %
⑨ Output Dataの図示	30 hr	22 %

*1. IBM 7040 Exec. Time

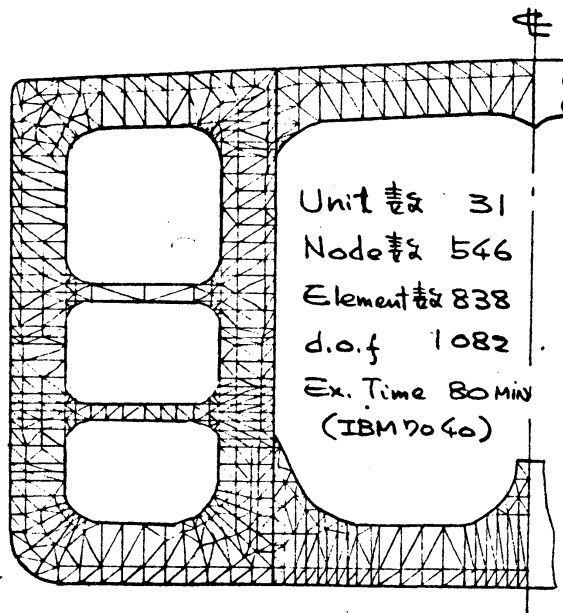
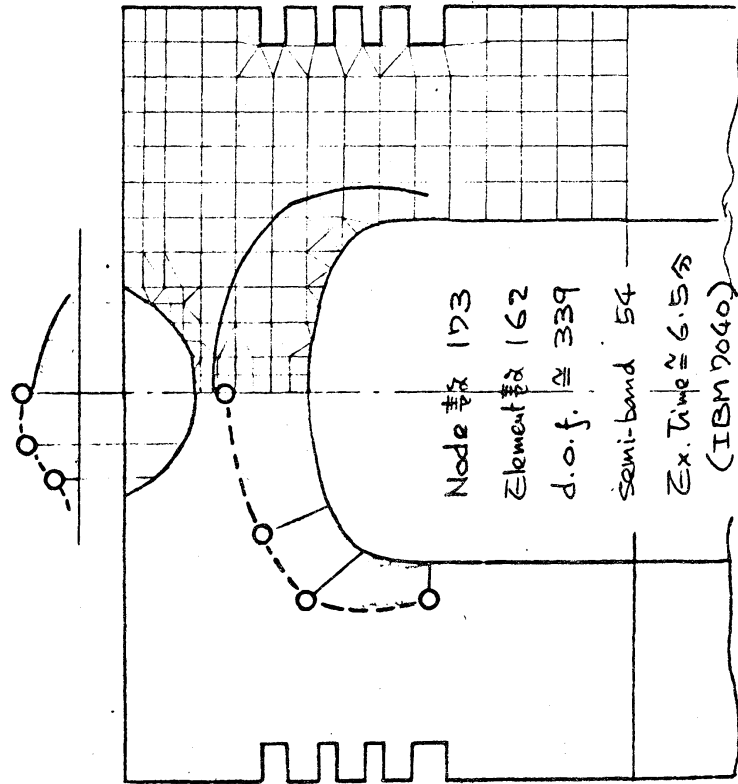


表-2 大型構造解析の所要経費比率

実験値 計算値



実験値 計算値

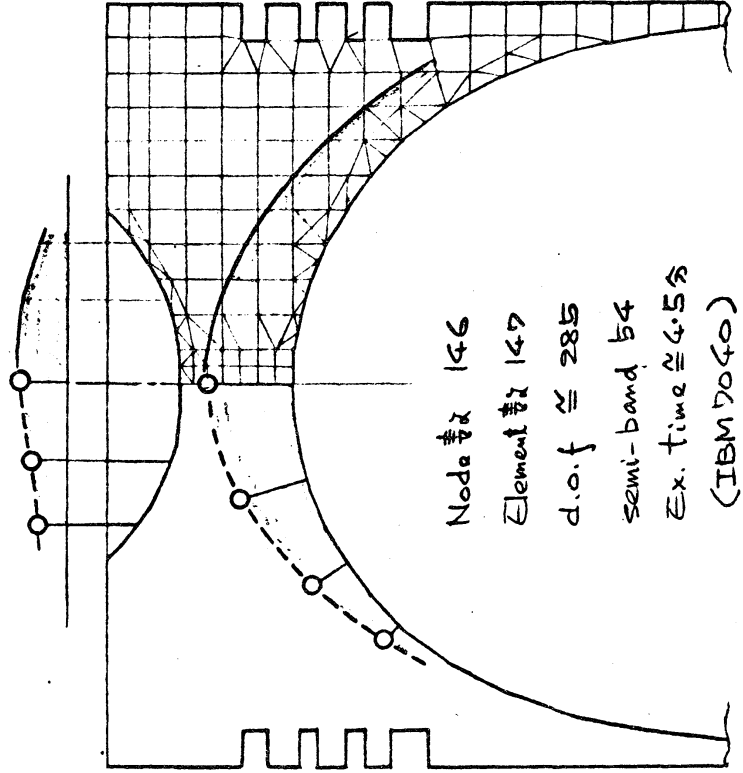
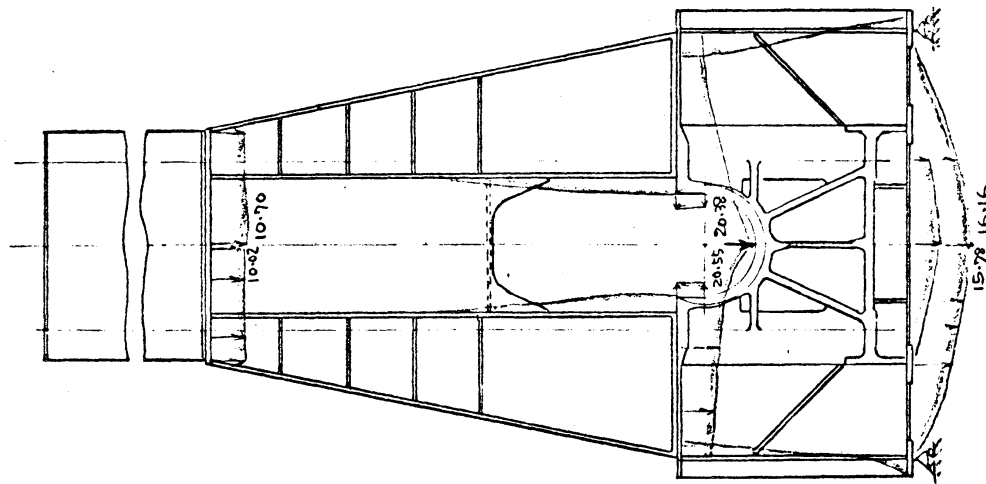
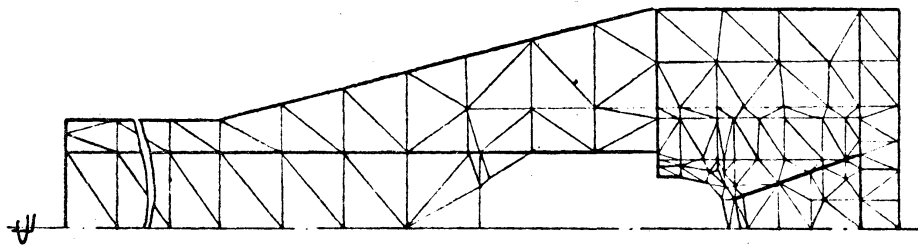
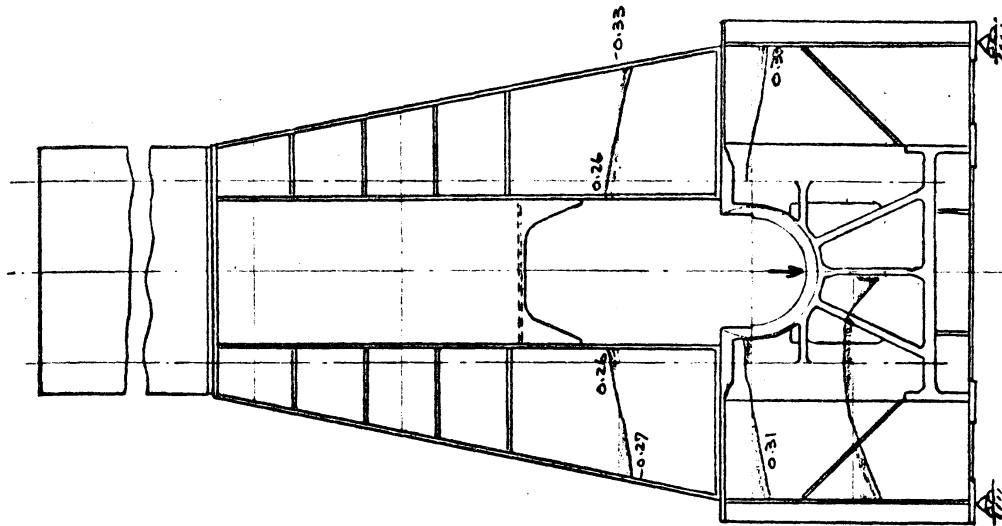


図-1 自動運用高度マニピュレータの船体解析例

Unit 数 ≈ 40
 Node 数 107
 Element 数 164
 d.o.f. ≈ 700
 Ex. Time ≈ 50 min.
 (IBM 7040)



計算値 実験値



計算値 実験値

図-2 内火柱筒架橋台板の解析例

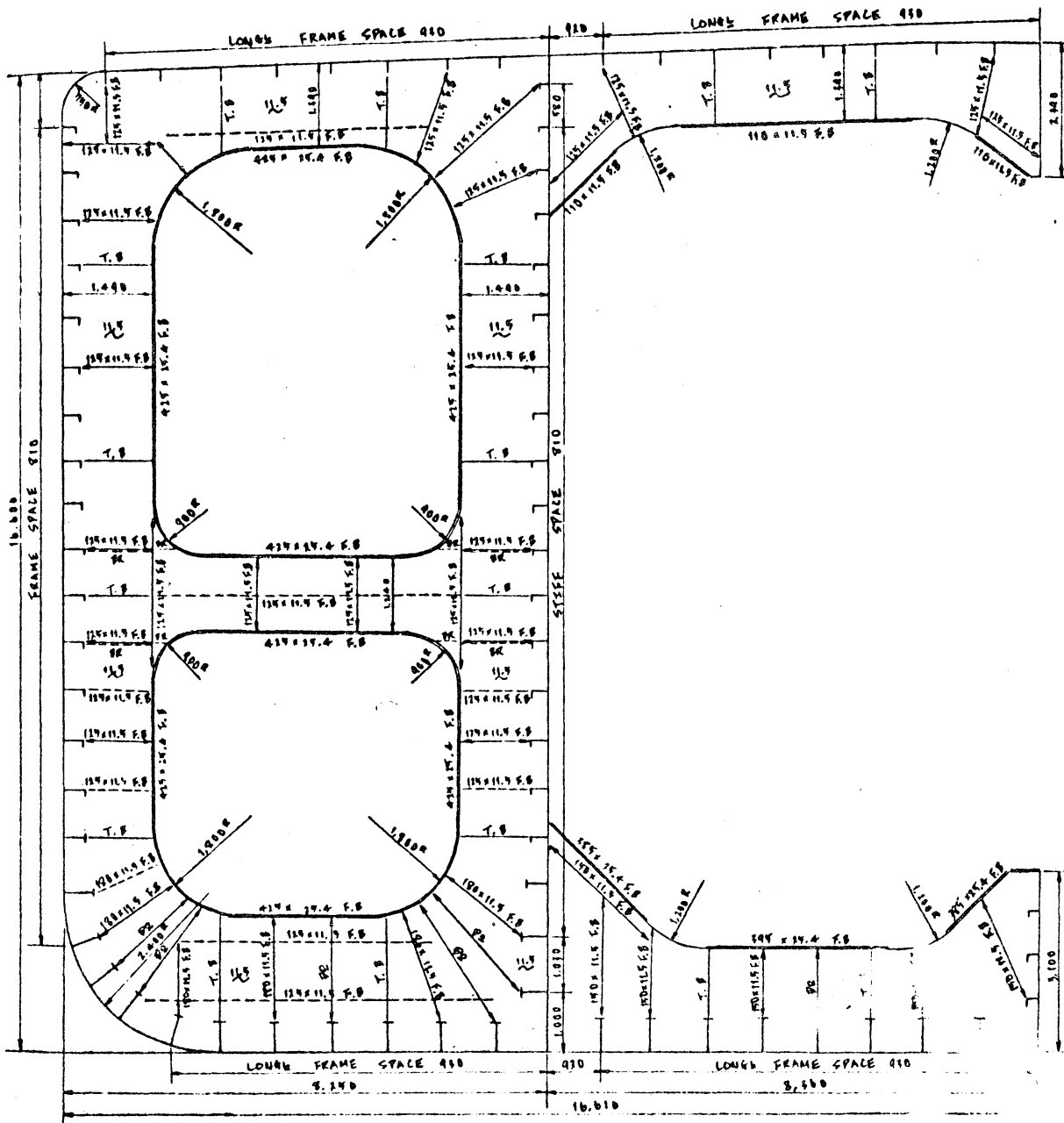


Fig. 4 Case. 2 Midship Section

——外力条件——

水压: 1.35 ρ 大管带横板 $\times$ 肘杆 NK-Rule 横板

剪断力分配割合

船侧外板: 45%

垂直隔壁: 42%

船底中心板: 13%

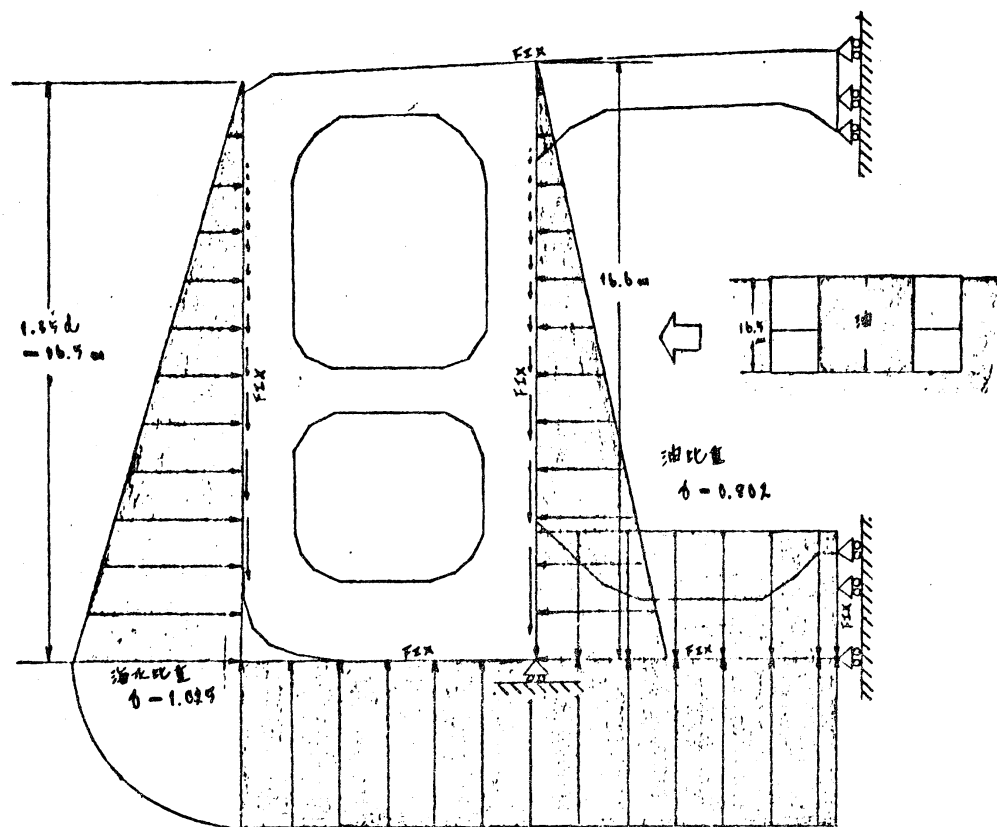


图-745 Load Condition

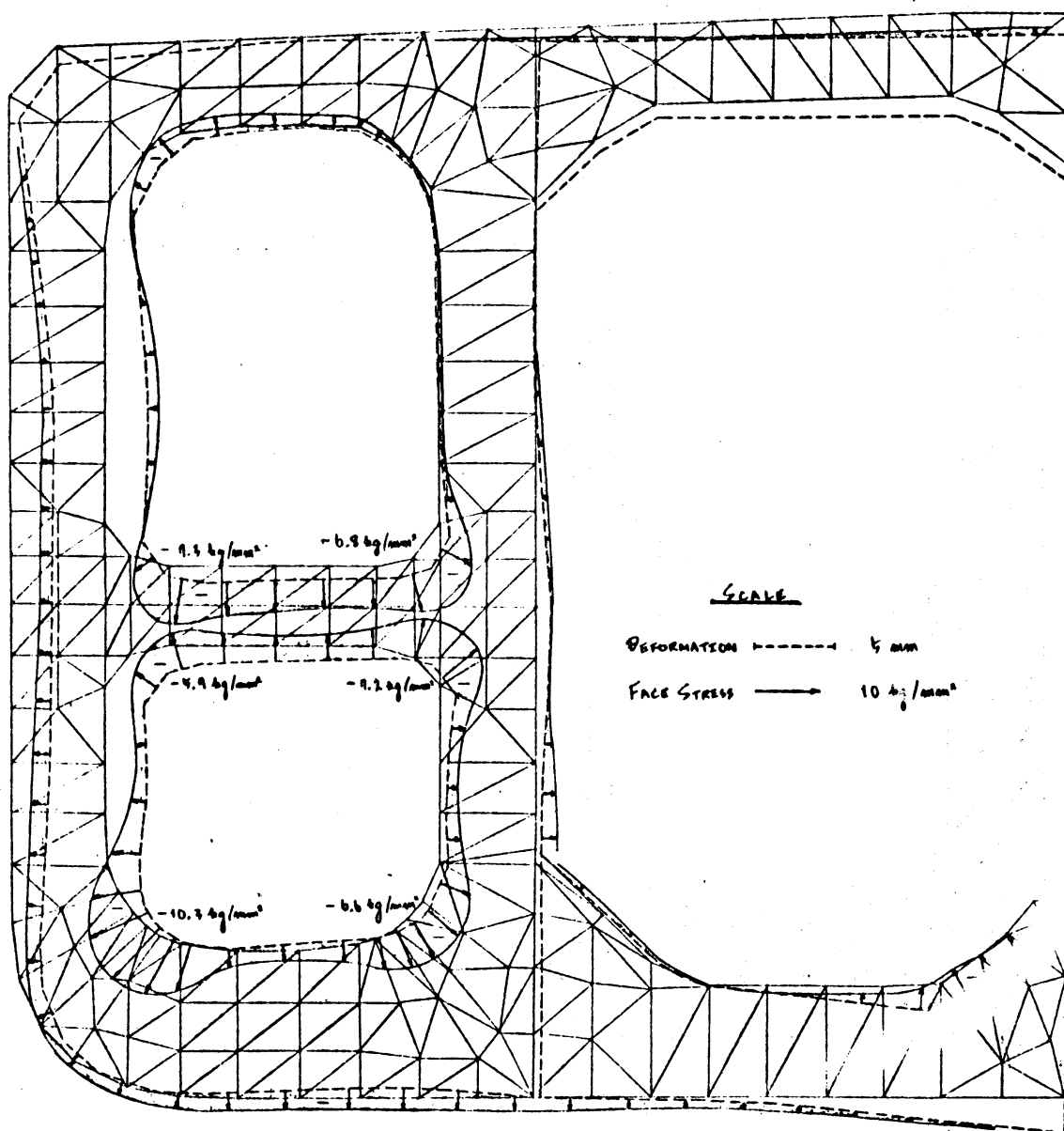


Fig. 6 Case 1 & Case 2 Deformation and Face Stress

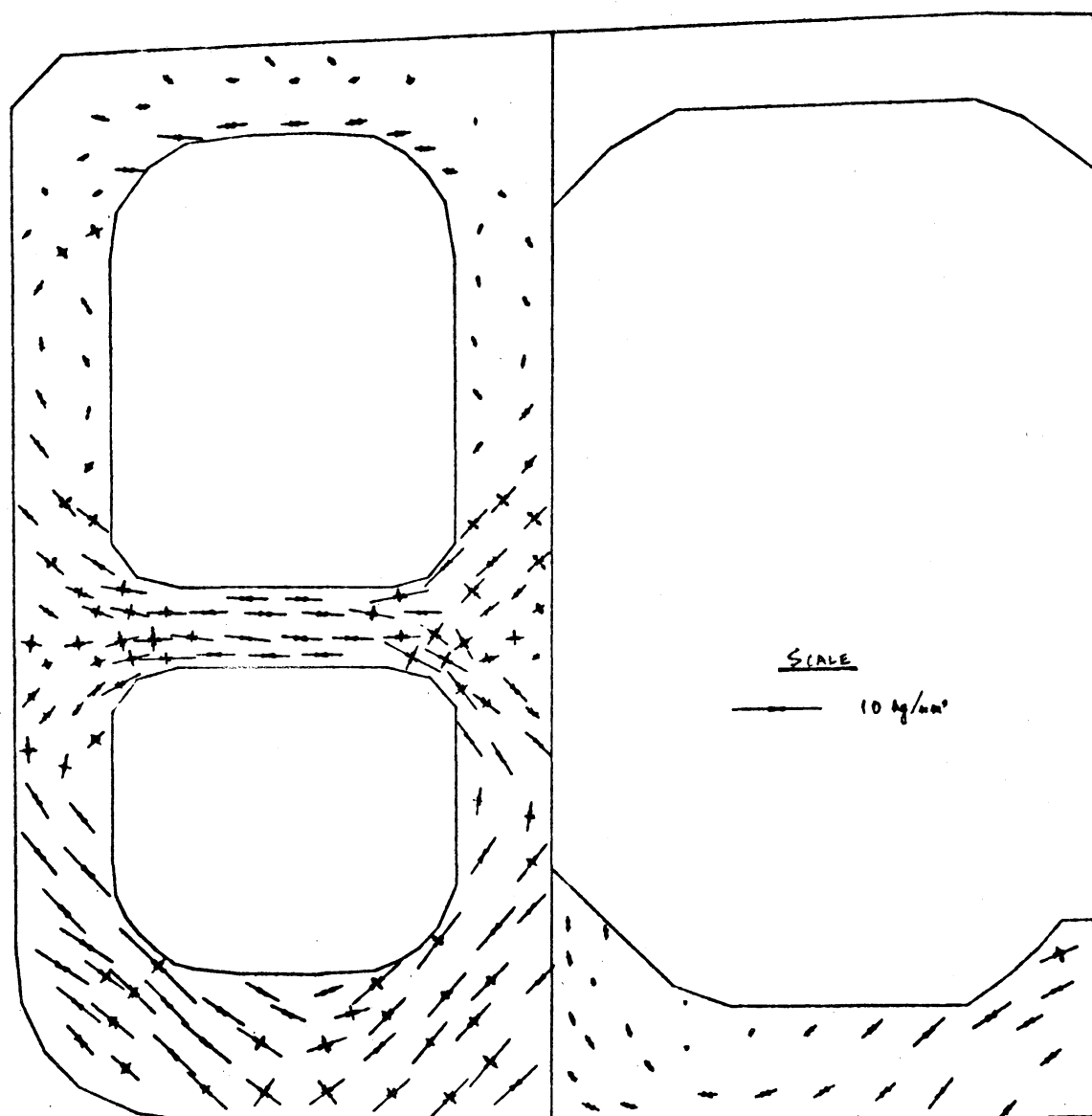
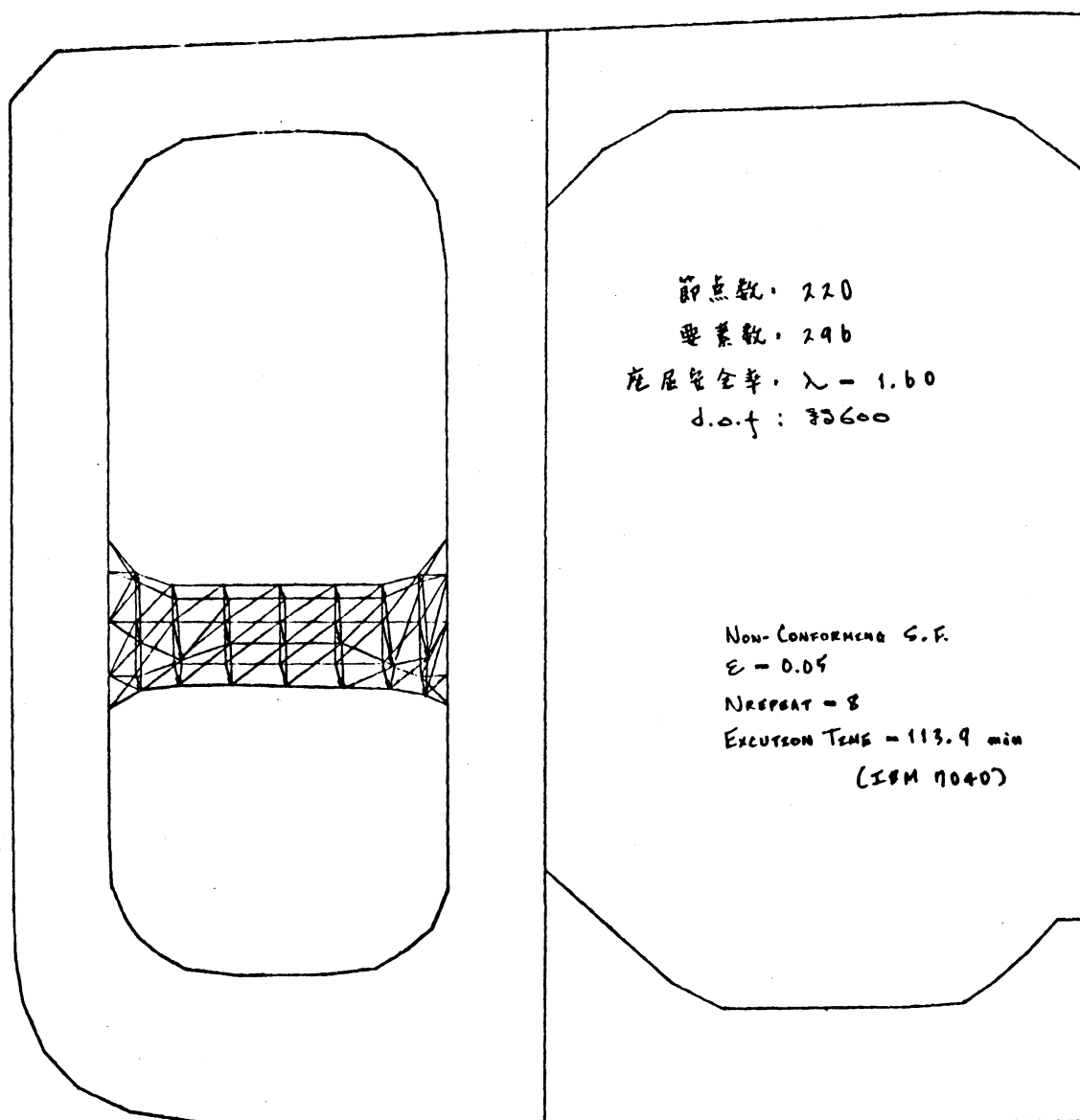


图-17 ^D Case 1 & Case 2 Principal Stress on Web Plate



11-16⁸ Case.1 Buckling Mode

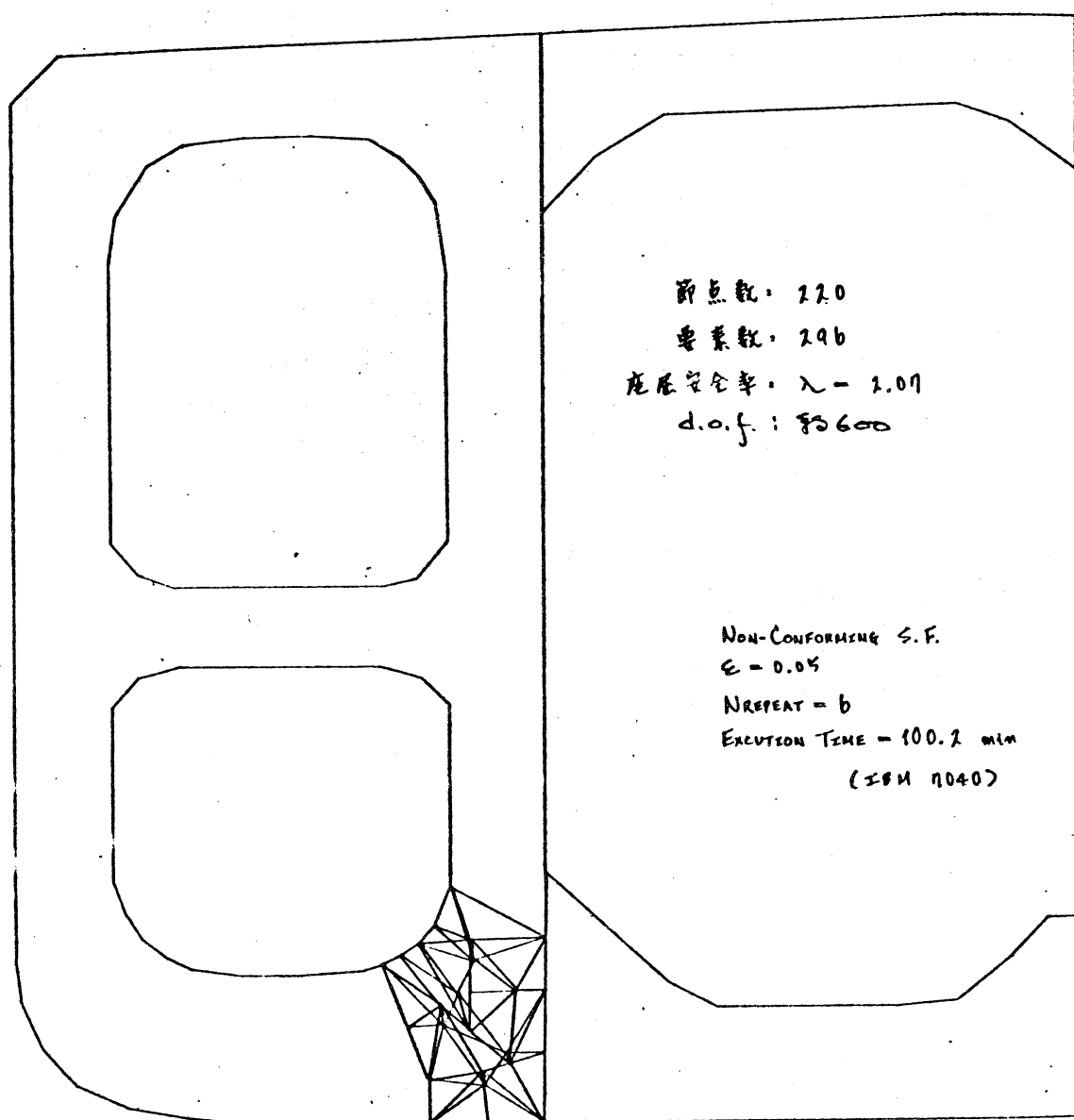


图-19⁹ Case.2 Buckling Mode