

Exact category について

阪大 教養 野村 泰敏

§ 1. 序

1950年代の半ばにホモロジー代数における最も有用な概念として確立されたアーベル圏に対しては、1960年に Subkin-Freyd により exact imbedding theorem が見出され、更にこれは1964年に B. Mitchell により full imbedding theorem として精密化された。このためアーベル圏における完全列の議論は射の存在も二めて加群の圏の夫れに還元されることとなった。一方アーベル圏よりやや一般的な概念として Puppe [13] により導入された完全圏 (exact category) に対しては上記の如き埋蔵定理がないため完全列についての初等的な議論は逐一定義より積み重ねて行う必要があり、このことは例えば Leicht [7], Dowker [3] により実行されている。Lambek [6] の導入した可換図式の不変量を用いて、完全列についてのよく知られた補題を包含する最

も一般的な algorithm を与え、かつその応用例を述べるのが本稿の目的である。なお完全圏が correspondence (relation ともいう) の圏に埋蔵されることが最近 Brinkmann [5] により証明されている。

§2. 完全圏

圏 C における射 $f: A \rightarrow B$ が単射のとき $A \rightarrowtail B$, 全射のとき $A \twoheadrightarrow B$ と記す。 f が全射かつ単射であれば全単射 (bimorphism) とよばれる, $gf=1$ かつ $fg=1$ とする g が存在すれば同型とよばれる。 f が $A \xrightarrow{e} I \xrightarrow{m} B$ と分解され而も任意の他の分解 $A \xrightarrow{e'} I' \xrightarrow{m'} B$ に対して可換図式

$$\begin{array}{ccccc} & & I' & & \\ & e' \nearrow & & \searrow m' & \\ A & & & & B \\ & e \searrow & & \nearrow m & \\ & & I & & \end{array} \quad \begin{array}{c} \downarrow h \\ \end{array}$$

が存在するならば, m (の同値類) を f の像といい m_f (通常は $\text{im } f$) とかく。また I (の同値類) を I_f (通常は $\text{Im } f$) と記す。以下 $e \in e_f$ と記す。像は存在すれば一意である。双対的に $\text{coim } f$, $\text{Coim } f$ を定義する。 f が像及び余像をもつときは f は一意に $\text{coim } f \xrightarrow{\bar{f}} \text{im } f$ と分解される。任意の射が像及び余像をもつとき C は canonical, C の任意の全単射が同型となるとき C は of compact type とよばれる。canonical かつ compact type の C に対しては m_f は f を分解する単射のなかで“最小”である。

さて圏 $\mathcal{C}$ において

(1) $\mathcal{C}$ は nullmorphisms の系をもつ。即ち各 $A, B \in \text{obj. } \mathcal{C}$ に対して $0_{A,B} = 0: A \rightarrow B$ があって $A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{0_{A,B}} B \xrightarrow{g} B'$ は $0_{A',B'}$ に等しい。

(2) 任意の射 f は核 $\ker f: K_f \rightarrow A$ 及び余核 $\text{cok } f: B \rightarrow L_f$ をもつ (ただし $f: A \rightarrow B$)。以下核は $i_f: K_f \rightarrow A$, 余核は $p_f: B \rightarrow L_f$ と記す。

(3) (2) より導かれる f の分解 $\xrightarrow{\text{cok}(\ker f)} \xrightarrow{\bar{f}} \xrightarrow{\ker(\text{cok } f)}$ において $\bar{f}$ は同型である。

が成立するとき $\mathcal{C}$ を 完全圏 とよぶ。このときは全単射は必ず同型で $\text{im } f = \ker(\text{cok } f)$, $\text{coim } f = \text{cok}(\ker f)$ となる。また任意の単射は必ず或射の核であり (normality), 全射は余射の余核となる。 $\mathcal{C}$ が上記 (1), (2), (3) の外に更に

(4) 任意の $A, B \in \text{obj. } \mathcal{C}$ に対して積 $A \times B$, 和 $A + B$ が存在する (実は両者は一致する)。

をみたすとき $\mathcal{C}$ を アーベル圏 とよぶ。アーベル圏では (2), (4) により pullback, pushout が自由に作れるが完全圏ではそうとは限らない。然し次の補題が成立する。

補題 2.1. 図式

$$\begin{array}{ccc} K_{gf} & \xrightarrow{\quad} & gf \\ \downarrow & \textcircled{1} & \downarrow f \\ K_g & \xrightarrow{\quad} & g \end{array} \quad \parallel$$

$$\begin{array}{ccc} f & \xrightarrow{\quad} & L_f \\ \parallel \downarrow g & \textcircled{2} & \downarrow \\ gf & \xrightarrow{\quad} & L_{gf} \end{array}$$

において①は pullback, ②は pushout である。

従って射の対において少なくとも一つが単射ならば pullback が作れる。

補題 2.2 ([2], 4.8) 可換図式

$$(*) \quad \begin{array}{ccc} & & w' \\ & \nearrow & \\ u' & & u \\ & \searrow & \\ & & v \end{array}$$

が pullback で, u が単射, v が全射ならば v' は全射である。

(アーベル圏では u 単射の仮定は不要)

さて列 $\xrightarrow{f} \xrightarrow{g}$ において $gf=0$ のとき零列, $\ker g = \operatorname{im} f$ 即ち $\operatorname{coker} f = \operatorname{coker} g$ のとき完全とよぶ。

補題 2.3. 図式 (*) が pullback で u または v の少なくとも一方が単射であれば $L_{u'} \rightarrow L_u$ は単射で, $\xrightarrow{u} \xrightarrow{w}$ が完全のとき $\xrightarrow{u'} \xrightarrow{wv}$ も完全である (アーベル圏ではアンダーラインの部分不要)。

補題 2.4 ("Produktlemma" [3], [7], [2, 5.5.2]) 射の列

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \text{ に対して}$$

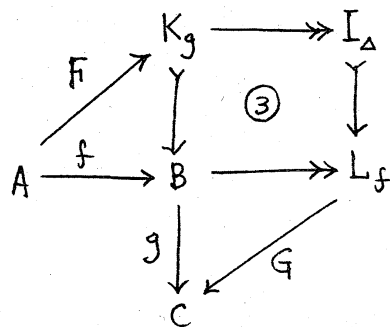
$$0 \rightarrow K_f \rightarrow K_{gf} \rightarrow K_g \xrightarrow{p_f i_g} L_f \rightarrow L_{gf} \rightarrow L_g \rightarrow 0$$

は完全列である。

この補題において $\Delta = p_f i_g : K_g \rightarrow L_f$ の分解 $K_g \xrightarrow{e_\Delta} I_\Delta \xrightarrow{m_\Delta} L_f$ とするときは [3], [4] に従い I_Δ を列 $\xrightarrow{f} \xrightarrow{g}$ の ホモロジ ジ とよび $H(A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C)$ と記す。特に $gf=0$ のときはこれ

が通常のホモロジーと一致することは次の補題よりわかる[2].

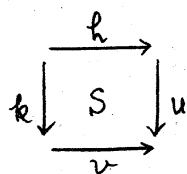
補題 2.5 $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ が零列のときこれより一意に定まる可換図式



において③は pullback かつ pushout である。故に同型 $\omega: L_f \cong K_g$ が成立つ。

§3. Lambek の不変量

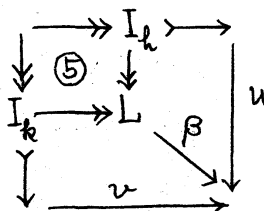
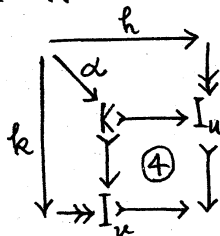
可換図式 S :



に対して J. Lambek [6] は次の不変量を導入した (記号は Hilton [5] による)。

$$Im S = \frac{I_u \cap I_v}{I_{uh}}, \quad Ker S = \frac{K_{uh}}{K_h + K_k}$$

これは次の様にかきかえると便利である。 S より



を作る, たゞし④は pullback, ⑤は pushout である。このとき

$$\text{Im } S = L_\alpha, \quad \text{Ker } S = K_\beta$$

となることが補題 2.4 と α, β の分解により容易にわかる。

前記の S において $K_h \rightarrow K_v$ が全射, $L_h \rightarrow L_v$ が単射のとき S を exact square とよぶ ([2, 5.4]. J. Leicht は smooth とよんだ [8])。

補題 3.1. 上記 S において $L_h \rightarrow L_v$ が単射ならば $\text{Im } S = 0$ 。特に h が全射 または S が exact (例えば u, v の少なくとも一方が単射で S が pullback) ならば $\text{Im } S = 0$ 。

(証) 可換図式

$$\begin{array}{ccccc}
 & e_h \twoheadrightarrow & I_h & \xrightarrow{m_h} & \xrightarrow{p_h} L_h \\
 & \searrow \alpha & \downarrow & \textcircled{6} & \downarrow e_u \\
 k \downarrow & & K & \xrightarrow{\quad} & I_u \\
 & & \downarrow & & \downarrow m_u \\
 & & I_v & \xrightarrow{\quad} & L_v
 \end{array}$$

に於て仮定により $L_h \rightarrow L_v$ が単射, 従て

$I_h = \text{Ker } p_h = \text{Ker} (\xrightarrow{p_h} L_h \rightarrow L_v) = \text{Ker} (\xrightarrow{e_u} \rightarrow L_v), K = \text{Ker} (I_u \xrightarrow{m_u} \rightarrow L_v)$ 。故に補題 2.1 により ⑥は pullback となり補題

2.2 より $I_h \rightarrow K$ は全射, 従て α も全射となる。

§4. Lambek の定理の一般化

完全圏における可換図式

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \\
 \textcircled{\#} \downarrow a & & \downarrow S & & \downarrow T \\
 A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C'
 \end{array}$$

が与えられたとき J. Lambek は次の定理を証明した。

Lambek の定理 [6] (#) の行が共に完全ならば $\text{Im } S \cong \text{Ker } T$.

本節の目的は行が必ずしも完全でないときに上の定理を一般化する次の定理が成立することを示すことにある ([9]).

定理 A (#) において二つの行が零列のとき a, b, c の引起すホモロジー射を $b_*: H(A \rightarrow B \rightarrow C) \rightarrow H(A' \rightarrow B' \rightarrow C')$ とすれば次の列は完全である:

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Ker } S \rightarrow H(K_a \rightarrow K_b \rightarrow K_c) \rightarrow \text{Ker } b_* \rightarrow \text{Im } S \xrightarrow{\Delta} \text{Ker } T \\ \rightarrow \text{Coker } b_* \rightarrow H(L_a \rightarrow L_b \rightarrow L_c) \rightarrow \text{Im } T \rightarrow 0. \end{aligned}$$

定理 A は次の定理より容易に導かれる。

定理 A' (#) において二つの行が零列のとき次の列は完全である:

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H(K_{bf} \rightarrow K_b \rightarrow K_c) \rightarrow \text{Ker } b_* \rightarrow \text{Im } S \xrightarrow{\Delta} \text{Ker } T \rightarrow \text{Coker } b_* \\ \rightarrow H(L_a \rightarrow L_b \rightarrow L_{g'b}) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

定理 A' は行の一方が必ずしも零列でないときにも定義される $b_*: H(A \rightarrow B \rightarrow C) \rightarrow H(A' \rightarrow B' \rightarrow C')$ に関する次の定理の特別な場合である。

定理 A'' (#) において $gf = 0$ ならば列

$$0 \rightarrow H(K_{bf} \rightarrow K_b \rightarrow K_c) \rightarrow \text{Ker } b_* \xrightarrow{\alpha} \text{Im } S \xrightarrow{\Lambda'} L \xrightarrow{\tilde{\beta}} \tilde{L}$$

は完全であり, $g'f' = 0$ ならば列

$$\tilde{K} \xrightarrow{\tilde{\alpha}} K \xrightarrow{\Lambda''} \text{Ker } T \xrightarrow{\tilde{\beta}} \text{Coker } b_* \rightarrow H(L_a \rightarrow L_b \rightarrow L_{g'f'}) \rightarrow 0$$

は完全である。記号の定義は証明中に与えられる。

準備として図式

$$\begin{array}{ccc} & B & \xrightarrow{g} C \\ & \downarrow e & \\ A' & \xrightarrow{f'} & B' \end{array}$$

より得られる可換図式

$$\begin{array}{ccccccc} \tilde{K} & \xrightarrow{i} & K_g & \xrightarrow{i_g} & B & \xrightarrow{e_g} & I_g \xrightarrow{m_g} C \\ & \searrow \tilde{\alpha} & & & \downarrow e_g & \textcircled{8} & \downarrow j \\ & & K & \xrightarrow{p} & I_g & \xrightarrow{i} & L \\ & & \downarrow q & \textcircled{7} & \downarrow m_g & & \searrow \tilde{\beta} \\ A' & \xrightarrow{e_{f'}} & I_{f'} & \xrightarrow{m_{f'}} & B' & \xrightarrow{p_{f'}} & L_{f'} \xrightarrow{\pi} \tilde{L} \end{array}$$

を考える。ただし⑦は pullback, ⑧は pushout で

$$\tilde{K} = \text{Ker}(p_{f'} \circ i_g : K_g \rightarrow L_{f'}), \quad \tilde{L} = \text{Cok } p_{f'} \circ i_g$$

とおく。このとき次が成り立つ。

補題 4.1 次の列は完全である：

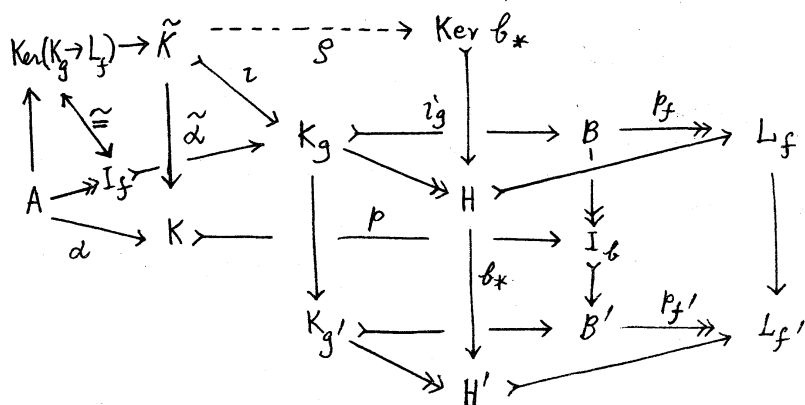
$$0 \rightarrow K_g \cap K_e \rightarrow \tilde{K} \xrightarrow{\tilde{\alpha}} K \xrightarrow{i_p} L \xrightarrow{\tilde{\beta}} \tilde{L} \rightarrow B'/(I_{f'} + I_e) \rightarrow 0.$$

(証) $p_{f'} \circ i_g = (p_{f'} \circ m_e)(e_g \circ i_g)$ に補題 2.4 を適用し, 更に補題 2.1 を考慮して完全列

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow \text{Ker } e_g \circ i_g & \rightarrow & \tilde{K} & \xrightarrow{\tilde{\alpha}} & \text{Ker } p_{f'} \circ m_e & \xrightarrow{i_p} & \text{Cok } e_g \circ i_g \xrightarrow{\tilde{\beta}} \tilde{L} \rightarrow \text{Cok } p_{f'} \circ m_e \rightarrow 0. \\ \parallel & & & & \parallel & & \parallel \\ K_g \cap K_e & & K & & L & & B'/(I_{f'} + I_e) \end{array}$$

を得る。

定理 A'' の証明 $gf = 0$ とする。可換図式

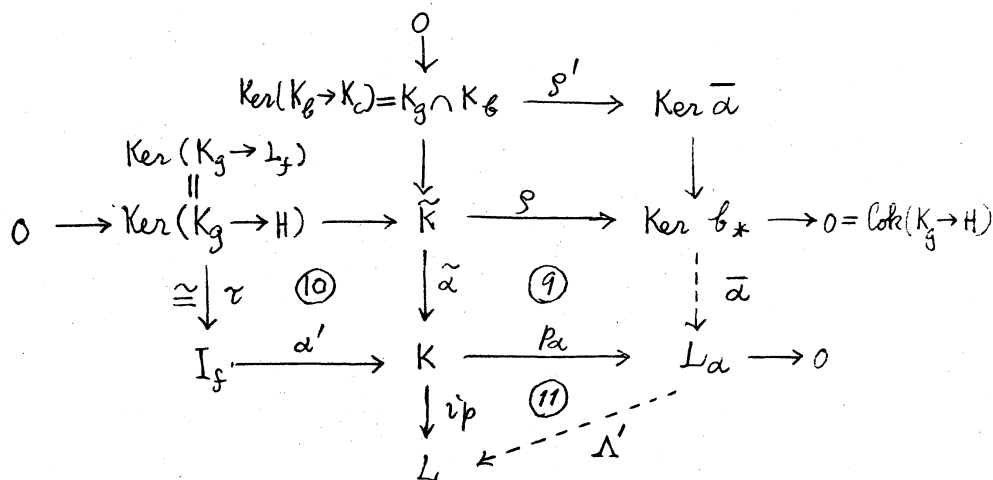


ただし $H = H(A' \rightarrow B \rightarrow C)$, $H' = H(A' \rightarrow B' \rightarrow C')$ とおく, において

$\tilde{K} \rightarrow K_g \rightarrow H \xrightarrow{b_*} H'$ は 0 である一意な射

$$s: \tilde{K} \rightarrow \text{Ker } b_* = \text{Ker}(H \rightarrow L_f \rightarrow L_{f'})$$

が存在する。補題 2.4 により $A = K_{gf} \rightarrow \text{Ker}(K_g \rightarrow L_f) \rightarrow K_g \rightarrow B$ は $f: A \rightarrow B$ の分解を与えるから $\text{Ker}(K_g \rightarrow L_f) \cong I_f$ で



において, α は $\text{Im } s$ の定義の中の射で $\alpha = \alpha' e_f$, 補題 2.4 により真中の行は完全, 補題 4.1 により真中の列も完全である。右全射の下行も完全。 B' で chase することにより ⑩の可換性から $\bar{\alpha}$ が引き起こされ補題 2.1 により ⑨は

pushout となる。従って補題 2.3 の双対より $g' = K_g \cap K_b$
 $\rightarrow \text{Ker } \bar{\alpha}$ は全射となる。更に 3x3 補題より

$$\text{Ker } g' \cong \text{Ker} \left(\xrightarrow{\tau} \xrightarrow{e_{\alpha'}} I_{\alpha'} \right) \cong \text{Ker } e_{\alpha'} = \text{Ker } d'$$

で補題 2.4 より全射 $K_{bf} = K_{\alpha} \rightarrow K_{\alpha'}$ が存在するから完全列

$$0 \rightarrow H(K_{bf} \rightarrow K_b \rightarrow K_c) \rightarrow \text{Ker } b_* \xrightarrow{\bar{\alpha}} L_{\alpha} = \text{Im } S$$

が得られる。他方 $ip_{\alpha} = 0$ より ⑪ を可換にする $\Lambda' : L_{\alpha} \rightarrow L$
 が存在して $\xrightarrow{\bar{\alpha}} \xrightarrow{\Lambda'}$ が完全となる。

$g'f' = 0$ の場合の証明は以上の双対である。

§ 5. 応用例

(1) Connecting morphism 可換図式

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & B_3 & \longrightarrow & C_3 \longrightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow & S_1 & \downarrow \\
 & A_2 & \longrightarrow & B_2 & \longrightarrow & C_2 \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow & S_2 & \downarrow & S_3 & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & A_1 & \longrightarrow & B_1 & \longrightarrow & C_1 \\
 & \downarrow & S_4 & \downarrow & & & \\
 0 & \longrightarrow & A_0 & \longrightarrow & B_0 & &
 \end{array}$$

において行は完全, 列は零列とする。

$$g = H(A_2 \rightarrow A_1 \rightarrow A_0) \rightarrow H(B_2 \rightarrow B_1 \rightarrow B_0), \quad \psi = H(B_3 \rightarrow B_2 \rightarrow B_1) \rightarrow H(C_3 \rightarrow C_2 \rightarrow C_1)$$

をホモロジー射とすると, 定理 A 及び補題 3.1 とその双対よ

$$0 \rightarrow \text{Ker } g \xrightarrow{\sigma} \text{Im } S_2 \xrightarrow{\Lambda} \text{Ker } S_4 = 0$$

$$0 = \text{Im } S_1 \xrightarrow{\Lambda} \text{Ker } S_3 \xrightarrow{\tau} \text{Cok } \psi \Rightarrow 0$$

は完全で Lambek の定理により

$$\Lambda : \text{Im } S_2 \cong \text{Ker } S_3$$

中えに $d = i_p \circ^{-1} \Lambda^{-1} \tau^{-1} p_\psi$ とおけば次の完全列が得られる:

$$H(B_3 \rightarrow B_2 \rightarrow B_1) \rightarrow H(C_3 \rightarrow C_2 \rightarrow C_1) \xrightarrow{d} H(A_2 \rightarrow A_1 \rightarrow A_0) \rightarrow H(B_2 \rightarrow B_1 \rightarrow B_0)$$

(2) B  gueri-Poitou の一定理 [1]

定理 A, 補題 3.1 と Lambek の定理を何度も用いると zig-zag 状にホモロジーを移動させることができる。例えは図式

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 0 & & 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & A & \cdots & B & \cdots & C \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & A' & \cdots & B' & \cdots & C' & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & 0 & & 0 & & &
 \end{array}$$

が可換で尖線の列は零列, それ以外の行と列は完全であるとすると

$$H(A \rightarrow B \rightarrow C) \cong H(A' \rightarrow B' \rightarrow C').$$

この同型の位相幾何への一応用については [10] をみられたい。他の応用として次の "Snake Lemma" が得られる。可換

図式

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
 & & & 0 & \cdots & K_f & \cdots & K_a & \cdots & K_b & \xrightarrow{\lambda} & K_c & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & K_f & \xrightarrow{f} & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{f} & C & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & A' & \xrightarrow{g'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' & \cdots & L_{g'} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & L_a & \xrightarrow{\mu} & L_b & \cdots & L_c & \cdots & L_{g'} & \cdots & 0 & \cdots & 0
 \end{array}$$

の実線の部分が与えられ行が完全とする。実線の部分を補ってホモロジーの移動を行い $L_\lambda \cong K_\mu$ 等が導かれ、列

$$0 \rightarrow K_f \rightarrow K_a \rightarrow K_b \rightarrow K_c \rightarrow L_a \rightarrow L_b \rightarrow L_c \rightarrow L_{g'} \rightarrow 0$$

の完全性が示される。尚定理 A より Bézout-Poitou の結果を導くことについては [11] をみられたい。

(3) §4 の可換図式 (#) において $A' \rightarrow B' \rightarrow C'$ が完全のとき

$$\begin{array}{ccccc} I_a & \longrightarrow & I_b & \longrightarrow & I_c \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' \end{array}$$

の上の行は零列となり、定理 A より完全列

$$0 \rightarrow H(I_a \rightarrow I_b \rightarrow I_c) \rightarrow \text{Im } S' \rightarrow \text{Ker } T' = 0$$

を得る。 $e_a: A \rightarrow I_a$ が全射であることと q_m の定義により $\text{Im } S \cong \text{Im } S'$ であるから

$$H(I_a \rightarrow I_b \rightarrow I_c) \cong \text{Im } S$$

同様に (#) において $A \rightarrow B \rightarrow C$ が完全ならば

$$H(I_a \rightarrow I_b \rightarrow I_c) \cong \text{Ker } T$$

以上のことを用いると可換図式

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \longrightarrow & C \\ \downarrow a & & \downarrow b & & \downarrow c \\ A' & \xrightarrow{f'} & B' & \longrightarrow & C' \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ A'' & \xrightarrow{f''} & B'' & & \end{array}$$

において $A' \rightarrow B' \rightarrow C'$ 及び $B \rightarrow B' \rightarrow B''$ が完全であれば

$$H(I_a \rightarrow I_b \rightarrow I_c) \cong H(I_f \rightarrow I_{f'} \rightarrow I_{f''}).$$

これは米田の一補題 [14, p. 35] に外ならぬ。

§6. ホモロジー完全列の拡張

可換図式 S, S' の間の射 $S \rightarrow S'$ が与えられると、これは $\text{Im } S \rightarrow \text{Im } S', \text{Ker } S \rightarrow \text{Ker } S'$ を引き起すが、これらの行動を記述する一般の定理が定理 A の応用として [12] で証明されている。その応用として次の定理 B が示されたが証明はすべて [12] にゆかり結果文を述べる：

可換図式

$$\begin{array}{ccccc} P' & \longrightarrow & Q' & \longrightarrow & R' \\ \downarrow U & & \downarrow S & & \downarrow \\ P & \longrightarrow & Q & \longrightarrow & R \\ \downarrow V & & \downarrow T & & \downarrow \\ P'' & \longrightarrow & Q'' & \longrightarrow & R'' \end{array}$$

において列はすべて零列とし $H_P = H(P' \rightarrow P \rightarrow P'')$, $H_Q = H(Q' \rightarrow Q \rightarrow Q'')$, $H_R = H(R' \rightarrow R \rightarrow R'')$ とおく。真中の行が完全と仮定する。

定理 B 完全列

$$\text{Im } U \xrightarrow{\Lambda} \text{Ker } V \longrightarrow H(H_P \rightarrow H_Q \rightarrow H_R) \longrightarrow \text{Im } S \xrightarrow{\Lambda} \text{Ker } T$$

が存在する。

定理 B において $P'' \rightarrow Q''$ が単射で $Q' \rightarrow R'$ が全射のときは古典的なホモロジー完全列の断片が得られ、 $P' \rightarrow P \rightarrow P''$ と

$R' \rightarrow R \rightarrow R''$ が完全で $\text{Ker } V = 0$, $\text{Im } S = 0$ のときは
 rolling-stone lemma の基礎となる Hilton の一補題 [5,
 Prop. 2.7] が得られる。

文 献

- [1] L. B  gueri and G. P  itou, Diagram-chasing dans
 le cat  gories ab  liennes, Bull. Soc. Math. France 93
 (1965), 323—332
- [2] H.-B. Brinkmann u. D. Puppe, Abelsche und exakte
 Kategorien, Korrespondenzen. Springer Lecture Notes
 No. 96 (1969).
- [3] C. H. Dowker, Composite morphisms in abelian cate-
 gories, Quart. J. Math. Oxford (2) 17 (1966), 98—105.
- [4] R. Faber and P. Freyd, Fill-in theorems, Proc. Conf.
 Cat. Alg. La Jolla (1965), 177—188.
- [5] P. J. Hilton, On systems of interlocking exact seq-
 uences, Fund. Math. 61 (1967), 111—119.
- [6] J. Lambek, Goursat's theorem and homological
 algebra, Canad. Math. Bull. 7 (1964), 597—608
- [7] J. Leicht,   ber die elementaren Lemmata der homo-
 logischen Algebra in quasi-exakten Kategorien, Monat.

- Math. 68 (1964), 240-254.
- [8] J. B. Leicht, On commutative squares, *Canad. J. Math.* 15 (1963), 59-79.
- [9] Y. Nomura, An exact sequence generalizing Lambek's theorem (to appear).
- [10] Y. Nomura, Some applications of the Hurewicz isomorphism theorem, *Sci. Rep. Coll. Gen. Ed. Osaka Univ.* 18 (1969), 1-8.
- [11] Y. Nomura, Bihomologies in exact categories, to appear in *Sci. Rep. Coll. Gen. Ed. Osaka Univ.*
- [12] Y. Nomura, Induced morphisms for Lambek invariants of commutative squares.
- [13] D. Puppe, Korrespondenzen in abelsche Kategorien, *Math. Ann.* 148 (1962), 1-30.
- [14] N. Yoneda, Homology & Cohomology, 理論の代数的準備, *Seminar on Topology A1.* (1955).
- [15] H.-B. Brinkmann, Relations for exact categories, *J. Alg.* 13 (1969), 465-480.

追記 § 5, (2) で述べた オモロジーの移動についての結果は
V. P. Palamodov: *Linear Differential Operators with Constant
Coefficients*, *Grundlehren der math. Wiss.* Bd. 168 に *funda-
mental homology theorem* として定式化されている。なほ後
の lemma 4 は Lambek の定理に外ならない。