

非線型拡散方程式系による

飽和成長モデル

大阪市立大 理 電 高 惟 倫

§ 1. 問題意識

形態形成に対する数学モデルを作りたいというのが本意では
しかし漠然とした夢である。以下の議論がそういう計りの
か一歩かあるという事さえ過激に過ぎるであろうが、討行錯
誤の一つとして次の様なモデルを作った。これは N 組の非
線型拡散方程式系に対する初期値問題である。2. この解 u は
 N 次元ユークリッド空間 R^N の compact set Q に留まる、

$$Q = \{ u \in R^N; u = {}^t(u_1, \dots, u_N) \quad u_i \geq 0 \text{ かつ } \sum_{k=1}^N u_k \leq 1 \}$$

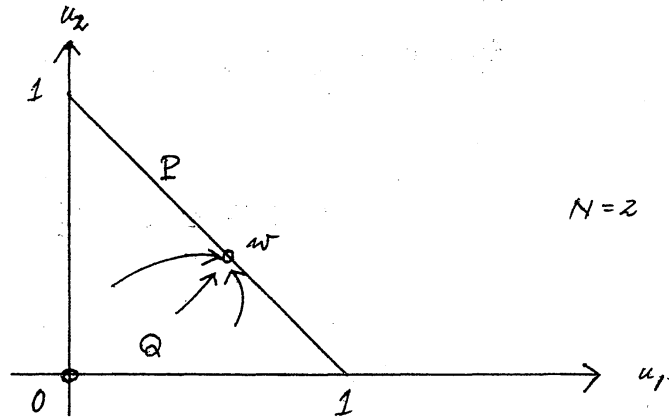
$u \equiv 0$ は定常解である、 $u \equiv w$ ($w \in \dot{P}$ は数1ノ
トル) も定常解である、

$$P = \{ u \in R^N; u_i \geq 0 \text{ かつ } \sum_{k=1}^N u_k = 1 \}$$

$$\dot{P} = \{ u \in R^N; u_i > 0 \text{ かつ } \sum_{k=1}^N u_k = 1 \}$$

もし定常解 $u \equiv 0$ は不安定である、2. 定常解 $u \equiv w$ は
安定である。すなわち u の初期値が定常解 $u \equiv 0$ から

少しづつずれると、時間 $t \rightarrow \infty$ につれて $u \rightarrow w$ となる。
結局は振動が収束するに如く現われる事を期待した。



§ 2. 問題と結論.

先ず次の 2 つの仮定を置く。

仮定 1

$$[0, 1] \ni \alpha \rightarrow f(\alpha) \in [0, f_0] \quad C^1\text{-map}$$

$$f(1) = 0, \quad f(\alpha) : \text{強に意味で単調減少} \quad (f_0 > 0)$$

仮定 2

A : 実 $N \times N$ 行列, 非対角線要素は全に非負

既約 (irreducible)

$${}^t A 1_N = 0 \quad 1_N = {}^t (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^N$$

上の仮定より $Aw = 0$ なる $w \in \mathbb{P}$ がある事がわかる。
 $u = {}^t (u_1, \dots, u_N), \quad v = {}^t (v_1, \dots, v_N) \in \mathbb{R}^N$ に対して

$$\langle u, v \rangle = {}^t v \cdot u = \sum_{k=1}^N u_k v_k, \quad \|u\|^2 = \langle u, u \rangle \quad \text{と} \quad \text{する。}$$

L の A と f に対して 2 次の線形常微分方程式系に対して 与える 初期値問題を考える。

$$(1) \begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta \right) u = [A + f(\langle u, 1_N \rangle)] u \\ (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = u_0(x) \quad x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

$$t \geq 0 \quad u = u(x, t) = {}^t (u_1(x, t), \dots, u_N(x, t))$$

$$\Delta = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)^2 \quad : \text{Laplacian}$$

次の定理が結論である。

定理

$u_0(x) \in Q$ $x \in \mathbb{R}^n$ なる任意の連続関数 $u_0(x)$ に対して
 (1) は $u(x, t) \in Q$ $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, \infty)$ なる大域解
 $u(x, t)$ が唯一つ持つ。 かつ $u_0(x) \neq 0$ ならば $x \in \mathbb{R}^n$
 には $u(x, t) > 0$ かつ $u(x, t) \rightarrow w$ ($t \rightarrow \infty$)
 である。

§3. 証明.

$\alpha = \alpha(x, t) = \langle u(x, t), 1_N \rangle$, $\alpha_0(x) = \langle u_0(x), 1_N \rangle$ とする
 と $0 \leq \alpha_0(x) \leq 1$ である。 以後 $u_0(x) \neq 0$ とする。 L は

かつ、 $2 \quad \alpha_0(x) \neq 0$ である。 (1) の両辺に左から t_{1N} をかけると

$$(2) \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right) \alpha = f(\alpha) \alpha & (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ \alpha(x, 0) = \alpha_0(x) & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

N. Ikeda - Y. Kametaka [1] または K. Masuda [2] によってこのことが証明されている。

命題 1

$$\alpha(x, t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 1 \quad x \in \mathbb{R}^n \text{ かつ } 1 \leq t < \infty \text{ に対して}$$

定義

$$v = W^{-\frac{1}{2}}(u - \alpha w), \quad B = W^{-\frac{1}{2}} A W^{\frac{1}{2}}$$

ただし

$$W = \begin{pmatrix} w_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & w_N \end{pmatrix}, \quad W^{\pm \frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} w_1^{\pm \frac{1}{2}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & w_N^{\pm \frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

(1), (2) より新しい未知関数 v に対して

$$(3) \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right) v = [B + f(\alpha)] v \quad (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$$

を得る。

2.2 非負行列の理論によつて、2次の補題が成り立つ。

補題

B . 非対角線要素が全2非負の $N \times N$ 行列, 既約,

$$Bb = {}^t B b = 0 \quad \text{なす } b \in \mathbb{R}^N \quad \text{がある。} \quad \text{このとき } B \text{ に}$$

対する2次元空間は b の張る1次元部分空間の $\mathbb{R}^N$ における

直交補空間上で負定値である。すなわち次のような $\delta > 0$

$$\text{がある。} \quad {}^t v B v \leq -\delta \|v\|^2 \quad \forall v \in \mathbb{R}^N \text{ s.t. } \langle v, b \rangle = 0$$

上の補題の証明は次の事に注意すればよい。 B の対称部分 $\frac{1}{2}(B + {}^t B)$ を置き零元で証明すればよいから最初から B は対称と1つよい。 B の固有値は負の半軸上の点を中心と原点を通る円の内部にある。 B が既約な事から固有値0は単根である。したがって、0以外の B の固有値は全2負であり、2それぞれに対応する固有ベクトルが b の張る1次元部分空間の直交補空間を張る、2つある。

2.2 (3) に登場する B は $b = W^\pm 1_N$ として上の補題の結果を用いる。2.3) の中の v もこの b に対し $\langle v, b \rangle = 0$ である。したがって、2.3) より次の微分不等式が従う。

$$(4) \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta \right) \|v\|^2 \leq -(2\delta - 2f(u)) \|v\|^2 \quad (v, t) \in \mathbb{R}^N \times (0, \infty)$$

$\Delta \|v\|^2 = 2 {}^t v \cdot \Delta v + 2 \sum_{k=1}^N \left\| \frac{\partial v}{\partial x_k} \right\|^2 \geq 2 {}^t v \cdot \Delta v$ に注意すればよい。 v は u の連続函数、 u は J_1 の軌道集合の

この事には注意が必要、適当に $c > 0$ にとりて

定義

$$\varphi = \varphi(x, t) = c \|v\|^2$$

とすると、 $0 \leq \varphi(x, t) \leq 1$ $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ とし

よ。 (4) を示す

$$(5) \begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right) \varphi \leq -(2\delta - 2f(x)) \varphi & (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ 0 \leq \varphi(x, t) \leq 1 \end{cases}$$

任意の $R > 0$ にとりて $B_R = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| < R\}$ とする

と、命題 1、より次の様な $T_R > 0$ が取れる。

$$(5)_R \begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right) \varphi \leq -\delta \varphi & (x, t) \in B_R \times [T_R, \infty) \\ 0 \leq \varphi(x, t) \leq 1 \end{cases}$$

比較原理により次の事が成り立つ。

命題 2

$$0 \leq \varphi(x, t) \leq \varphi_R(x, t) \quad (x, t) \in B_R \times [T_R, \infty)$$

ただし φ_R は次の (6)_R の解である。

$$(6)_R \begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right) \varphi_R = -\delta \varphi_R & (x, t) \in B_R \times (T_R, \infty) \\ \varphi_R(x, t) = 1 & (x, t) \in \partial B_R \times (T_R, \infty) \\ \varphi_R(x, T_R) = 1 \end{cases}$$

$$(7)_R \quad \begin{cases} -\Delta \psi_R = -\delta \psi_R & x \in B_R \\ \psi_R(x) = 1 & x \in \partial B_R \end{cases}$$

の解は

$$(8)_R \quad \psi_R(x) = \frac{|x|^{1-\frac{n}{2}} I_{\frac{n}{2}-1}(\sqrt{\delta}|x|)}{R^{1-\frac{n}{2}} I_{\frac{n}{2}-1}(\sqrt{\delta}R)}$$

である。ただし $I_\nu(z)$ は ν 次零形 Bessel 関数であり、

$$\left[\left(\frac{d}{dz} \right)^2 + \frac{1}{z} \frac{d}{dz} - \left(1 + \frac{\nu^2}{z^2} \right) \right] I_\nu(z) = 0$$

を満たし

$$I_\nu(z) \sim \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}} \quad \text{as } z \rightarrow +\infty$$

$$\sim \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{z}{2} \right)^\nu \quad \text{as } z \rightarrow 0$$

$$I_\nu(z) > 0, \quad z > 0$$

たる性質を持つ。

命題 3.

$$\psi_R(x, t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \psi_R(x) \quad B_R \text{ 上-様に}$$

である。

命題 4. 任意の $R_0 > 0$ に対し

$$\psi_R(x) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \quad B_{R_0} \text{ 上で一様に}$$

が明かである。命題 2, 3, 4 より

命題 5.

$$\|v\| = \|W^{-\frac{1}{2}}(u - \alpha w)\| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$$

$x \in \mathbb{R}^m$ に対し 2γ のホスト一様収束。

命題 1, 5 より定理の結論。

$$u(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} w \quad x \in \mathbb{R}^m \text{ 上で } 2\gamma \text{ のホスト一様に}$$

を得る。

参考文献

[1] N. Ikeda - Y. Kametaka : 題未定, 未刊。

[2] K. Masuda : On the growth of solutions of nonlinear diffusion equation $u_t = \Delta u + F(u)$

(to appear)