

特に表1で  $r < 1.72$  の場合には1周期の間に  $E_0$  が正から負へ、又負から正にかわる。 $E_0 > 0$  の領域では運動は2つの谷をまたいでいるが、 $E_0$  が負になると右又は左の谷に落ちこみ振動する。再び  $E_0$  が正になると谷からぬけ出して2つの谷をまたぐ振動を始める。このプロセスを繰り返す。右の谷に

落ちるか左の谷に落ちるかは解の(i)と(ii)の接続によって一意的に決定される。従って運動は決定論的である。しかし解の  $x_0$  中の  $\omega$  は  $\phi$  を積分したものであるから解は運動の履歴に依存している。この事実が決定論的にもかわらずどちらの谷に落

ちるかの予想を困難にしている理由である。3次元空間の軌道を  $x-m$  平面に射影したものを図2に示した。理論とシミュレーションの結果はよく一致している。

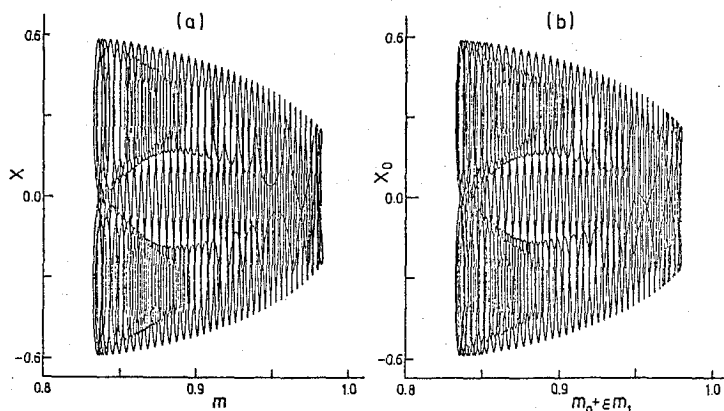


図2 アトラクター (a) シミュレーション (b) 理論

## 参考文献

- 1 T. Shimizu and A. Ichimura, in press (Phys. Lett. A).

## “トーラス” 周波数ロッキング “カオス” における “周期加現象”

東大・理 金子 邦彦

### § 1. 2次元マップによる周期加現象の発見

トーラスからロッキングを経てカオスに至る例は、流体実験等で数多くみられる。その際のメカニズム、規則性を調べよう。まず、2次元マップを用いる。たとえば、マップ

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 - Ax_n^2 + D(y_n - x_n) \\ y_{n+1} = 1 - Ay_n^2 + D(x_n - y_n) \end{cases} \quad (1)$$

(結合ロジスティック・モデル;  $D = 0.1$  とする。) このマップは、 $1.34 < A < 1.355$  で、

8 周期→8×トーラス→カオスの分岐を示す。その途中で、8×4 周期へのロッキングが起るが、その前に  $8 \times (8n-1)$  のロッキングが順次  $A_n$  であらわれ、 $A_n^f$  で消える。各  $8 \times (8n-1)$  周期 ( $n \geq 5$ ) は周期倍現象をおこし、局所的なカオスに至る。この時、

$$\begin{aligned} A_\infty - A_n &\propto n^{-2} \\ (A_n^f - A_n) &\propto n^{-3} \end{aligned} \quad (2)$$

等の臨界現象が見出された。

## § 2. 1次元マップによる理解

この現象はどのようにして説明されるか？ そのために、トーラス・マップ

$$x_{n+1} = f(x_n) = x_n + A \sin 2\pi x_n + D \pmod{1} \quad (3)$$

を用いる。最近、Shenker が Fibonacci 数列の周期をおって、このマップを調べているが、ここでは、もっとナイーブに  $A$  を分岐パラメタとして調べる。 $A$  が  $1/(2\pi)$  ( $1/(2\pi)$  は、マップ(3)が逆をもつかどうかの境界。 $A < 1/(2\pi)$  では、アトラクターはトーラスか周期解、 $A > 1/(2\pi)$  ではカオスか周期解)の近くなると、ロッキングは非常に起り易くなる。その際に、たとえば、rotation number  $1/5$  のロッキングの前には、rot. no.  $n/(5n-1)$  のロッキングが順次おこり、§ 1 のような臨界現象が見られる。このことは、ロッキングが接線分岐によって起ることを考えると、5 周期点の近くで、( $A_\infty$  は  $1/5$  のロッキングの始まる値)

$$f^5(x; A) \approx x + Bx^2 + C(A - A_\infty) \quad (4)$$

と書けることを用いて、容易に説明できる。(Pomeau-Manneville の Intermittency の理論と同様。) また、各周期のリアプノフ数が  $1/n$  でスケールされることも説明される。

## § 3. 相似性

数値計算によると、 $(5n-1)$  周期の  $A_n + \delta A$  でのリアプノフ数  $\lambda$  をスケールした

$$\tilde{\lambda}_n(z) = n\lambda(A_n + n^3 Cz)$$

が  $n \rightarrow \infty$  である固定点関数に近づく。このことは、 $f^{5n-1}(x)$  の一番小さな構造に着目すると、

$$f_n(x) \equiv \alpha_n^{-1}(f^{5n-1}(\alpha_n x + x_0^n; A_n) - x_0^n) \quad (5)$$

が、 $n \rightarrow \infty$ で固定点関数に近づくことを用いて説明される。この固定点関数をくりこみ群的に求めることはまだできていないが、この関数の曲率によって、

- 1) 各周期は接線分岐で生じ、接線分岐で消滅する。途中に superstable cycle はない。
- 2) 1)と同様だが、途中に2回、superstable cycle がある。
- 3) 接線分岐が始まるが、周期倍現象でカオスに至る（ないしは、周期倍現象が途中でとまり、  
 $"p \rightarrow 2 \cdot p \rightarrow \dots \rightarrow 2^{k-1} p \rightarrow 2^k p \rightarrow 2^{k-1} p \rightarrow \dots p"$  のようになる）

の3つの場合があることがわかる。そのいずれもマップ(3)であらわれる。§1の例は3)にあっている。また、発達したカオスの中にあらわれる“窓”の構造の相似性（たとえば、マップ(3)で $A$ を $D=0.25$ に近づける時に見られる周期解）も3)として理解される。

#### § 4. おわりに

ロッキングのメカニズムは、以上で多少わかってきたが、トーラスからカオスの問題はまだほとんど分っていない。ロッキングを経ずにカオスへ行く例、またロッキングをはさみながらカオスが発達していくメカニズム等をこれから調べていきたいと思っている。また、§1の2次元マップの問題としても、 $(4n-1)$ でなく $(8n-1)$ 周期が順次ロックされる理由、また、カオスに至る前にトーラスが必ず歪められるが、それを定量的に調べる方法はないのか（保存系での Kadanoff, Shenker らの仕事が1つの指針となる。）等さまざまな問題が残されている。

原理的には、ロッキングは任意の有理数で起るのだが、ここで述べた系列がもっとも安定に存在することを示せる。その点からも、ここで述べた現象が Benárd 対流等の実験で見出されることが期待される。

概略のみを簡単に述べてきましたが、詳しくは、Prog. Theor. Phys. 68 No.2 , 及び現在投稿準備中のものを（参考文献についても、その中の文献を）参照して下さい。

### 周期倍現象におけるフーリエ・ スペクトルのパラメーター依存性

京大・基研 大同寛明

周期倍現象 (period-doubling phenomenon) は近年、諸種の非線形非平衡系で観測されるようになってきた。しかも、それらの実験結果をみると、分岐の収束比およびフーリエ・