

弱いプラズマ乱流の理論

水 野 幸 雄 (名大プラズマ研)

1 はじめに

乱流理論の重要な目標の一つは、乱流のエネルギー・スペクトルを求めることにある。一つのプラズマの系が与えられたとき線型理論によれば分散式を解くことによりそのプラズマ中で起り得る波の振動数 ω が波数ベクトル $\mathbf{k}$ の函数として $\omega = \omega_r(\mathbf{k}) + i r(\mathbf{k})$ と求まる。ここで $\omega(\mathbf{k})$ の形は一般に平均の速度分布に依存する。 $r > 0$ ならばこの振動数に対応する波は不安定であつて、振幅は $\exp(rt)$ に比例して時間と共に増大する。しかし供給できるエネルギーの量は有限であるから振幅が無限に増大することはない、ある時間の後には非線型が効いて必ず飽和に達する。この飽和の起る機構としては大別して次の2つが考えられる。

オ1は平均の速度分布が変化するため $r(\mathbf{k})$ が0に近づき成長が止まる機構である。オ2は $r(\mathbf{k})$ は正であるが他のモードの波との相互作用によりエネルギーが他のモードの流れ、エネルギーのバランスから成長が止まる機構である。このうちオ1の機構は準線型理論で論じることができる。ここではKadomtsevに従つてオ2の機構を取扱う一つの方法を紹介する。非線型が本質的に効く場合には一つの波の励起は必然的に他の波の励起を伴い、定常状態では一つのエネルギー・スペクトルを形成する。この理論はこのスペクトルを支配する方程式を見出し、その解を論ずることに主眼点をおいている。

2 Kadomtsev の弱い乱流の理論

ここでは説明用の例として、一様定常な電子プラズマ中の準静電的な波のみを扱うこととし、電場のポテンシャル $\phi(\mathbf{r}, t)$ の相関函数、又はより適切なものとしてそのフーリエ変換 $\phi_{\mathbf{k}\omega}$ の相関函数 $\langle \phi_{\mathbf{k}'\omega'}^* \phi_{\mathbf{k}\omega} \rangle = I_{\mathbf{k}\omega} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta(\omega - \omega')$ の $I_{\mathbf{k}\omega}$ に対する式を求めることを目標とする。まずVlasov方程式から出発する；

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} - \frac{e}{m} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0, \\ \text{div } \mathbf{E} = -4\pi e \left(\int f d\mathbf{v} - n_0 \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

この方程式は見方を変えれば N 個の粒子からなる系の運動を記述する力学方程式 (Klimontovich 方程式) と見做され

$$f_N(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) = \sum_{j=1}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j(t)) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_j(t)) \quad (2.2)$$

が厳密な解となつている。但し $m\ddot{\mathbf{r}}_j = -e\mathbf{E}$, $\dot{\mathbf{r}}_j = \mathbf{v}_j$ を満しているものとする。ここで $f_N(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t)$ を

$$\begin{aligned} f_N(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) &\equiv f_0(\mathbf{v}) + f'(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) \\ &\equiv f_0(\mathbf{v}) + f_1(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) + f^\mu(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (2.3)$$

と分けて考える。ただし $f_0(\mathbf{v}) \equiv \langle f_N(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) \rangle$ ($\langle \rangle$ は ensemble average) であつて平均の分布函数をあらわし、時間、空間に弱く依存してもよいとする。また $f_0 + f_1$ はなめらかな分布函数を定義するに十分な大きさをもつ位相空間の体積要素 $d\mathbf{v}d\mathbf{r}$ 内で f_N を平均したもので普通の意味での分布函数をあらわし、 f^μ はそれからのはずれで粒子的規模でのゆらぎをあらわす。 f^μ は成長すべき波の "たね" の役割を演ずる。以下では f^μ を互に相互作用をもたない自由粒子の集団のゆらぎで近似して得られる性質

$$\langle f_{\mathbf{k}\omega}^\mu(\mathbf{v}) f_{\mathbf{k}'\omega'}^{\mu*}(\mathbf{v}) \rangle = \frac{f_0(\mathbf{v})}{(2\pi)^3} \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}') \delta(\omega - \omega') \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \quad (2.4)$$

だけが用いられる。

f' のフーリエ変換を $f_{\mathbf{k}\omega}$ とおくと非線型項を無視する近似では (2.1) は

$$(-i\omega + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) f_{\mathbf{k}\omega} = -\frac{e}{m} i\mathbf{k} \cdot \varphi_{\mathbf{k}\omega} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} \quad (2.5)$$

となりその解として

$$f_{\mathbf{k}\omega} = (g_{\mathbf{k}\omega} \cdot \mathbf{k}) f_0 \varphi_{\mathbf{k}\omega} + f_{\mathbf{k}\omega}^\mu \quad (2.6)$$

Plasma

を得る。ただしここで $(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) f_{\mathbf{k}\omega}^{\mu} = 0$ および $\varphi_{\mathbf{k}\omega} = 0$ のとき $f_{\mathbf{k}\omega} = f_{\mathbf{k}\omega}^{\mu}$ となることを用いた。また $g_{\mathbf{k}\omega}$ は

$$g_{\mathbf{k}\omega} = \frac{e}{m} \frac{1}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} + i\nu} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \quad (\nu \rightarrow +0) \quad (2.7)$$

で定義される演算子である。これを $k^2 \varphi_{\mathbf{k}\omega} = -4\pi e \int f_{\mathbf{k}\omega} d\mathbf{v}$ に代入することにより

$$\varepsilon(\mathbf{k}\omega) \varphi_{\mathbf{k}\omega} = -\frac{4\pi e}{k^2} \int f_{\mathbf{k}\omega}^{\mu} d\mathbf{v}, \quad (2.8)$$

$$\varepsilon(\mathbf{k}\omega) = 1 + \frac{4\pi e^2}{k^2 m} \int \frac{\mathbf{k} \cdot \partial f_0 / \partial \mathbf{v}}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} + i\nu} d\mathbf{v}. \quad (2.9)$$

を得る。さらに (2.8) とその複素共役を掛け合せて ensemble average をとることにより (2.4) も用いて

$$|\varepsilon(\mathbf{k}\omega)|^2 I_{\mathbf{k}\omega} = \frac{2}{\pi} \frac{e^2}{k^4} \int f_0(\mathbf{v}) \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) d\mathbf{v}. \quad (2.10)$$

を得る。右辺は熱的ゆらぎ $f_{\mathbf{k}\omega}^{\mu}$ が乱れの源泉の役割を演じていることを示している。

非線型の場合には (2.5) の代りに

$$\begin{aligned} (-i\omega + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) f_{\mathbf{k}\omega} = & -\frac{e}{m} i\mathbf{k} \cdot \varphi_{\mathbf{k}\omega} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} \\ & - \frac{e}{m} \iint \left\{ i\mathbf{k}' \cdot \varphi_{\mathbf{k}'\omega'} \frac{\partial f_{\mathbf{k}''\omega''}}{\partial \mathbf{v}} - i\mathbf{k}' \cdot \left\langle \varphi_{\mathbf{k}'\omega'} \frac{\partial f_{\mathbf{k}''\omega''}}{\partial \mathbf{v}} \right\rangle \right\} d\mathbf{k}' d\omega' \end{aligned} \quad (2.11)$$

が得られる。ただし $\mathbf{k}'' = \mathbf{k} - \mathbf{k}'$, $\omega'' = \omega - \omega'$ で、最後の項は $\langle f_{\mathbf{k}\omega} \rangle = 0$ と両立する形に直してある。これから

$$f_{\mathbf{k}\omega} = f_{\mathbf{k}\omega}^{\mu} + (g_{\mathbf{k}\omega} \cdot \mathbf{k}) f_0 \varphi_{\mathbf{k}\omega} + \int (g_{\mathbf{k}\omega} \cdot \mathbf{k}') R \varphi_{\mathbf{k}'\omega'} f_{\mathbf{k}''\omega''} d\mathbf{k}' d\omega' \quad (2.12)$$

$(R\varphi \equiv \varphi - \langle \varphi \rangle)$ が得られ、非線型の効果が小さいとして逐次代入法で展開しておいて Poisson の式に入れると

$$\varepsilon(\mathbf{k}\omega)\varphi_{\mathbf{k}\omega} = -\frac{4\pi e}{k^2} \int f_{\mathbf{k}\omega}^{\mu} d\mathbf{v} + (\varphi\varphi) + (\varphi\varphi\varphi) + \dots \quad (2.13)$$

となる。ここで右辺才2項、才3項はそれぞれ φ の2次式、3次式をあらわす。

次に $\varphi_{\mathbf{k}\omega}$ を非線型効果で展開して $\varphi_{\mathbf{k}\omega} = \varphi_{\mathbf{k}\omega}^{(0)} + \varphi_{\mathbf{k}\omega}^{(1)} + \dots$, $\varepsilon(\mathbf{k}\omega)\varphi_{\mathbf{k}\omega}^{(0)} = 0$ とおくと

$$\varepsilon(\mathbf{k}\omega)\varphi_{\mathbf{k}\omega}^{(1)} = -\frac{4\pi e}{k^2} \int f_{\mathbf{k}\omega}^{\mu} d\mathbf{v} + (\varphi^{(0)}\varphi^{(0)}) \quad (2.14)$$

となるが、この式は右辺を外力とする強制振動の形をしている。振動が充分成長して定常になつたプラズマではあらゆる振動はそれ以上成長しない状態になつている。このことはより高次の相関の結果 $\varepsilon(\mathbf{k}\omega)$ が少し変化してそれから得られる分散式が $r \leq 0$ の形の解だけをもつようになつたとして実効的にとり入れることができる。こうしてここでは(2.14)の解として

$$\varphi_{\mathbf{k}\omega}^{(1)} = \frac{1}{\varepsilon_+(\mathbf{k}\omega)} \left[-\frac{4\pi e}{k^2} \int f_{\mathbf{k}\omega}^{\mu} d\mathbf{v} + (\varphi^{(0)}\varphi^{(0)}) \right] \quad (2.15)$$

を採る。ただし $\varepsilon_+(\mathbf{k}\omega) \equiv \varepsilon(\mathbf{k}\omega + i\nu)$ で ν は適当にとつて上の条件を満足させたものとする。

ここで(2.13)に $\varphi_{\mathbf{k}\omega}^*$ を掛けてensemble averageをとり、乱れは準正規分布の仮定に従うものとする、定常な場合の $I_{\mathbf{k}\omega}$ の従う方程式として次の式を得る。

$$\begin{aligned} \varepsilon(\mathbf{k}\omega) I_{\mathbf{k}\omega} &= \frac{2}{\pi} \frac{e^2}{k^4} \frac{1}{\varepsilon_+^*(\mathbf{k}\omega)} \int f_0(\mathbf{v}) \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) d\mathbf{v} \\ &+ I_{\mathbf{k}\omega} \frac{4\pi e}{k^2} \iint (\mathbf{k}' \cdot \mathbf{g}_{\mathbf{k}\omega}) \{ (\mathbf{k} \cdot \mathbf{g}_{\mathbf{k}''\omega''}) (\mathbf{k}' \cdot \mathbf{g}_{\mathbf{k}'-\omega'}) f_0 \\ &+ (\mathbf{k}' \cdot \mathbf{g}_{\mathbf{k}''\omega''}) (\mathbf{k} \cdot \mathbf{g}_{\mathbf{k}\omega}) f_0 \} d\mathbf{v} I_{\mathbf{k}'\omega'} d\mathbf{k}' d\omega' \\ &+ I_{\mathbf{k}\omega} \int d\mathbf{k}' d\omega' \frac{\mathbf{v}_{\mathbf{k}''\omega''} \mathbf{v}_{\mathbf{k}\omega} \mathbf{v}_{\mathbf{k}'\omega'}}{\varepsilon_+(\mathbf{k}''\omega'')} I_{\mathbf{k}'\omega'} d\mathbf{k}' d\omega' \\ &+ \frac{1}{2\varepsilon_+^*(\mathbf{k}\omega)} \int |\mathbf{v}_{\mathbf{k}\omega} \mathbf{v}_{\mathbf{k}'\omega'}|^2 I_{\mathbf{k}'\omega'} I_{\mathbf{k}''\omega''} d\mathbf{k}' d\omega' \end{aligned} \quad (2.16)$$

Plasma

ただし $V_{k\omega k'\omega'} = V_{k\omega k'\omega'} + V_{k\omega k''\omega''}$, $V_{k\omega k'\omega'} = -\frac{4\pi e}{k^2} \int (g_{k\omega \cdot k'})(g_{k''\omega'' \cdot k''}) f_0 dv$, $k'' = k - k'$, $\omega'' = \omega - \omega'$ であり、 I について3次以上の項は無視した。

(2.16)式は $\epsilon(k\omega) I_{k\omega} = q + AI^2 + \dots$ の形をしている。 q は励起された波に比して充分小さい。また $\epsilon = \epsilon' + i\epsilon''$ とするとき $kl_D \gg 1$ ならば (l_D はデバイの長さ), $|\epsilon''| \ll |\epsilon'|$ が成立する。従つて乱れが比較的小さい非線型の効果が無視できるオ1近似では (2.16)は

$$\epsilon(k\omega) I_{k\omega} = 0 \quad \text{従つて} \quad I_{k\omega} = I_k \delta(\omega - \omega_k) \quad (2.17)$$

となる。 ω_k は k に対する固有振動数である。かくしてオ1近似では弱い乱流は固有振動の集りと考えることができる。

次の近似としては (2.16) の両辺の虚数部分をとる。 $r_k = -\epsilon''(k\omega_k)/(\partial \epsilon'/\partial \omega)_{k\omega_k}$ および (2.17)を考慮すると

$$\begin{aligned} 0 = & r_k I_k + \frac{2e^2}{k^4} \left(\frac{\partial \epsilon'}{\partial \omega} \right)_{k\omega_k}^{-2} \int f_0 \delta(\omega_k - k \cdot v) dv \\ & + I_k \left(\frac{\partial \epsilon'}{\partial \omega} \right)_{k\omega_k}^{-1} \mathcal{I}_m \frac{4\pi e}{k^2} \iint (k' \cdot g_{k\omega}) \{ (k \cdot g_{k''\omega''}) (k' \cdot g_{k'-\omega'}) f_0 \\ & + (k' \cdot g_{k''\omega''}) (k \cdot g_{k\omega}) f_0 \} dv I_{k'} dk' \\ & + I_k \left(\frac{\partial \epsilon'}{\partial \omega} \right)_{k\omega_k}^{-1} \mathcal{I}_m \int \frac{V_{k\omega k''\omega''} V_{k''\omega'' k\omega}}{\epsilon_+(k'', \omega'')} I_{k'} dk' \\ & + \frac{\pi}{2} \left(\frac{\partial \epsilon'}{\partial \omega} \right)_{k\omega_k}^{-2} \int |V_{k\omega k'\omega'}|^2 \delta(\omega_k - \omega_{k'} - \omega_{k''}) I_{k'} I_{k''} dk' \end{aligned} \quad (2.18)$$

を得る。ただし $k'' = k - k'$, $\omega'' = \omega - \omega' = \omega_k - \omega_{k'}$ 。

また非定常なときは線型理論では $\partial I_k / \partial t = 2r_k I_k$ であることを考慮すると非線型を考えに入れた式は

$$\frac{1}{2} \frac{\partial I_k}{\partial t} = (2.18) \text{式の右辺} \quad (2.19)$$

となる。これがKadomtsev の与えれ基礎方程式である。

(2.19)式の右辺の各項は種々の物理的解釈ができる。例えば $\delta(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'} - \omega_{\mathbf{k}''})$ は2つの波が融合して1つの波をつくる過程、またはその逆過程でのエネルギー保存をあらわし、 $\mathbf{g}_{\mathbf{k}''\omega''}$ から導かれる $\delta(\omega'' - \mathbf{k}'' \cdot \mathbf{v})$ は $\mathbf{v}$ という速度をもつ粒子による波のコンプトン散乱をあらわすと考えられる。この式をプラズマ振動に適用すると $\omega_{\mathbf{k}} \approx \omega_p$ から $\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'} - \omega_{\mathbf{k}''} \approx 0$ となるので $\delta(\omega'' - \mathbf{k}'' \cdot \mathbf{v})$ に比例する項が主要な寄与を与え

$$\frac{\partial I_{\mathbf{k}}}{\partial t} = \frac{I_{\mathbf{k}}}{\omega_p m k^2 n_0^2} \iint (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}')^2 (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v})^2 \delta(\omega'' - \mathbf{k}'' \cdot \mathbf{v}) \mathbf{k}'' \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} d\mathbf{v} I_{\mathbf{k}'} d\mathbf{k}' \quad (2.20)$$

が得られる。 f_0 がマクスウェル分布ならばエネルギーは k の大きいところから小さいところへと流れることが示される。またコンプトン散乱でのエネルギー保存の条件 $\delta(\omega'' - \mathbf{k}'' \cdot \mathbf{v})$ は2つの波のうなりと共鳴する粒子が関与してエネルギーの移動を起すとも解釈できるので、波の位相速度と等しい速度の粒子のひきおこす Landau 減衰との類似から非線型 Landau 減衰とも呼ばれている。

3 負吸収媒質中での輻射強度の飽和

前述の方法は非線型によるあるモードの波の飽和の現象を扱うのに適している。そのような応用の1例として負の吸収係数をもつ媒質中での輻射強度の飽和の現象をとりあげる。

定常磁場が z 方向にかかっているプラズマ中で $E^{(+)} = E_x - iE_y$ という右回りの波に対する電気伝導度は $k \rightarrow 0$ の極限で

$$\sigma_{\omega}^{(+)} = -\frac{e}{m} \frac{4\pi}{3} \int_0^{\infty} \frac{v^3 f_0'}{\nu - i(\omega - \omega_c)} dv \quad (3.1)$$

で与えられる。 ω_c は電子の cyclotron frequency, $\nu(v)$ は collision frequency。特に $\omega = \omega_c$ では

$$\sigma_{\omega_c}^{(+)} = -\frac{e}{m} \frac{4\pi}{3} \int_0^{\infty} \frac{v^3}{\nu} f_0' dv = \frac{e}{m} \frac{4\pi}{3} \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{v^3}{\nu} \right) f_0 dv \quad (3.2)$$

であるから $(\partial/\partial v)(v^3/\nu) < 0$ の領域をもつガス中では $f_0(v)$ の形が適当ならば $\sigma_{\omega_c}^{(+)} < 0$ となり、その波はプラズマ中を伝播するとき次第に増巾される。この現象は X_e , K_r などからなる弱电離プラズマ中で実際に見つかっているが

Plasma

同時に入射する波が強すぎると飽和の現象により却つて減衰が起ることも知られている。

この問題では基礎方程式は (2.1) の Vlasov 方程式の代りに

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} - \frac{e}{m} (\mathbf{E} + \frac{1}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{B})) \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = -\nu(\mathbf{v}) f \quad (3.3)$$

をとる。今は $x \rightarrow 0$ の極限だけを考えることにすると、 $g_{k\omega}$ という演算子の代りに

$$g_{\omega} = \frac{1}{\omega_c} \int_{-\infty}^{\psi} d\psi' \exp\left(-\frac{\nu - i\omega}{\omega_c} (\psi' - \psi)\right) \quad (3.4)$$

が必要になる (ψ は速度空間での円柱座標の方位角)。以下はポテンシャル $\phi(\mathbf{r}, t)$ の代りに電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ 自身を用いる以外、前述の方法とほぼ平行して話が進められ、輻射強度のある分布では非線型項の効果で $\omega = \omega_c$ という波の振巾もある値に抑えられることが示され、この飽和の振巾の大きさの程度も評価される。しかしまだこの扱いは未完成で、なお色々と疑問の点も残っているので、ここではこのような応用が考えられているという報告にとどめておく。

Frieman-Rutherford の弱不安定プラズマの理論

紹介者 都 築 俊 夫 (京大理)

弱不安定プラズマの輸送方程式を、非線型 Vlasov 方程式を出発点とする場合 (generalized quasilinear theory 又は g.q.t.) と、空間的に均一な系の B-B-G-K-Y 方程式を出発点とする場合 (kinetic theory 又は k.t.) の二つの場合について、Bogoliubov-Frieman の非線型方程式に対する展開方式を用いて導く。ここに弱不安定プラズマとは、波のエネルギーが、不安定励起によつて熱平衡状態における値よりは充分大きくなっているが、しかしそれは粒子の運動エネルギーよりは充分小さいような場合を云う。この場合、不安定励起は波の間のモード間結合で抑制されるが、しかしその効果は摂