

Kesten の Nonlinear Stochastic Growth Models

京産大 理 森 隆 一

Kesten の一連の論文

- [1] H. Kesten, "Some non-linear stochastic growth models."
Bull. A.M.S. 77 (1971) 492 ~ 511
- [2] ———, "Quadratic transformations," I, II.
Adv. Appl. Prob. 2 (1970) , 1~82 , 179~228
- [3] ———, "Limit theorems for stochastic growth models."
I, II. Adv. Appl. Prob. 4 (1972) 193~232, ?.
- [4] — and P. Stigum "Balanced growth under uncertainty in decomposable economies" preprint

の紹介を行う。なお[1]は Kesten 自身がまとめた要約である。

1. Multitype Galton-Watson process について

Generating function $f_i(s) = \sum_r p_i(r) s_1^{r_1} \cdots s_d^{r_d}$
が与えられたとする。但し d は integer positive $r = (r_1, \dots, r_d)$

は nonnegative integer の d -vector, $S = (s_1, \dots, s_d)$ は $|s_i| \leq 1$ なる complex d -vector. このとき次の条件をみたす $(\mathbb{Z}_+)^d$ -valued Markov chain X_n , ($\mathbb{Z}_+$ は non-negative integer の全体), を Multitype Galton-Watson process という.

$$(1) \quad E(S^{X_{n+1}} | X_0, \dots, X_n) = \prod_{i=1}^d f_i(s)^{X_n(i)}$$

$X_n(i)$ は X_n の i -成分.

(1) より各粒子は互いに独立に粒子を生み. この分布は粒子の type によって変る.

$$0 < m_{ij} \equiv \frac{\partial f_i(s)}{\partial s_j} \Big|_{s=(1, \dots, 1)} < \infty, \quad \frac{\partial^2 f_i(s)}{\partial s_j \partial s_k} \Big|_{s=(1, \dots, 1)} < \infty$$

と仮定し $M \equiv (m_{ij})$ なる matrix とすれば, まず Perron-Frobenius の定理により, M は絶対値最大, 正かつ simple な固有値 ρ をもち, 対応する右 (左) 固有 vector u (v) は strictly positive で $u \cdot v = 1$ と仮定すれば.

$$\left| \frac{M^n(i,j)}{\rho^n} - u(i)v(j) \right| \leq K \lambda^n \quad 0 \leq \lambda < 1$$

がなりたつ. 更に.

$$\rho \leq 1 \text{ ならば } X_n = 0 \text{ eventually } (\exists N, X_n = 0 \text{ for } n \geq N)$$

$$\rho > 1 \text{ ならば } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{\rho^n} = w \cdot v \quad \text{a.e.}$$

w は 1 次元確率変数で.

$$1 > \text{Prob}\{w=0\} = \text{Prob}\{X_n=0 \text{ eventually}\}.$$

2. Fisher-Wright-Haldane の model.

G.W.-process を含む ある process の class に対して同様の極限定理を示すことが目標であるが、この定理に移るまえに、基本的な例を示すことにする。1-step の transition probability が決まってくる $(\mathbb{Z}_+)^d$ -valued Markov chain を考える。 $Z_n = Z$ の場合にまず $\lfloor \frac{|Z|}{2} \rfloor$ 個の couple を作る。(但し $|Z| \equiv \sum_{i=1}^d Z(i)$, $Z = (Z(1), \dots, Z(d))$.) このつくり方は random drawing without replacement により $2r-1$ 番目と $2r$ 番目のものが 1 つの couple をつくる。最初が j -type であるが k -type のものを (j, k) -couple と呼ぶ。次に各 couple は互いに独立に $n+1$ -世代の粒子を生む。この場合の分布は couple の type によって決まるものとする。更に $f(i/j, k)$, $J^2(i/j, k)$ とする (j, k) -couple より生まれる i -type の粒子の平均個数及び分散とし共に有限と仮定する。

この model に対して次のことがなりたつ。 $E_n(\cdot)$ は $E(\cdot / Z_0, \dots, Z_n)$ 又は $E(\cdot / X_0, \dots, X_n)$ と読んだものとすると、

$$(2) \quad E_n(Z_{n+1}(i)) = \sum_{j,k} f(i/j, k) \frac{\lfloor \frac{|Z_n|}{2} \rfloor}{|Z_n|} \frac{Z_n(j)}{|Z_n|-1} \frac{Z_n(k)}{|Z_n|-1}$$

更に Z_{n+1} の条件付分散は $|Z_n|$ の order に反する。

- 3 G.W. process については.

$$(3) E_n(X_{n+1}(i)) = \sum_{j=1}^d m_{ji} X_n(j)$$

となり、(2)と(3)を比べてみると(2)の右辺は Z_n の二次式、(3)の右辺は X_n の一次式である。ここで次の operator を考える。

$$(4) Tz(i) = \frac{\sum_{j,k=1}^d z(j)z(k)f(i|j,k)}{\sum_{j,k=1}^d z(j)z(k)f(l|j,k)} : A \rightarrow A.$$

$$A = \{z = (z(i)) : z(i) \geq 0, \sum z(i) = 1\}$$

$$(5) \tau(Z) \equiv \frac{|Z_n|}{2} \sum_{j,k,l} \tilde{Z}_n(j) \tilde{Z}_n(k) f(l|j,k) : (\mathbb{R}_+)^d \rightarrow \mathbb{R}_+$$

$$0 \neq Z \in (\mathbb{R}_+)^d \text{ に対し } \tilde{Z} \equiv \frac{Z}{|Z|} \in A.$$

これをを用いるのは。

$$(6) E_n Z_{n+1}(i) = \tau(Z_n) T \tilde{Z}_n + Y_n, |Y_n| \leq K$$

とかくことができる。平均個数の変化のうる T は割合としては絶対値の変化を表わると考えられる。収束定理の deterministic 部分, G.W. process における Perron-Frobenius の定理に相当する部分を調べるのが次の問題となる。即ち T は A 上の連続作用素であるから不動点是否存在するか、更にこの不動点は unique か、また almost contraction (i.e. $\exists K < \infty, 0 \leq \lambda < 1, \forall z \in A, |T^n z - p| \leq K \lambda^n$, p は不動点、以下これを a.c. とかく) かどうかを調べることである。文献 [3] の [I] にこのための十分条件

及び興味ある反例が示されている。十分条件の一つとしては

$$f = \sum_i f(i|j, k) \text{ は } j, k \text{ によらずに } E \text{ の constant.}$$

次にみたす constant $C < \frac{1}{2}$ が存在する。

$$\frac{1}{2f} \sum_i |f(i|j_1, k) - f(i|j_2, k)| \leq C$$

$$\frac{1}{2f} \sum_i |f(i|j, k_1) - f(i|j, k_2)| \leq C \quad \forall j, j_1, j_2, k, k_1, k_2$$

ならば $\mathcal{P}$ の不動点 p は unique かつ a.c. である。

3. 収束定理の formulation 及び結果

FWH-model の不動点 p が unique かつ a.c. である場合の収束定理は [10] の II で示されている。不動点 p が unique でない場合には、

定理 9. [3] $f(i|j, k) = C w_{jk} (s(i|j) + s(i|k))$

$$0 \leq w_{jk} = w_{kj} < \infty$$

なる FWH-model において

(i) $W = (w_{jk})$ の任意の principal subdeterminant は 0 でない。

(ii) $C > 0$ $\forall p: \mathcal{P}$ の不動点 に対し $CF(p) \neq 0$ 。

$$(F(p) \equiv \sum_{i,j} p(i) w_{ij} p(j))$$

(iii) $p(i) = 0$ なる不動点 p に対し $Wp(i) \neq F(p)$

(iv) $\sigma^2(i|i) > 0 \quad \forall i$

(v) $\forall (j, k)$ -couple が子供をもたない確率は正。

ならば確率 1 で random set $\Theta \subset \{1, \dots, d\}$ が存在し

$$\begin{aligned} i \notin \Theta &\Rightarrow Z_n(i) = 0 \text{ eventually (i.e. 殆大 } \approx 1/n \text{ に対し)} \\ i \in \Theta &\Rightarrow Z_n(i) \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

また $\forall Z \subset \{1, \dots, d\}$ に対し

$$G_Z \equiv \{Z_n(i) \rightarrow \infty \ \forall i \in Z, Z_n(i) \rightarrow 0 \ i \notin Z\}$$

上で a.e. に $w > 0$ と不動点 $p \in D(Z) \equiv \{z \in A: z(i) \begin{cases} = 0 & i \notin Z \\ \neq 0 & i \in Z \end{cases}\}$ が存在し

$$\gamma(p) = \sum_{i \in Z} p(i) w_{i,k} \quad p(k) > 0$$

$$\text{及 } w \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Z_n(i)}{(\gamma(p))^n} = w p(i) \quad 1 \leq i \leq d.$$

収束定理はもっと一般な class に対して証明された。

$\{Z_n\}_{n \geq 0}$ を以下の条件を満たす $(\mathbb{R}_+)^d$ -値確率過程とする。

(A). $\exists \tau: (\mathbb{R}_+)^d \rightarrow \mathbb{R}_+$, $\exists T: A \rightarrow A$ $0 < \delta \leq 1/2$

$$|Z_n| \geq K_0 \quad 0 \leq \delta \leq K_1 |Z_n|^\delta$$

に対し

$$P_n \{ |Z_{n+1} - \tau(Z_n) T \tilde{Z}_n| \geq \delta |Z_n|^{1-\delta} \} \leq K_2 \delta^{-2}$$

(B). T は Lipschitz 連続

• T の不動点は有限個 ことを $p_1, \dots, p_k$ とする。

• $\forall p_j$ に対し T はある開近傍 U_j 上で連続的微分可能。

(C) $\exists \tau_0 > 0$, $\exists \gamma: A \rightarrow [\tau_0, \infty)$, $\exists \beta > 0$, $\exists K_5 < \infty$

$$\cdot \tau(Z) \geq \tau_0 |Z|$$

$$\cdot \left| \frac{\tau(Z)}{|Z|} - \gamma(\hat{Z}) \right| \leq K_5 |Z|^{-\beta}$$

$$\cdot |\gamma(z_1) - \gamma(z_2)| \leq K_5 |z_1 - z_2|^\beta$$

— 0 —

$\forall p$: Γ の不動点に対して $\varphi: A \rightarrow \mathbb{R}^{d-1} \in$

$$\varphi(z) \equiv (z(1) - p(1), \dots, z(d-1) - p(d-1))$$

とする。微分可能性の仮定により

$$\varphi(\tau z) = N \varphi(z) + o(|z - p|) \quad z \rightarrow p$$

となる matrix N が存在する。 N の固有値と絶対値の大きい

順にならべたものを $\lambda_1, \dots, \lambda_{d-1}$ とする。

定義 p : strongly stable $\iff |\lambda_1| < 1$

unstable $\iff |\lambda_1| > 1$

strongly stable なるは p のある近傍上で p は almost contraction である。 $\# V \in M = V^{-1} N V$ が

$$\begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & \gamma & & \\ & & \gamma & \\ & & & \gamma \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta & & \\ -\beta & \alpha & & \\ \gamma & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & \gamma & -\beta & \alpha \\ & & & \gamma & 0 & \alpha & \beta \\ & & & 0 & \gamma & -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

なるかたの上行列式からなるものとする。 γ は十分小とす

る。 $\psi \equiv V^{-1} \varphi$ とすると

$$(D) \quad \rho_j = r(p_j) \neq 1.$$

$$|\lambda_i^{(j)}| \neq 1 \quad \forall p_j$$

$$(E) \quad \exists F: A \rightarrow \mathbb{R}_+ \quad \text{s.t.}$$

• F は連続

$$\bullet F(\tau z) \geq F(z) \quad \forall z \in A.$$

等号は z が不動点の場合にのみ成立.

$$\bullet \forall p: \text{unstable} \text{ に対し } \exists a, b: B = \psi(A) \rightarrow \mathbb{R}_+ \quad \text{s.t.}$$

$$(i) \quad a(0) = b(0) = 0$$

$$\|x\| \rightarrow 0 \text{ ならば}$$

$$|a(x) - a(x+\eta)| + |b(x) - b(x+\eta)| \rightarrow 0$$

$$\text{unif. } x \in B, x+\eta \in B$$

$$(ii) \quad \lim_{\Delta \downarrow 0} \sup_{a(x)+b(x) \leq \Delta} \|x\| = 0$$

$$(iii) \quad \exists K_{19} < \infty, 0 \leq \lambda < 1 \text{ 及び } 0 < \varepsilon \leq 1$$

に対し $\Delta_0(\varepsilon)$ が存在し $\forall \Delta \leq \Delta_0(\varepsilon)$ に対し

$$a(u) \leq \Delta, b(u) \leq \varepsilon \Delta, u \in B$$

$$\Rightarrow a(S^u) \leq K_{19} \Delta, b(S^u) \leq 2\varepsilon \Delta$$

$$\bullet a(u) \leq (K_{19} + \varepsilon) \Delta, b(u) \leq 3\varepsilon \Delta, b(u) > \varepsilon a(u)$$

$$u \in B \Rightarrow a(Su) \leq 2K_{19}^2 \Delta, b(Su) \leq \lambda b(u)$$

$$\therefore \tau \quad S = \psi \tau \psi^{-1}$$

更に $\sigma > 0$, $0 < \varepsilon \leq 1$ が存在し $0 < \eta < \sigma$ に対し

$$f(\eta) = f(\eta, \sigma, \varepsilon)$$

$$\equiv \inf \{ F(z) - F(p) : \eta \leq |z - p| \leq \sigma, b(\eta(z)) \leq \varepsilon a(\eta(z)) \}$$

$$> 0$$

(F): unstable な不動点 $\sqrt{A}$ の内点 に対しては

$$\forall L > 0, \forall \eta > 0, \exists K(L, \eta) < \infty, \delta^*(L, \eta) > 0.$$

s.t.

$$P_n \{ |Z_n|^{1/2} \alpha(\varphi(\tilde{Z}_{n+1}) - \varphi(\mathcal{P}\tilde{Z}_n)) \geq L$$

$$|Z_n|^{1/2} \beta(\varphi(\tilde{Z}_{n+1}) - \varphi(\mathcal{P}\tilde{Z}_n)) \leq \eta \}$$

$$\geq \delta^*(L, \eta) \quad \text{a.e. on } \{|Z_n| \geq K(L, \eta), \tilde{Z}_n \in U\}$$

α は 絶対値が 1 より大きい固有値に対応する固有空間への projection, β は 1 より小さいものに対応するもの.

・境界上の unstable な不動点 に対しては.

上 が 成 立 する か, 又は: $p(i) = 0$ なる i に対し

$$P_n \{ |Z_{n+1}(i) - \tau(Z_n) \mathcal{P}\tilde{Z}_n(i)| \geq \gamma |Z_n(i)|^{1-\delta} \}$$

$$\leq K_2 \gamma^{-2}$$

$$\text{if } |Z_n(i)| \geq K_0, \quad 0 \leq \gamma \leq K_1 |Z_n(i)|^\delta$$

及び $\rho_j \lambda > 1$ なる λ が存在し

$$\mathcal{P}\tilde{Z}(i) > \lambda \tilde{Z}(i) \quad \tilde{Z} \in U$$

定理 8 [3] (A) が $\delta = \frac{1}{2}$ に対し成立し (B) $\sim$ (F) が成り立
てば

$$G^* = \{ Z_n(i) \rightarrow \infty \forall i \}$$

上で a.e. に $\rho_j > 1$ なる strongly stable な不動点 ρ_j と
 $w > 0$ が存在し

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Z_n}{(\rho_j)^n} = w \rho_j$$

又 $\forall \rho_j$: strongly stable に対し $\rho_j < 1$ ならば $P\{G^*\} = 0$.