

On the topology in Stein algebras

千葉大 教育 鷗 沢 正 勝

§1. 序

$(X, \mathcal{R})$ を Grauert [8] の意味の解析空間とし, X は可算位相をもつとする. $\mathcal{R}$ を X 上の任意の連接解析層とすると, $\mathcal{R}$ は Frechet 層となり, X 上の任意の開集合 W に対して, W 上の $\mathcal{R}$ の切断の全体 $\Gamma(W, \mathcal{R})$ は Frechet 空間となる (定理 1 系). この位相は, X が reduced な場合と違って, $\mathbb{C}U$ 位相ではない. $\mathbb{C}$ 上の位相環は, ある Stein 空間 $(X, \mathcal{R})$ があって, 位相環 $\Gamma(X, \mathcal{R})$ に同型であるとき, Stein algebra という. $X \subseteq \mathbb{C}^n$ の正則領域とし, $\Gamma(X, \mathcal{O})$ を X 上の正則関数全体とすると, Cartan 及び # 等は次のことを証明した.

1. $\mathcal{O} \in \Gamma(X, \mathcal{O})$ のイデアルとし, $\mathcal{O}\mathcal{O}$ を $\mathcal{O}$ から生成されるイデアルの層とすると, $\Gamma(X, \mathcal{O}\mathcal{O})$ は $\mathcal{O}$ の閉包 $\bar{\mathcal{O}}$ に等しい [2].
2. $\mathcal{O}$ がとくに有限生成的なら, $\mathcal{O} = \bar{\mathcal{O}}$ である [2].
3. $\mathcal{M} \in \Gamma(X, \mathcal{O})$ の極大イデアルとすると, 次の条件は同値である: ④. $\Gamma(X, \mathcal{O})/\mathcal{M} \simeq \mathbb{C}$. ⑤. $\mathcal{M}$ は $\Gamma(X, \mathcal{O})$ の閉イデアル.

iv). 一点 $a \in X$ があり, $M = \{f \in P(X, \mathcal{O}) \mid f(a) = 0\}$ [9].

この小論の目的は上の定理を一般の Stein 空間 $(X, \mathcal{O})$ 即ち Stein algebra にまで拡張することである (定理 2.3, 5). 更にこれらが Stein 加群にまで拡張されることを示す.

§ 2. Frechet 層

以下 $(X, \mathcal{O})$ と書いたら Grauert のいみの解析空間を表わし, $(X, \mathcal{O})$ と書いたら Serre のいみの解析空間 [11] を表わすとする. 又, 解析空間はすべて可算位相をもっているとする.

定義 1. 解析空間 $(X, \mathcal{O})$ は次の条件をもつとすると, Stein 空間という:

(1). $\Gamma(X, \mathcal{O})$ は X の点を分離する.

(2). X は正則凸.

Stein 空間に対しては次の基本定理が成り立つ [8].

Cartan の定理 A, B. $\mathcal{O}$ を Stein 空間 $(X, \mathcal{O})$ 上の連接層とすると,

A. 各点 $x \in X$ に対して, $\Gamma(X, \mathcal{O})$ は $\mathcal{O}_x$ 上 $\mathcal{O}_x$ と生成する.

B. $H^p(X, \mathcal{O}) = 0$, $p \geq 1$.

定義 2. $\mathcal{O}$ を位相空間 X 上のベクトル空間の層とする. 次の条件を満足する開集合の近傍基 $\mathcal{U} = \{U\}$ が存在すると, $\mathcal{O}$ を Frechet 層という:

(1). すべての $U \in \mathcal{U}$ に対して $\Gamma(U, \mathcal{O})$ は Frechet 空間の位相

が入る.

(2). $U, V \in \mathcal{U}$, $U \supset V$ なる制限写像 $r_{V,U}: \Gamma(U, \mathcal{O}) \rightarrow \Gamma(V, \mathcal{O})$ は連続である.

定理1. $(X, \mathcal{A}) \in$ 解析空間とすると, すべての連接層に対し, 次の条件が成り立つように, Frechet の層の位相を一意的に入れることが出来る. 即ち任意の2つの連接層 $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ に対して, 近傍基 $\mathcal{B}$ があって, すべての $U \in \mathcal{U}$ に対して $\Gamma(U, \mathcal{F}), \Gamma(U, \mathcal{G})$ は Frechet 空間であり, 任意の $\mathcal{A}$ 準同型写像 $g: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ に対して, g により引きおこされた写像 $\Gamma(U, g): \Gamma(U, \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(U, \mathcal{G})$ は Frechet 空間の連接写像である [4, 5].

次の補題1はよく知られている.

補題1. $D \subset \mathbb{C}^n$ の領域とすると, D 上の正則関数全体のなす環 $\Gamma(D, \mathcal{O})$ はコンパクト-収束の位相で Frechet 空間となる. 従って任意の正整数 q に対して, $\Gamma(D, \mathcal{O}^q) \simeq \{\Gamma(D, \mathcal{O})\}^q$ も Frechet 空間となる.

補題2. $D \subset \mathbb{C}^n$ の領域, $\mathcal{F}$ と $\mathcal{O}^q$ の (必ずしも連接ではない) 解析的部分層とすると, $\Gamma(D, \mathcal{F})$ は $\Gamma(D, \mathcal{O}^q)$ で閉じている. 従って $\Gamma(D, \mathcal{F})$ は Frechet 空間である [4].

証明. $f_\nu \in \Gamma(D, \mathcal{F})$ を $f_\nu \rightarrow f \in \Gamma(D, \mathcal{O}^q)$ なる点列とする. $w \in D$ に対して, $\mathcal{F}_w$ は $\mathcal{O}_w^q$ の部分層で, $f_{\nu,w} \in \mathcal{F}_w$. 故に局所的な局所用性定理 [2] によつて, $f_{\nu,w} \in \mathcal{F}_w$ となる. 従つて $f \in \Gamma(D, \mathcal{F})$.

定理の証明 $x \in X$ とすると, x の近傍 U_x と, U_x からある $\mathcal{O}^k$ の多重円板 $(\Delta(0;1), \mathcal{O})$ の局所解析部分空間 $(V, \mathcal{R}')$ への同型写像とがある. ここに $\mathcal{R}'$ は $\mathcal{O}$ のあるイデアルの連接層 $\mathcal{J}$ をとって $V = \text{supp}(\mathcal{O}/\mathcal{J}), \mathcal{R}' = \mathcal{O}/\mathcal{J}|_V$ とかける. このような複素空間 $(V, \mathcal{R}')$ を $(U_x, \mathcal{R})$ に対する局所イデアル空間という. $W_{r,x}, 0 < r < 1 \in V|_{\Delta(0;r)}$ のこの同型写像による原像とする. 集合 $\{W_{r,x}\}$ は X の局所近傍基となる. $\mathcal{J}$ を $\mathcal{J}$ の像とする. これは V 上の連接解析層である. $\tilde{\mathcal{J}}$ を $\mathcal{J}$ の $\Delta(0;1)$ へのトリビアルな接続とすると $\tilde{\mathcal{J}}$ は $\mathcal{O}_{\Delta(0;1)}$ -加群の連接層だから基本定理 A, B がつかえる; 任意の $r < 1$ に対して, $\tilde{\mathcal{J}}$ は有限表現をもつ. 即ち次のような $\mathcal{O}_{\Delta(0;r)}$ -加群の完全列が存在する:

$$(1) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{R}_{\Delta(0;r)} \longrightarrow \mathcal{O}^g \xrightarrow{f} \tilde{\mathcal{J}}' \longrightarrow 0 \quad \text{on } \Delta(0;r).$$

従って任意の $r' \leq r$ に対して完全列

$$(2) \quad 0 \longrightarrow \Gamma(\Delta(0;r'), \mathcal{R}) \longrightarrow \Gamma(\Delta(0;r'), \mathcal{O}^g) \xrightarrow{\tilde{f}} \Gamma(\Delta(0;r'), \tilde{\mathcal{J}}') \longrightarrow 0$$

がえられる. 空間 $\Gamma(\Delta(0;r'), \mathcal{O}^g)$ は Fréchet 空間である (補題 1). $\mathcal{R}$ は $\mathcal{O}^g$ の部分層だから $\Gamma(\Delta(0;r'), \mathcal{R})$ は $\Gamma(\Delta(0;r'), \mathcal{O}^g)$ の閉部分空間となる (補題 2). 故に商位相を入れて

$$\Gamma(W_{r,x}, \mathcal{J}) \simeq \Gamma(V|_{\Delta(0;r)}, \mathcal{J}') \simeq \Gamma(\Delta(0;r), \tilde{\mathcal{J}}') \simeq \frac{\Gamma(\Delta(0;r'), \mathcal{O}^g)}{\Gamma(\Delta(0;r'), \mathcal{R})}$$

は Fréchet 空間となる. (1) の如き列が存在する ような $W_{r,x}$ の全体は, X の近傍基 $\mathcal{U} = \{U\}$ をなす. 故に $\Gamma(U, \mathcal{J})$ は Fréchet 空間となった. 明らかに制限写像は連続である. この位相は $\mathcal{J}$ の表

現の与え方に無関係である. 実際別な表現があったとする:

$$0 \longrightarrow \Gamma(\Delta(0; r), \mathcal{O}^g) \longrightarrow \Gamma(\Delta(0; r'), \mathcal{O}^{g'}) \xrightarrow{\tilde{f}} \Gamma(\Delta(0; r'), \tilde{\mathcal{F}}') \longrightarrow 0$$

を対応する完全列とすると, $\Gamma(\Delta(0; r'), \mathcal{O}^{g'})$ は $\Gamma(\Delta(0; r'), \mathcal{O})$ 上の自由 $\mathcal{O}$ -群だから $\Gamma(\Delta(0; r'), \mathcal{O})$ -線型写像

$$(3) \quad \gamma: \Gamma(\Delta(0; r'), \mathcal{O}^{g'}) \longrightarrow \Gamma(\Delta(0; r'), \mathcal{O}^{g'})$$

で $\tilde{f} = \tilde{f}' \circ \gamma$ となるものがある. これは連続写像

$$\Gamma(\Delta(0; r'), \mathcal{O}^{g'}) / \Gamma(\Delta(0; r'), \mathcal{O}^g) \xrightarrow{\psi} \Gamma(\Delta(0; r'), \mathcal{O}^{g'}) / \Gamma(\Delta(0; r'), \mathcal{O}^{g'})$$

をひきおこし, これは全単射である. 故に開写像の定理から

ψ は同型写像となる. また, $\phi: \tilde{\mathcal{F}} \longrightarrow \tilde{\mathcal{F}}'$ と層の準同型写像とし,

$\Delta(0; r)$ を $\mathcal{O}$ で, $\tilde{\mathcal{F}}', \tilde{\mathcal{F}}$ が共に有限な表現があるような

多重円板とする: $\mathbb{R}P \subset \mathcal{O}_{\Delta(0; r)}$ - $\mathcal{O}$ -群の層の完全列

$$\mathcal{O}_{\Delta(0; r)}^g \xrightarrow{f} \tilde{\mathcal{F}} \longrightarrow 0, \quad \mathcal{O}_{\Delta(0; r')}^g \xrightarrow{f'} \tilde{\mathcal{F}}' \longrightarrow 0.$$

すなわち, (3) におけるように $\Gamma(\Delta(0; r'), \mathcal{O})$ -線型写像 ψ で次の

図が可換となるものがある:

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(\Delta(0; r'), \mathcal{O}^g) & \xrightarrow{\gamma} & \Gamma(\Delta(0; r'), \mathcal{O}^{g'}) \\ \tilde{f} \downarrow & & \downarrow \tilde{f}' \\ \Gamma(\Delta(0; r'), \tilde{\mathcal{F}}) & \xrightarrow{\Gamma(\Delta(0; r'), \phi)} & \Gamma(\Delta(0; r'), \tilde{\mathcal{F}}') \end{array}$$

故に開写像の定理から $\Gamma(\Delta(0; r'), \phi)$ の連続性が出る. 定理証明終

さて, $(X, \mathcal{A}) \in$ 解析空間, $\mathcal{F}$ を X 上の連接層とすると X の局所有限な開部分空間 X_ν による被覆で, 各 ν に対して, $X_\nu \in \mathcal{A}$ なる $\mathbb{C}^n$ の開多重円板 U_ν における開部分空間へ写す解析的同型写

像が存在し, しかも各 ν に対して, U 上の連接層系が有限な表現をもつように X_ν をとることが出来る. このとき各 $P(X_\nu, \mathcal{F})$ 上にはすでに Frechet 空間の位相が入った. 次に自然な写射

$$\varphi: \Gamma(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \prod_{\nu} P(X_\nu, \mathcal{F}|_{X_\nu})$$

を与える. Frechet 空間への可算積として $\prod_{\nu} P(X_\nu, \mathcal{F}|_{X_\nu})$ は Frechet 空間となる. $(g_\nu) \in \prod_{\nu} P(X_\nu, \mathcal{F}|_{X_\nu})$ に対して, $(g_\nu) \in \overline{\text{Im } \varphi}$ であるとは, 任意の $k \geq 0$ と任意の $x \in X_\lambda \cap X_\mu$ に対して, $\text{Im } \varphi$ の元 (f_ν) があって, $f_{\lambda x} - g_{\lambda x} \in m_x^k \mathcal{F}_x$, $f_{\mu x} - g_{\mu x} \in m_x^k \mathcal{F}_x$ をいみする. ここで m_x は $\mathcal{F}_x$ の極大イデアル. しかるに $f_\lambda = f_\mu$ だから $g_{\lambda x} - g_{\mu x} \in m_x^k \mathcal{F}_x$ である. これが任意の k に対して成り立つから Krull の定理より $g_{\lambda x} = g_{\mu x}$. このことは $(g_\nu) \in \text{Im } \varphi$ をいみする. 即ち上の自然な写像 φ で $\Gamma(X, \mathcal{F})$ の像は $\prod_{\nu} P(X_\nu, \mathcal{F}|_{X_\nu})$ の閉部分空間である. 故に $\Gamma(X, \mathcal{F})$ は Frechet 空間となる. X' を X の任意の開部分空間とすると, 制限写像 $r_{X', X}: \Gamma(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(X', \mathcal{F})$ は明らかに連続となる. 故に次の系がえらゆ.

系. 任意の開部分集合 $W \subset X$ に対して, $\Gamma(W, \mathcal{F})$ は Frechet 空間となる. 任意の開集合 U, W' , $U \subset W$ に対して制限写像 $r_{U, W}: \Gamma(W, \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{F})$ は連続である.

§3. 閉イデアルと昇降の定理

$(X, \mathcal{F})$ を解析空間とし, $\mathcal{F}$ を X 上の連接層とする. 以下

$\Gamma(X, \mathcal{A})$ は Frechet 空間とする. $A = P(X, \mathcal{A})$ とおく. 部分集合 $M(A)$ に対して M によって生成されたイデアルの層を $\mathcal{A}_M$ で表わす. この層 $\mathcal{A}_M$ の茎を $\mathcal{A}_x M$ で表わす. 次の定理 2.3 及びその系は, X が $\mathbb{C}^n$ の正則領域の場合 Cartan [2] により与えられた.

定理 2. $\mathcal{A} \in A$ のイデアルとすると, $\mathcal{A}$ は連接層である. $(X, \mathcal{A})$ が Stein 空間なら, $P(X, \mathcal{A})$ は A における $\mathcal{A}$ の閉包 $\bar{\mathcal{A}}$ に等しい.

証明. $\mathcal{A}$ の連接性は $\mathcal{A}$ が局所有限生成的であることと示せば十分である. $\mathcal{A}$ の生成元の数が有限なら問題は無い. そこで今, $\mathcal{A}$ が一点 $x \in X$ で局所有限でなかったとする. $\mathcal{A}$ の相対コンパクト近傍とすると, $\mathcal{A}$ の元の列 $f_1, f_2, \dots$ によって生成された層を $\mathcal{A}_{f_i}$ とすると, 各 i に対して, $\mathcal{A}_{f_i} \subsetneq \mathcal{A}_{f_{i+1}}$ となるものがある. しかるに $\mathcal{A}$ の連接部分層の族 $\{\mathcal{A}_{f_i}\}$ はつねに局所的に停留的であり得ない [2] からこれは矛盾である. 故に $\mathcal{A}$ は連接層となる. 次に $P(X, \mathcal{A})$ が A の閉集合であることを示す. それには定理 1 のもとと同様に, 自然な単射 $\varphi: \Gamma(X, \mathcal{A}) \longrightarrow \prod P(X_0, \mathcal{A}|_{X_0})$ において $(g_i) \in \overline{\varphi \Gamma(X, \mathcal{A})}$ なら, 任意の $k \geq 0$ と任意の点 $x \in X_\lambda \cap X_\mu$ に対して, $(f_i) \in \varphi \Gamma(X, \mathcal{A})$ で, $f_{\lambda x} - g_{\lambda x} \in m_x^k \mathcal{A}$, $f_{\mu x} - g_{\mu x} \in m_x^k \mathcal{A}$ なるものが存在することに注意すればよい. 次に $\Gamma(X, \mathcal{A}) \subset \bar{\mathcal{A}}$ を示せばよいのだが, それには, 次の 2 つの補題 (証明は省略)

に注意すれば、あとは Cartan の証明が平行にゆく。その1つは $\mathbb{C}^n$ における加群の局所閉性定理が $(X, \mathcal{O})$ に対して次の形で与えられることである。

補題3. $\mathcal{M}$ を解析空間 $(X, \mathcal{O})$ の1点 $a \in X$ における茎 $\mathcal{O}_a^{\mathcal{O}}$ の部分加群とする。 a のある近傍 V に対して、 $g \in \Gamma(X, \mathcal{O}^g)$ かつ g は $\Gamma(V, \mathcal{O}^g)$ の元で、点 a での芽が $\mathcal{M}$ に属するもののみ、 $\Gamma(V, \mathcal{O}^g)$ における Fréchet 位相での極限になっているとすると $g_a \in \mathcal{M}$ 。

同様に多面体上の近似定理は次の形で与えられる。

補題4 (Weil-Oka の近似定理). $(X, \mathcal{O})$ を Stein 空間、 $P \in X$ の Weil-Oka の多面体領域とすると、 $\bar{P}$ での正則な関数は X で正則な関数によって $\Gamma(P, \mathcal{O})$ の Fréchet 位相で近似される。

系1. $(X, \mathcal{O})$ を Stein 空間、 $\alpha \in \Gamma(X, \mathcal{O})$ の閉イデアルとすると $\mathcal{O}$ の連接イデアルの層 $\mathcal{M}$ で、 $\alpha = \Gamma(X, \mathcal{M})$ なるものがある。

実際 $\mathcal{M} = \mathcal{O}\alpha$ とおけばよい。

系2. $(X, \mathcal{O})$ を Stein 空間、 $\mathcal{M}$ を $\mathcal{O}$ の連接イデアルの層とすると $\mathcal{O}P(X, \mathcal{M}) = \mathcal{M}$ が成り立つ。従って $\Gamma(X, \mathcal{M})$ は $\Gamma(X, \mathcal{O})$ で閉じている、従って $\Gamma(X, \mathcal{M})$ は Fréchet 空間である。

証明. 前半は $(X, \mathcal{O})$ が Stein であるから明らか。故に定理2より

$$\overline{\Gamma(X, \mathcal{M})} = \Gamma(X, \mathcal{O}P(X, \mathcal{M})) = \Gamma(X, \mathcal{M}).$$

系3. $(X, \mathcal{O})$ を Stein 空間、 $\alpha \in A$ を閉イデアルとすると、 α は少なくとも一つの共通零点をもつ。

証明. α にもし共通零点がなかったとすると $\mathcal{R}\alpha = \mathcal{R}$ となるが, α は閉イデアルだから $\alpha = P(X, \mathcal{R}\alpha) = P(X, \mathcal{R})$ となり矛盾.

系 4. $(X, \mathcal{R}) \in \text{Stein}$ 空間とすると, A の任意の閉極大イデアル $\mathcal{M}$ は唯一つの共通零点をもつ. それを a とおくと $\mathcal{M} = \{f \in A \mid f(a) = 0\}$ と表わせる.

証明. 今 $\mathcal{M}$ が 2 つの共通零点 a, b をもったとする. A は X の点を分離するから, A の元で $f(a) \neq f(b)$ なるものがある.

$g(x) = f(x) - f(a)$ とおくとイデアル $\mathcal{M}$ は固有イデアル $\{ \mathcal{M}, g \}$ を含まれることになり, $\mathcal{M}$ の極大性に反す. 後半は明らか.

定理 3. $(X, \mathcal{R}) \in \text{Stein}$ 空間とすると $P(X, \mathcal{R})$ の任意の有限生成イデアルは $P(X, \mathcal{R})$ で閉じている.

証明は補題 3 を使って, [2] に平行して, 一様収束という所を Frechet 位相での収束におまかえることにより同様に証明される.

定理 4. $(X, \mathcal{R}) \in \text{Stein}$ 空間とする. $P(X, \mathcal{R})$ の極大イデアル $\mathcal{M}$ は有限生成のときに限り閉イデアルである.

証明. 定理 3 より十分性は明らか. 今 $\mathcal{M}$ が閉であるとする. 定理 2 系 4 より唯一つの点 $a \in X$ で, $\mathcal{M} = \{f \in P(X, \mathcal{R}) \mid f(a) = 0\}$ となるものがある. 定理 2 より層 $\mathcal{R}_{\mathcal{M}}$ は連接だから有限個の元 $f_1, \dots, f_r \in P(X, \mathcal{R})$ で, $\mathcal{R}_a$ と $\mathcal{R}_{\mathcal{M}}$ を生成するものがある. 集合 $X' = \{x \in X \mid f_1(x) = \dots = f_r(x) = 0\}$ は $X' = X_0 \cup \{a\}$ とかける. $\square$

に X_0 は a を含まない (空かも知れない) 解析集合である. 他方 $g|_{X_0} = 0$, $g(a) = 1$ なる関数 $g \in \mathcal{F}(X, \mathcal{A})$ が存在する. したがって $f_0 = g - 1$ は $\mathcal{M}$ に属し, $(f_0, f_1, \dots, f_k)$ は唯一つの共通零点をもつ. 故に定理 B より関数 $f_0, f_1, \dots, f_k$ は $\mathcal{F}(X, \mathcal{A})$ の $\mathcal{M}$ を生成する.

定理 5 (井草 [9]). $(X, \mathcal{A})$ を Stein 空間, $\mathcal{M} \in \mathcal{F}(X, \mathcal{A})$ の極大イデアル $\mathcal{P}$ にとすると次の条件は同値である.

(1) $\mathcal{F}(X, \mathcal{A})/\mathcal{M} \simeq \mathbb{C}$ (位相環として同型)

(2) $\mathcal{M}$ は $\mathcal{F}(X, \mathcal{A})$ の閉極大イデアル.

(3) $\mathcal{M} = \{f \in \mathcal{F}(X, \mathcal{A}) \mid f(a) = 0\}$ なる点 a が存在する.

証明. (1) $\rightarrow$ (2). $\mathcal{M} \subsetneq I \subseteq \mathcal{F}(X, \mathcal{A})$ なるイデアル I があるとする. 関数 $f \in I$ と定数 $c \in \mathbb{C}$ で $f \notin \mathcal{M}$, $f - c \in \mathcal{M} \subset I$ なるものがある. こゝでは $0 \neq c \in I$ をいみし $\mathcal{F}(X, \mathcal{A}) = I$ となる. 故に $\mathcal{M}$ は極大イデアルである. 他方位相環 $\mathbb{C}$ は Hausdorff であるから空間 $\mathcal{M}$ は $\mathcal{F}(X, \mathcal{A})$ で閉じているからなることがいえる.

(2) $\rightarrow$ (3) は定理 2 系 3. (3) $\rightarrow$ (1) は明らか.

§ 4. スペクトル論

定義 4. Stein algebra A のスペクトル $S(A)$ とは, 位相環 A から, 位相環 $\mathbb{C}$ の上への次のような位相をもつ複素線型同型写像の集合をいう: 元 $\phi \in S(A)$ の近傍基を次のように定める.

$$\forall (\phi, \varepsilon, \varepsilon) = \{\gamma \in S(A) \mid |\phi(f) - \gamma(f)| < \varepsilon, f \in A, \varepsilon > 0\}.$$

定理5' (井草). $(X, \mathcal{A}) \in \text{Stem}$ 空間とし, $A = P(X, \mathcal{A})$ とおく. このとき標準字像 $\alpha: X \longrightarrow S(A)$, $\alpha(u) = \phi_u$, $\phi_u(f) = f(u)$, $f \in A$ が出来るがこの α は位相字像である[5].

証明. まず $\mathcal{A}$ の被約構造層 $\mathcal{Q}$ を考える. $(X, \mathcal{A})$ を任意の解析空間とし, $\mathcal{U}_x$ を $\mathcal{A}_x$ の中要素全体よりなる τ - $\mathcal{P}$ とする.

$\mathcal{U} = \bigcup_x \mathcal{U}_x$ は連接層となる. 何故なら局所 τ - $\mathcal{P}$ に $(V, \mathcal{A}')$ において, $\mathcal{U} = \mathcal{J}'/\mathcal{J}$ となるからである. ここに $\mathcal{J}'$ は V 上の $\mathcal{A}'$ なる関数系の層, $\mathcal{J}$ は $(V, \mathcal{A}')$ を定める τ - $\mathcal{P}$ の層である.

$(X, \mathcal{A})$ の被約解析空間 $(X, \mathcal{Q})$ と, $\mathcal{Q} = \mathcal{A}/\mathcal{U}$ で定める. $A_r = P(X, \mathcal{Q})$ とおくと, 自然な全射準同型 $\phi: A \longrightarrow A_r$ が出来る. $\mathcal{K} = \mathcal{K}_\phi$ とおくと $\mathcal{K} = \{f \in P(X, \mathcal{A}), f(u) = 0, \forall u \in X\}$ とかける.

補題5. $\mathcal{K}$ は A の Jacobson 根基に含まれる.

証明. そうでなかったと仮定し, 極大 τ - $\mathcal{P}$ に m をとって, $m + \mathcal{K} = A$ とする. 従って, $g \in m$, $f \in \mathcal{K}$ で $g + f = 1$ なるものがある. f_x は各点 $x \in X$ で中要素だから, 近傍 $U(x)$ と自然数 $N(U)$ ですべての $n \geq N(U)$ に対して $f^n|_U = 0$ となるものがある. 故に列 $\{f^n\}$ は A で 0 に収束する. 故に $g = 1 - f$ は逆元 $\sum_{n=0}^{\infty} f^n$ を持つことになり $1 \in m$ となりこれは矛盾である.

さて準同型 $\phi: A \longrightarrow \mathbb{C}$, $\phi \in S(A)$ が与えられたとすると, $\mathcal{K}_\phi$ は A の極大 τ - $\mathcal{P}$ だから補題5より ϕ は $A \xrightarrow{f} A_r \xrightarrow{\phi_r} \mathbb{C}$ と分解出来る. ここには ϕ は全射だから関数系の定理により,

ϕ は連続である. 故に $S(A) = S(A_r)$ となる. 故に証明は S -環の空間 $(X, \mathcal{O})$ の場合に帰着した. 以下 [10] と同じである. 終結.

注. Stein algebra A に対して, A の閉極大イデアルの集合を $M(A)$ とおくと, $M(A) = \{ \text{Ker } \phi \mid \phi \in S(A) \}$ となる. $(X, \mathcal{O})$ が Stein 空間で $A = P(X, \mathcal{O})$ なら $S(A)$ と $M(A)$ との間には 1 対 1 の対応がある. 逆に任意に与えられた Stein algebra のスペクトル $S(A)$ から $S(A)$ 上の環の層 $\tilde{A}$ を定めて, $(S(A), \tilde{A})$ に解析空間の構造を入れることが出来る. Forster [6] は次のことを証明した.

定理 6. A を Stein algebra とし, Stein 空間 $(X, \mathcal{O})$ の切断 $P(X, \mathcal{O})$ に同型とすると, $(X, \mathcal{O})$ と $(S(A), \tilde{A})$ は双正則同型である.

§5. Stein 加群

$(X, \mathcal{O})$ を解析空間, $\mathcal{M}$ を $\mathcal{O}$ -加群の層とすると, $P(X, \mathcal{M})$ は位相 $P(X, \mathcal{O})$ -加群となる.

定義 5. Stein algebra A 上の位相加群 M は, Stein 空間 $(X, \mathcal{O})$ と連続 $\mathcal{O}$ -加群の層 $\mathcal{M}$ と位相環及び位相加群としての同型写像 $\varphi: A \longrightarrow P(X, \mathcal{O})$, $\gamma: M \longrightarrow P(X, \mathcal{M})$ があって, すべての $f \in A$, $m \in M$ に対して $\psi(fm) = \varphi(f) \gamma(m)$ なることを, M を Stein 加群という.

定理 2 及びその系の証明と同じ方法で次のことが示される.

定理 7. $(X, \mathcal{A}) \in$ 解析空間, $\mathcal{M} \in$ 連接層とする. $M \in \mathcal{P}(X, \mathcal{M})$ の部分集合とすると $\mathcal{M}$ の部分層 $\mathcal{A}M$ は連接層である. $(X, \mathcal{A})$ が Stein 空間で, M が $\mathcal{P}(X, \mathcal{M})$ の部分群なら $\mathcal{P}(X, \mathcal{A}M)$ は M の閉包 $\bar{M}$ に等しい.

系 1. $(X, \mathcal{A}) \in$ Stein 空間, $\mathcal{M} \in$ 連接層とする. $\mathcal{M}$ の任意の連接部分層 $\mathcal{N}$ に対して, $\mathcal{P}(X, \mathcal{N})$ は $\mathcal{P}(X, \mathcal{M})$ で閉じている.

系 2. Stein 加群 M の部分加群 N は, N が Stein 加群であると $\bar{N}$ に限り閉じている.

さて, $(X, \mathcal{A}) \in$ 解析空間, $\mathcal{M}, \mathcal{N} \in X$ 上の連接層とすると任意の開集合 $U \subset X$ に対して, $\mathcal{P}(U, \mathcal{M}), \mathcal{P}(U, \mathcal{N})$ は Frechet 空間であった. 任意の層の準同型写像 $\phi: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ に対して, ϕ を誘起した写像: $\mathcal{P}(U, \phi): \mathcal{P}(U, \mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{P}(U, \mathcal{N})$ は連続である. Forster [7] は次のことを証明した.

定理 8. $(X, \mathcal{A}) \in$ Stein 空間, $\mathcal{M}, \mathcal{N} \in X$ 上の連接層とする. $A = \mathcal{P}(X, \mathcal{A}), M = \mathcal{P}(X, \mathcal{M}), N = \mathcal{P}(X, \mathcal{N})$ とおく. 任意の A -線型写像 $\phi: M \rightarrow N$ に対して, $\phi = \mathcal{P}(X, \psi)$ なる $\mathcal{A}$ 準同型写像 $\psi: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ が唯一存在する.

系 1. 上の定理と同じ仮定の下で, 任意の A -線型写像 ϕ は連続であり, $\text{Im } \phi$ は N で閉じている.

証明. 上の定理より $\mathcal{A}$ 準同型写像 $\psi: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ で $\phi = \mathcal{P}(X, \psi)$ なるものがあるから, ϕ は連続である. 他方定理 B から,

$\phi(M) = T(X, \tau(\mathcal{M})) \subset T(X, \mathcal{N}) = N$ で、 $\tau(\mathcal{M})$ は $\mathcal{N}$ の連接部分層だから、定理 7 系 1 により、 $\phi(M)$ は N で閉じている。

系 2. (拡張された計算の定理). Stein algebra A 上の任意の Stein 加群 M, N に対して、任意の代数的同型写像 $\phi: M \rightarrow N$ は位相同型写像である。

さて、 A は任意の環とし、 M は A -加群とするとイテール化の原理により、 M は環 $A' = A \oplus M$ のイテールとなる。次の定理 [7] は Stein 空間 $(X, \mathcal{M})$ の構造層が 1 つの X において、十分沢山あることを示している。

定理 9. $(X, \mathcal{M})$ を解析空間、 $\mathcal{M}$ を $\mathcal{M}$ -加群の連接層とする。層 $\mathcal{M}' = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}$ を $\mathcal{M}'_x = \mathcal{M}_x \oplus \mathcal{M}_x$ で定めると付環空間 $(X, \mathcal{M}')$ は解析空間となる。 $(X, \mathcal{M})$ が Stein 空間なら、 $(X, \mathcal{M}')$ も Stein 空間である。

この定理を使えば加群に内する定理はイテール化に内する定理に還元される。故に定理 3 から次の定理がえられた。

定理 3'. $(X, \mathcal{M})$ を Stein 空間、 $\mathcal{M}$ を X 上の連接層とする。 $\mathcal{F}(X, \mathcal{M})$ の任意の有限生成 $\mathcal{F}(X, \mathcal{M})$ -部分加群は $\mathcal{F}(X, \mathcal{M})$ で閉じている。

References

- [1] N.Bourbaki, Topologie générale, Chap.3,Herman,1960.
- [2] H.Cartan, Idéaux et modules de fonctions analytiques de variables
complexes, Bull.Soc.math.France,78(1950),29-64.
- [3] _____, Séminaire,E.N.S,1951/52.
- [4] _____, Séminaire,E.N.S, 1953/54.
- [5] O.Forster, Primärzerlegung in Steinschen Algebren, Math.Ann. 154(1964),
307-329.
- [6] _____, Uniqueness of topology in Stein algebras, Function Algebras,
Proc.Intern.Symposium,Tulane, 1965.
- [7] _____, Zur Theorie der Steinschen Algebren und Modulen,Math.Z.
97(1967),375-405.
- [8] H.Grauert, Ein Theorem der analytischen Garbentheorie und die Modulräume
komplexer Strukturen, I.H.E.S. No.5,Paris,1960.
- [9] J.Igusa, On a property of the domain of regularity,Mem.Coll.Sc.Univ.
Kyoto,27(1952), 95-97.
- [10] R.Iwahashi, A characterization of holomorphically complete spaces,
Proc.Japan Acad,36(1960),205-206.
- [11] J_P.Serre, Géométrie algébrique et géométrie analytique,Ann.Inst.Fourier,
6(1960), 1-42.
- [12] _____, Prolongement de faisceaux analytiques cohérents, Ann.Inst.
Fourier, 16(1966), 363-374.