

σ -集合体の行列表現と確率制御問題への応用

田中 輝雄 (Teruo Tanaka)
広島市立大学情報科学部情報数理学科

Abstract

確率空間の σ -集合体(ここでは、集合体のみを扱う)の行列表現を用いて、離散時間の確率制御問題、特に、最適停止問題、一般の制御問題、Dynkin game を線形計画、2次計画、行列ゲームの問題に帰着できることを述べる。

1 集合体の行列表現 ([2], [4])

T を自然数、 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間、 $\{\mathcal{F}_t, t = 1, 2, \dots, T\}$ を部分集合体の増大列とし、以下の2条件を満たすとする：

- $\mathcal{F} = \mathcal{F}_T = \sigma(F_1, F_2, \dots, F_m)$, $P(F_i) > 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$), $F_i \cap F_j = \emptyset$ ($i \neq j$), $\cup_i F_i = \Omega$
- $\mathcal{F}_t = \sigma(F_1^t, F_2^t, \dots, F_{n_t}^t)$, $P(F_i^t) > 0$ ($i = 1, 2, \dots, n_t$), $F_i^t \cap F_j^t = \emptyset$ ($i \neq j$), $\cup_i F_i^t = \Omega$

そして、行列 M_t ($t = 1, 2, \dots, T$), M を次で定める：

- $M_t := (m_{ij}^t)_{m \times n_t}$ ($t = 1, 2, \dots, T$)

$$m_{ij}^t := \begin{cases} 1 & \text{if } F_i \subset F_j^t \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

- $M := [M_1 M_2 \dots M_T]$: $m \times n$ 行列 但し、 $n := \sum_{t=1}^T n_t$ とする。

注意 1.1 集合体 $\mathcal{F}_t, \mathcal{F}$ と、行列 M_t, M は1対1に対応する。

例 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 、増大列 $\{\mathcal{F}_t, t = 1, 2, 3, 4\}$ として次のものを考える：

- $\Omega = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) : \{1, 2, 3, 4\} \text{ の permutation}\}$
- $P((a_1, a_2, a_3, a_4)) = \frac{1}{4!}$
- $\mathcal{F}_1 = \sigma(\Omega)$
- $\mathcal{F}_2 = \sigma(\{a_1 > a_2\}, \{a_2 > a_1\})$
- $\mathcal{F}_3 = \sigma(\{a_1 > a_2 > a_3\}, \{a_1 > a_3 > a_2\}, \{a_3 > a_1 > a_2\}, \{a_2 > a_1 > a_3\}, \{a_2 > a_3 > a_1\}, \{a_3 > a_2 > a_1\})$

- $\mathcal{F} = \mathcal{F}_4 = \sigma(\{a_1 > a_2 > a_3 > a_4\}, \{a_1 > a_2 > a_4 > a_3\}, \{a_1 > a_4 > a_2 > a_3\},$
 $\{a_4 > a_1 > a_2 > a_3\}, \{a_1 > a_3 > a_2 > a_4\}, \{a_1 > a_3 > a_4 > a_2\},$
 $\{a_1 > a_4 > a_3 > a_2\}, \{a_4 > a_1 > a_3 > a_2\}, \{a_3 > a_1 > a_2 > a_4\},$
 $\{a_3 > a_1 > a_4 > a_2\}, \{a_4 > a_3 > a_1 > a_2\}, \{a_2 > a_1 > a_3 > a_4\},$
 $\{a_2 > a_1 > a_4 > a_3\}, \{a_2 > a_4 > a_1 > a_3\}, \{a_2 > a_4 > a_1 > a_3\},$
 $\{a_4 > a_2 > a_1 > a_3\}, \{a_2 > a_3 > a_1 > a_4\}, \{a_2 > a_3 > a_4 > a_1\},$
 $\{a_2 > a_4 > a_3 > a_1\}, \{a_4 > a_2 > a_3 > a_1\}, \{a_3 > a_2 > a_1 > a_4\},$
 $\{a_3 > a_2 > a_4 > a_1\}, \{a_3 > a_4 > a_2 > a_1\}, \{a_4 > a_3 > a_2 > a_1\})$

各 $\mathcal{F}_i$ を生成する集合を、左から順番に F_i^t とする。

このとき、行列 M (24×33) は次のようになる：

	$\mathcal{F}_1$	$\mathcal{F}_2$	$\mathcal{F}_3$						$\mathcal{F}_4$									
	1	1 2	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5		22	23	24	
1	1	0 1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0		0	0	0	
2	1	0 1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0		0	0	0	
3	1	0 1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0		0	0	0	
4	1	1 0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0		0	0	0	
5	1	0 1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1		0	0	0	
6	1	0 1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0		0	0	0	
7	1	0 1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0		0	0	0	
8	1	1 0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0		0	0	0	
9	1	1 0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0		0	0	0	
10	1	1 0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0		0	0	0	
11	1	0 1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0		0	0	0	
12	1	1 0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		0	0	0	
13	1	1 0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0		0	0	0	
14	1	1 0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0		0	0	0	
15	1	0 1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0		0	0	0	
16	1	1 0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		0	0	0	
17	1	0 1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0		0	0	0	
18	1	0 1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0		0	0	0	
19	1	0 1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0		0	0	0	
20	1	1 0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0		0	0	0	
21	1	1 0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		0	0	0	
22	1	1 0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0		1	0	0	
23	1	0 1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0		0	1	0	
24	1	1 0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		0	0	1	

命題 1.1 ([2], [4]) $\mathcal{F}_t$ -stopping time τ と 集合

$$\mathbf{X}_{\text{int}} := \{x \in \{0, 1\}^n : Mx = \mathbf{1}\}$$

の元は 1 対 1 に対応する。実際、その対応は

$$x_j^t := \begin{cases} 1 & \text{if } F_j^t \subset \{\tau = t\} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

とおき、

$$x = (x_1^1, x_2^1, \dots, x_{n_1}^1, x_1^2, x_2^2, \dots, x_{n_2}^2, \dots, x_1^T, x_2^T, \dots, x_{n_T}^T)$$

で与えられる。1 はすべての成分が 1 であるベクトルとする。

命題 1.2 $E = \{c_1, c_2, \dots, c_r\}$ を有限集合とする。 $\mathcal{F}_t$ -可測関数 $U : \Omega \rightarrow E$ と集合

$$\mathbf{C}_{\text{int}}^t := \left\{ \{y^{c_j}, j = 1, 2, \dots, r\} : y^{c_j} \in \{0, 1\}^{n_t}, \sum_{j=1}^r M_t y^{c_j} = \mathbf{1}, \sum_{j=1}^r y^{c_j} = \mathbf{1} \right\}$$

の元は 1 対 1 に対応する。

2 離散時間確率制御問題への応用

E, S をそれぞれ有限集合、 f を $S \times E$ 上の実数値関数、 g を S 上の実数値関数とし、 τ を $\{\mathcal{F}_t\}$ -stopping time、 S -値確率過程 $\{X_t, t = 1, 2, \dots, T\}$ で状態変数を、 F -値確率過程 $\{U_t, t = 1, 2, \dots, T\}$ で制御変数を表わすとする。

まず、次の確率制御問題 (SCP) を考える：

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && E\left[\sum_{k=1}^{\tau} f(X_k, U_k) + g(X_{\tau})\right] \\ & \text{subject to} && \tau, \{U_k\} \end{aligned}$$

2.1 最適停止問題

(SCP) において $f = 0$ とする。

定理 2.1 ([2]) 上記の問題は、次の整数計画問題と同値である：

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && x' L \\ & \text{subject to} && x \in \mathbf{X}_{\text{int}} \end{aligned}$$

但し、 $l_{\beta}^t := E[g(X_t) : F_{\beta}^t]$, $L := [l_1^1, l_2^1, \dots, l_{n_1}^1, l_1^2, l_2^2, \dots, l_{n_2}^2, \dots, l_1^T, l_2^T, \dots, l_{n_T}^T]$ とし、 $'$ は転置を表わすとする。

定義 2.1 ([1], [4]) $q = \{q_t, t = 1, 2, \dots, T\}$ が次の条件を満たすとき、*randomized stopping time* であるという：

1. $q_t \geq 0$,
2. $q_t : \mathcal{F}_t$ -可測関数,
3. $\sum_{t=1}^T q_t = 1$.

定理 2.2 ([2], [4]) 定理 2.1 における整数計画問題を次の線形計画問題に修正する：

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && x' L \\ & \text{subject to} && Mx = 1, x \geq 0 \end{aligned}$$

このとき、この問題は次の *randomized* 最適停止問題と同値である：

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && \langle X, q \rangle := E\left[\sum_{t=1}^T g(X_t) q_t\right] \\ & \text{subject to} && q \end{aligned}$$

2.2 確率制御問題

定理 2.3 上記の問題 (SCP) は、次の 2 次計画問題と同値である：

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && x'b + \frac{1}{2}x'Ax \\ & \text{subject to} && x = [x, y]', \quad y = [y_1, y_2, \dots, y_T]' \quad \text{とすると} \\ & && x \in X_{\text{int}} \\ & && y_t \in C_{\text{int}}^t \end{aligned}$$

但し、行列 b, A は次で定める：

$$K(kt\alpha\beta c) := E[f(X_k, c) : F_\alpha^t \cap F_\beta^k],$$

行列 $K_{(ktc)}$ は、 (α, β) 成分を $K(kt\alpha\beta c)$ とする行列,

$$K = \begin{pmatrix} K_{(11c_1)} & \dots & K_{(11c_r)} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{(12c_1)} & \dots & K_{(12c_r)} & K_{(22c_1)} & \dots & K_{(22c_r)} & 0 & \dots & \dots & \dots \\ K_{(13c_1)} & \dots & K_{(13c_r)} & K_{(23c_1)} & \dots & K_{(23c_r)} & K_{(33c_1)} & \dots & K_{(33c_r)} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{(1Tc_1)} & \dots & K_{(1Tc_r)} & K_{(2Tc_1)} & \dots & K_{(2Tc_r)} & K_{(3Tc_1)} & \dots & K_{(3Tc_r)} & K_{(4Tc_1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ K_{(T-1,Tc_r)} & K_{(TTc_1)} & \dots & K_{(TTc_r)} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{K} \\ \mathbf{K}' & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} L \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

定義 2.2 $\lambda^t = \{\lambda_j^t, j = 1, 2, \dots, r\}$ ($t = 1, 2, \dots, T$) が次の条件を満たすとき、*randomized $\mathcal{F}_t$ -可測関数*であるという：

1. $\lambda_j^t \geq 0$
2. $\lambda_j^t : \mathcal{F}_t$ -可測関数
3. $\sum_{t=1}^T \lambda_j^t = 1$

さらに、 $\lambda = \{\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^T\}$ を *randomized control* という。

定理 2.4 定理 2.3 における 2 次計画問題を次の問題に修正する：

$$\begin{aligned} & \text{maximize} \quad x'b + \frac{1}{2}x'Ax \\ & \text{subject to} \quad x = [\mathbf{x}, \mathbf{y}]', \quad \mathbf{y} = [\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_T]', \quad \mathbf{y}_t = [\mathbf{y}_t^{c_1}, \mathbf{y}_t^{c_2}, \dots, \mathbf{y}_t^{c_r}]' \quad \text{と} \text{するとき} \\ & \quad M\mathbf{x} = \mathbf{1}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \\ & \quad \sum_{j=1}^r M_{tj} \mathbf{y}_t^{c_j} = \mathbf{1}, \quad \mathbf{y}_t^{c_j} \geq \mathbf{0}, \quad \sum_{j=1}^r \mathbf{y}_t^{c_j} = \mathbf{1} \quad t = 1, 2, \dots, T \end{aligned}$$

このとき、この問題は次の *randomized 確率制御問題* と同値である：

$$\begin{aligned} & \text{maximize} \quad \langle X, \lambda, q \rangle := E \left[\sum_{t=1}^T \sum_{k=1}^t \sum_{j=1}^r f(X_k, c_j) \lambda_j^t q_t + \sum_{t=1}^T g(X_t) q_t \right] \\ & \text{subject to} \quad \lambda, q \end{aligned}$$

2.3 Dynkin game

$\{X(k), k = 1, 2, \dots, T\}, \{h(k), k = 1, 2, \dots, T\}, \{g(k), k = 1, 2, \dots, T\}, \{f(k), k = 1, 2, \dots, T\}$ を実数値確率過程、 τ_1, τ_2 を $\{\mathcal{F}_t\}$ -stopping time として、次の問題を考える：

Find (τ_1^*, τ_2^*) such that

$$J(\tau_1^*, \tau_2) \leq J(\tau_1^*, \tau_2^*) \leq J(\tau_1, \tau_2^*) \quad \forall (\tau_1, \tau_2)$$

$$\text{但し、} \quad J(\tau_1, \tau_2) = E \left[\sum_{k=1}^{\tau_1 \wedge \tau_2} X(k) + h(\tau_1) 1_{\{\tau_1 < \tau_2\}} + g(\tau_2) 1_{\{\tau_2 < \tau_1\}} + f(\tau_1) 1_{\{\tau_1 = \tau_2\}} \right]$$

定理 2.5 上記の問題は次と同値である：

Find (x^*, y^*) such that

$$F(x^*, y) \leq F(x^*, y^*) \leq F(x, y^*) \quad \forall (x, y) \in \mathbf{X}_{\text{int}} \times \mathbf{X}_{\text{int}}$$

但し、関数 F は次で定める：

行列 $A(s, t)$ は、 (i, j) 成分を $\sum_{k=1}^{s \wedge t} E[X(k) : F_i^s \cap F_j^t]$ とする行列、

行列 A は、 (s, t) 成分を $A(s, t)$ とする行列、

行列 $B(s, t)$ は、

- $s = t$ のとき、 (i, j) 成分を $E[f(t) : F_i^t \cap F_j^t]$ とする行列
- $s > t$ のとき、 (i, j) 成分を $E[g(t) : F_i^s \cap F_j^t]$ とする行列
- $s < t$ のとき、 (i, j) 成分を $E[h(s) : F_i^s \cap F_j^t]$ とする行列

行列 B は、 (s, t) 成分を $B(s, t)$ とする行列、
として、

$$F(x, y) = x'(A + B)y$$

とおく。

参考文献

- [1] J.R.Baxter and R.V.Chacon, Compactness of Stopping Times, Z.Wahrsch.Verw.Gebiete 40 (1977), 169–181
- [2] R.Cairolì and R.C.Dalang, Sequential Stochastic Optimization, Forthcoming (1993)
- [3] Y.S.Chow, H.Robbins and D.Siegmund, Great Expectations : The Theory of Optimal Stopping, Houghton–Mifflin, Boston, (1971)
- [4] R.C.Dalang, L.E.Trotter, JR and D.DE.Werra, On Randomized Stopping Points and Perfect Graphs, J.Combin.Theory Ser.B 45 (1988), 320–344
- [5] J.Neveu, Discrete–Parameter Martingale, North–Holland, (1975)