

誤差を含む係数を持つ多項式の因数分解

日大生産工 平野菅保 (Sugayasu Hirano)

$$f_{na}(x) = \sum_{i=0}^{na} a_i x^{na-i} \quad a_i = a_{iT} + \Delta a_i, \quad a_0 = 1.0 \quad (1)$$

係数 a_i を有限桁で与えられる na 次多項式

$$f_{nb}(x) = \sum_{i=0}^{nb} b_i x^{nb-i} \quad b_i = b_{iT} + \Delta b_i, \quad b_0 = 1.0 \quad (2)$$

$f_{na}(x)/f_{nb}(x)$ で割り切れるように係数 b_i を収束計算で求めて得られる nb 次多項式

$$f_{nc}(x) = \sum_{i=0}^{nc} c_i x^{nc-i} \quad c_i = c_{iT} + \Delta c_i, \quad c_0 = 1.0 \quad (3)$$

$f_{na}(x)/f_{nb}(x)$ で商として得られる nc 次多項式

(a_{iT}, b_{iT}, c_{iT} は $f_{naT}(x) = f_{nbT}(x) \cdot f_{ncT}(x)$ を満足する多項式 $f_{naT}(x), f_{nbT}(x), f_{ncT}(x)$ それぞれの誤差を含みぬ係数であり、 $\Delta a_i, \Delta b_i, \Delta c_i$ は係数 a_i, b_i, c_i がそれぞれ含む誤差である。 $na = nb + nc$)

k 回目の反復計算による $f_{nb}(x)$, $f_{nc}(x)$ の近似式を

$$f_{nb}^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^{nb} b_i^{(k)} x^{nb-i} \quad (2')$$

$$f_{nc}^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^{nc} c_i^{(k)} x^{nc-i} \quad (3')$$

それぞれ $f_{nb}^{(k)}(x)$ (2'), $f_{nc}^{(k)}(x)$ (3') とする。

「 $f_{nb}^{(k)}(x) = 0$ と $f_{nc}^{(k)}(x) = 0$ それぞれから得られる nb 個, nc 個の誤差を含む解 x_j がすべて $*f_{na}(x) = 0$ を満足する解であるとき, $f_{na}(x)$ を $f_{nb}^{(k)}(x)$ と $f_{nc}^{(k)}(x)$ とに因数分解できたとする。」

*誤差を含む解 x_j が $f_{na}(x) = 0$ を満足するとは

$$|f_{na}(x_j)| \leq \max_{i=0,1,\dots,na} \left(|\Delta a_i x_j^{na-i}| \right) \quad (4)$$

を満足することである。

$f_{na}(x)$ の有限桁で与えられる係数 a_i の最下位の桁の次の桁から下位の多数の桁にそれぞれ任意の数字 (0~9) を加え, 多数桁による収束計算を行い, $f_{nb}(x)$ の係数 b_i の上位の桁から順次下位の桁の数字を求めながら, 次式 (5) により $f_{nc}^{(k)}(x)$ の係数 $c_i^{(k)}$ を求める。

$$c_j^{(k)} = a_j - \sum_{i=i'}^{j-1} c_i^{(k)} b_{j-i}^{(k)} \quad \begin{aligned} i' &= \max(0, j-nb) \\ j &= 1, 2, \dots, nc \end{aligned} \quad (5)$$

$$\left[\begin{array}{l} \delta_j^{(k)} = a_j - \sum_{i=i'}^{nc} c_i^{(k)} b_{j-i}^{(k)} \\ 0 = a_{jT} - \sum_{i=i'}^{nc} c_{iT} b_{j-iT} \end{array} \right] \quad j = nc+1, nc+2, \dots, na$$

適当な計算桁数を取り、 $c_j^{(k)}$ (5) の計算によって $c_{nc}^{(k)}$ に入る丸め誤差を判別式 (6) の判別ができるようにする。

$$|\Delta a_{na}| \geq |a_{na} - c_{nc}^{(k)} b_{nb}^{(k)}| = |\delta_{na}^{(k)}| \quad (6)$$

- ① $f_{nb}^{(k)}(x) = 0$ から得られる nb 個の解がすべて条件式 (4) $[f_{na}(x) = 0]$ を満足する場合

nb 個の解の中のいずれかの解の絶対値が、 $f_{nc}(x) = 0$ が含む解の中のいずれかの解の絶対値よりも大きいときは、 $f_{nb}^{(k)}(x)$ の係数 $b_i^{(k)}$ の計算桁数を増加させて、条件式 (6) を満足するように反復計算を行うと、 $f_{nc}^{(k+k)}(x) = 0$ に含まれる解はすべて条件式 (4) $[f_{na}(x) = 0]$ を満足する。ただし、次の条件を満足させる。

$nc+1 < nb$ の場合

$$|\delta_j^{(k'+k)}| > |\delta_j^{(k'+k+1)}| > |\delta_j^{(k'+k+2)}| > \dots$$

$$j = na, nc+1, nc+2, \dots, 2nc$$

$nc+1 \geq nb$ の場合

$$|\delta_j^{(k'+k)}| > |\delta_j^{(k'+k+1)}| > |\delta_j^{(k'+k+2)}| > \dots$$

$$j = nc+1, nc+2, \dots, na-1, na$$

nb 個のいずれの解の絶対値も、 $f_{nc}(x)=0$ が含む
 いずれの解の絶対値よりも小さいときは、 $f_{nb}^{(k)}(x)$ の
 係数 $b_i^{(k)}$ を用いて $C_j^{(k)}$ を求めれば $f_{nc}^{(k)}(x)=0$ に含まれ
 る解はすべて条件式 (4) [$f_{na}(x)=0$] を満足する。

- ② 条件式 (4) [$f_{na}(x)=0$] を満足する nb 個と nc 個
 の解をそれぞれ含む $f_{nb}(x)=0$, $f_{nc}(x)=0$ の係数
 b_i , C_i をそれぞれ求める場合

$f_{nb}^{(k)}(x)$ の係数 $b_i^{(k)}$ の計算桁数を順次増加させて、条
 件式 (6) を満足するように反復計算を行うと、 $f_{nb}^{(k)}(x)$
 $=0$ と $f_{nc}^{(k)}(x)=0$ に含まれる解は、すべて条件式 (4)
 [$f_{na}(x)=0$] を満足する。ただし、次の条件を満足さ
 せる。 $nc+1 \geq nb$

$$|\delta_j^{(k)}| > |\delta_j^{(k+1)}| > |\delta_j^{(k+2)}| > \dots$$

$$j = nc+1, nc+2, \dots, na-1, na$$

例題の説明

() 内の数値は $f_{nc}(x) = \sum_{i=0}^{nc} C_i x^{nc-i}$ の係数 C_i の値

[] 内の数値は $f_{ncT}(x) = \sum_{i=0}^{nc} C_{iT} x^{nc-i}$ の係数 C_{iT} の値

「 x_i : 計算解」は $f_{na}(x) = \sum_{i=0}^{na} a_i x^{na-i} = 0$ の解の値

例題 I, II, III では a_i は 4 桁、例題 IV では a_i は 8 桁与えら
 れ、与えられる桁の次の桁から下位の桁には任意の数値を加
 えた。 $C_0=1.0$ であるから $C_0 b_i = b_i$ である。

例題 I

$$\sum_{i=0}^4 a_i x^{4-i} = 0 \quad \left[\sum_{i=0}^4 a_{iT} x^{4-i} = 0 \quad a_{iT} : \text{真の係数} \right]$$

$$a_0 = 1.0000, 0000, 0000, 0000, 000E + 00$$

$$[a_{0T} = 1.0000, 000 \dots E + 00]$$

$$a_1 = -3.1692, 5252, 8282, 5252, 828E + 03$$

$$[a_{1T} = -3.1689, 500 \dots E + 03]$$

$$a_2 = 8.5954, 9892, 7084, 9892, 708E + 04$$

$$[a_{2T} = 8.5950, 671 \dots E + 04]$$

$$a_3 = -1.4911, 2345, 6789, 0123, 456E + 04$$

$$[a_{3T} = -1.4912, 799 \dots E + 04]$$

$$a_4 = 2.0920, 0000, 0000, 0000, 000E + 01$$

$$[a_{4T} = 2.0917, 991 \dots E + 01]$$

x_i : 計算解

x_{iT} : 真の解

$$x_1 = 3.1418, 9636, 0710, 2233, 109E + 03$$

$$[x_{1T} = 3.1415, 926 \dots E + 03 = \pi \times 10^3]$$

$$x_2 = 2.7181, 5755, 0369, 1257, 776E + 01$$

$$[x_{2T} = 2.7182, 818 \dots E + 01 = e \times 10^1]$$

$$x_3 = 1.7317, 7566, 6092, 3653, 162E - 01$$

$$[x_{3T} = 1.7320, 508 \dots E - 01 = \sqrt{3} \times 10^{-1}]$$

$$x_4 = 1.4145, 0200, 1477, 6291, 626E - 03$$

$$[x_{4T} = 1.4142, 135 \dots E - 03 = \sqrt{2} \times 10^{-3}]$$

10進12桁計算

$$\sum_{i=0}^3 b_i x^{3-i} = 0 \quad \text{解は } x_1, x_2, x_3$$

$$\sum_{i=0}^1 c_i x^{1-i} = 0 \quad \text{解は } x_4$$

$$a_1 = -3.1692, 5252, 828E + 03$$

$$c_0 b_1 = b_1 = -3.1692, 5111, 378E + 03$$

$$c_1 = a_1 - c_0 b_1 = -1.41, 4500, 0000, 0E - 03$$

$$(-1.41, 4502, 0014, 8E - 03)$$

$$[-1.41, 4213, 5 \dots E - 03]$$

$$a_2 = 8.5954, 9892, 708E + 04$$

$$c_0 b_2 = b_2 = 8.5950, 5063, 588E + 04$$

$$a_2 - c_0 b_2 = 4.4829, 1200, 000E + 00$$

$$c_1 b_1 = 4.4829, 0570, 044E + 00$$

$$(a_2 - c_0 b_2) - c_1 b_1 = 6.29, 9560, 0000, 0E - 06$$

$$a_3 = -1.4911, 2345, 679E + 04$$

$$c_0 b_3 = b_3 = -1.4789, 6574, 046E + 04$$

$$a_3 - c_0 b_3 = -1.21, 5771, 6330, 0E + 02$$

$$c_1 b_2 = -1.21, 5769, 9124, 5E + 02$$

$$(a_3 - c_0 b_3) - c_1 b_2 = -1.7205, 5000, 000E - 04$$

$$a_4 = 2.0920, 0000, 000E + 01$$

$$c_1 b_3 = 2.0919, 9703, 988E + 01$$

$$a_4 - c_1 b_3 = 2.96, 0120, 0000, 0E - 05$$

$$\Delta a_4 = 5.0E - 03$$

例題 II

$$\sum_{i=0}^4 a_i x^{4-i} = 0 \quad \left[\sum_{i=0}^4 a_{iT} x^{4-i} = 0 \quad a_{iT} : \text{真の係数} \right]$$

$$a_0 = 1.0000, 0000, 0000, 0000, 000E + 00$$

$$[a_{0T} = 1.0000, 000 \dots E + 00]$$

$$a_1 = -3.1692, 5252, 8282, 5252, 828E + 03$$

$$[a_{1T} = -3.1687, 754 \dots E + 03]$$

$$a_2 = 8.5404, 9892, 7084, 9892, 708E + 04$$

$$[a_{2T} = 8.5397, 341 \dots E + 04]$$

$$a_3 = 9.5061, 2345, 6789, 0123, 456E - 01$$

$$[a_{3T} = 9.5063, 264 \dots E - 01]$$

$$a_4 = -2.5620, 0000, 0000, 0000, 000E + 01$$

$$[a_{4T} = -2.5619, 202 \dots E + 01]$$

x_i : 計算解

x_{iT} : 真の解

$$x_1 = 3.1420, 7141, 8050, 5412, 853E + 03$$

$$[x_{1T} = 3.1415, 926 \dots E + 03]$$

$$x_2 = 2.7181, 1102, 3072, 1001, 335E + 01$$

$$[x_{2T} = 2.7182, 818 \dots E + 01]$$

$$x_3 = 1.7320, 0027, 4673, 1383, 899E - 02$$

$$[x_{3T} = 1.7320, 508 \dots E - 02]$$

$$x_4 = -1.7320, 0014, 8373, 5181, 924E - 02$$

$$[x_{4T} = -1.7320, 508 \dots E - 02]$$

10 進 13 ケタ計算

$$\sum_{i=0}^2 b_i x^{2-i} = 0 \quad \text{解は } x_1, x_4$$

$$\sum_{i=0}^2 c_i x^{2-i} = 0 \quad \text{解は } x_2, x_3$$

$$a_1 = -3.1692, 5252, 8283E + 03$$

$$c_0 b_1 = b_1 = -3.1420, 5409, 8049E + 03$$

$$c_1 = a_1 - c_0 b_1 = -2.71, 9843, 0234, 00E + 01$$

$$(-2.71, 9843, 0233, 47E + 01)$$

$$[-2.72, 0013, 8 \dots E + 01]$$

$$a_2 = 8.5404, 9892, 7085E + 04$$

$$c_0 b_2 = b_2 = -5.4, 4206, 8162, 264E + 01$$

$$a_2 - c_0 b_2 = 8.5459, 4099, 5247E + 04$$

$$c_1 b_1 = 8.5458, 9391, 7724E + 04$$

$$c_2 = (a_2 - c_0 b_2) - c_1 b_1 = 4.707, 7523, 0000, 0E - 01$$

$$(4.707, 7690, 3855, 3E - 01)$$

$$[4.708, 2022 \dots E - 01]$$

$$a_3 = 9.5061, 2345, 6789E - 01$$

$$c_1 b_2 = 1.4801, 5711, 2400E + 03$$

$$a_3 - c_1 b_2 = -1.4792, 0650, 0054E + 03$$

$$c_2 b_1 = -1.4792, 0124, 0681E + 03$$

$$(a_3 - c_1 b_2) - c_2 b_1 = -5.25, 9373, 0000, 00E - 03$$

$$a_4 = -2.5620, 0000, 0000E + 01$$

$$c_2 b_2 = -2.5619, 9089, 0766E + 01$$

$$a_4 - c_2 b_2 = -9.10, 9234, 0000, 00E - 05$$

$$\Delta a_4 = 5.0E - 03$$

例題 III

$$\sum_{i=0}^4 a_i x^{4-i} = 0 \quad \left[\sum_{i=0}^4 a_{iT} x^{4-i} = 0 \quad a_{iT} : \text{真の係数} \right]$$

$$a_0 = 1.0000, 0000, 0000, 0000, 000E + 00$$

$$[a_{0T} = 1.0000, 000 \dots E + 00]$$

$$a_1 = -1.7462, 5252, 8282, 5252, 828E - 01$$

$$[a_{1T} = -1.7461, 929 \dots E - 01]$$

$$a_2 = -9.8704, 9892, 7084, 9892, 708E + 04$$

$$[a_{2T} = -9.8696, 043 \dots E + 04]$$

$$a_3 = 1.7231, 2345, 6789, 0123, 456E + 04$$

$$[a_{3T} = 1.7234, 233 \dots E + 04]$$

$$a_4 = -2.4180, 0000, 0000, 0000, 000E + 01$$

$$[a_{4T} = -2.4175, 494 \dots E + 01]$$

x_i : 計算解

x_{iT} : 真の解

$$x_1 = -3.1417, 3476, 1804, 5979, 651E + 02$$

$$[x_{1T} = -3.1415, 926 \dots E + 02]$$

$$x_2 = 3.1417, 3528, 3478, 6615, 239E + 02$$

$$[x_{2T} = 3.1415, 926 \dots E + 02]$$

$$x_3 = 1.7315, 8354, 8494, 4841, 607E - 01$$

$$[x_{3T} = 1.7320, 508 \dots E - 01]$$

$$x_4 = 1.4147, 3057, 2448, 2336, 540E - 03$$

$$[x_{4T} = 1.4142, 135 \dots E - 03]$$

10進14ケタ計算

$$\sum_{i=0}^2 b_i x^{2-i} = 0 \quad \text{解は } x_1, x_2$$

$$\sum_{i=0}^2 c_i x^{2-i} = 0 \quad \text{解は } x_3, x_4$$

$$a_1 = -1.7462, 5252, 8282, 5E - 01$$

$$c_0 b_1 = -5.2167, 4063, 5588, 0E - 05$$

$$c_1 = a_1 - c_0 b_1 = -1.7457, 3085, 4218, 9E - 01$$

$$(-1.7457, 3085, 4218, 9E - 01)$$

$$[-1.7461, 929 \dots E - 01]$$

$$a_2 = -9.8704, 9892, 7085, 0E + 04$$

$$c_0 b_2 = b_2 = -9.8704, 9895, 2492, 9E + 04$$

$$a_2 - c_0 b_2 = \underline{2.5407, 9000, 0000, 0E - 04}$$

$$c_1 b_1 = 9.10, 7025, 0860, 035E - 06$$

$$c_2 = (a_2 - c_0 b_2) - c_1 b_1 = \underline{2.4497, 1974, 9140, 0E - 04}$$

$$(2.4497, 2418, 4803, 5E - 04)$$

$$[2.4494, 897 \dots E - 04]$$

$$a_3 = 1.7231, 2345, 6789, 0E + 04$$

$$c_1 b_2 = 1.7231, 2345, 6790, 2E + 04$$

$$a_3 - c_1 b_2 = -1.2000, 0000, 0000, 0E - 08$$

$$c_2 b_1 = -1.2779, 5525, 6114, 1E - 08$$

$$(a_3 - c_1 b_2) - c_2 b_1 = \underline{7.79, 5525, 6114, 100E - 10}$$

$$a_4 = -2.4180, 0000, 0000, 0E + 01$$

$$c_2 b_2 = -2.4179, 9562, 1778, 8E + 01$$

$$a_4 - c_2 b_2 = -\underline{4.37, 8221, 2000, 000E - 05}$$

$$\Delta a_4 = 5.0E - 03$$

例題 IV

$$\sum_{i=0}^4 a_i x^{4-i} = 0 \left[\sum_{i=0}^4 a_{iT} x^{4-i} = 0 \quad a_{iT} : \text{真の係数} \right]$$

$$a_0 = 1.0000, 0000, 0000, 0E + 00.$$

$$[a_{0T} = 1.0000, 000 \dots E + 00]$$

$$a_1 = -1.1322, 9131, 2345, 6E + 01$$

$$[a_{1T} = -1.1322, 913 \dots E + 01]$$

$$a_2 = 4.5715, 1252, 8282, 5E + 01$$

$$[a_{2T} = 4.5715, 125 \dots E + 01]$$

$$a_3 = -7.7878, 4144, 9892, 7E + 01$$

$$[a_{3T} = -7, 7878, 414 \dots E + 01]$$

$$a_4 = 4.6732, 4940, 0000, 0E + 01$$

$$[a_{4T} = 4.6732, 494 \dots E + 01]$$

x_i : 計算解 w_{iT} : 真の解

$$x_1 = 4.4721, 3551, 2459, 7E + 00$$

$$[x_{1T} = 4.4721, 359 \dots E + 00 = 2 \cdot \sqrt{5}]$$

$$x_2 = 2.7188, 4958, 1639, 9E + 00$$

$$x_3 = 2.7177, 1447, 5516, 1E + 00$$

$$[x_{2T} = x_{3T} = 2.7182, 818 \dots E + 00 = e]$$

$$x_4 = 1.4142, 1355, 3840, 3E + 00$$

$$[x_{4T} = 1.4142, 135 \dots E + 00 = \sqrt{2}]$$

10 進 10 ケタ 計算

$$\sum_{i=0}^2 b_i x^{2-i} = 0 \quad \text{解は } x_1, x_2$$

$$\sum_{i=0}^2 c_i x^{2-i} = 0 \quad \text{解は } x_3, x_4$$

$$a_1 = -1.1322, 9131, 2E + 01$$

$$c_0 b_1 = b_1 = -7.190, 9850, 94E + 00$$

$$c_1 = a_1 - c_0 b_1 = -4.131, 9280, 26E + 00$$

$$(-4.131, 9280, 29E + 00)$$

$$[-4.132, 4953 \dots E + 00]$$

$$a_2 = 4.5715, 1252, 8E + 01$$

$$c_0 b_2 = 1.2159, 0637, 7E + 01$$

$$a_2 - c_0 b_2 = 3.3556, 0615, 1E + 01$$

$$c_1 b_1 = 2.9712, 6328, 4E + 01$$

$$c_2 = (a_2 - c_0 b_2) - c_1 b_1 = 3.843, 4286, 70E + 00$$

$$(3.843, 4286, 47E + 00)$$

$$[3.844, 2310 \dots E + 00]$$

$$a_3 = -7.7878, 4145, 0E + 01$$

$$c_1 b_2 = -5.0240, 3763, 6E + 01$$

$$a_3 - c_1 b_2 = -2.7638, 0381, 4E + 01$$

$$c_2 b_1 = -2.7638, 0382, 8E + 01$$

$$(a_3 - c_1 b_2) - c_2 b_1 = \underline{1.4000, 0000, 0E - 07}$$

$$a_4 = 4.6732, 4940, 0E + 01$$

$$c_2 b_2 = 4.6732, 4942, 2E + 01$$

$$a_4 - c_2 b_2 = \underline{2.9000, 0000, 0E - 07}$$

$$\Delta a_4 = 5.0 \times 10^{-7}$$

例題IVでは2重根を含み、2つの2次式

$$f_{nb}(x) = \sum_{i=0}^{nb} b_i x^{nb-i} = 0, \quad f_{nc}(x) = \sum_{i=0}^{nc} c_i x^{nc-i} = 0$$

それぞれに分かれて2重根が入っており、係数 b_i, c_i はすべて精度が $(8/2=4)$ 4桁である。しかし、2つの2次式から4つの解を求めると、単根の精度は8桁、2重根の精度は4桁である。すなわち、「 b_1 の誤差と b_2 の誤差」、「 c_1 の誤差と c_2 の誤差」はそれぞれ単根の精度が8桁求められるように入っており、さらに解と係数の関係から、 b_i, c_i に入っている誤差は独立でなく、2重根の解の精度を悪くしている独立の誤差は1つである。これらの関係が成立していないときは判別式(6)が成立しない。