

非柱状領域における $\square u + u^3 = f$

の解について

東大 理 井上 淳

§1 序

$\Omega(t)$ を $\mathbb{R}^3$ の中の領域 (t と共に変わる) とし そこで
次の問題を考えてみよう

$$(*) \quad \begin{cases} \square u + u^3 = f \\ u(x, 0) = u_0(x) \\ u_t(x, 0) = u_1(x) \\ u(x, t) = 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} (x, t) \in \widetilde{\Omega}_T &= \bigcup_{0 \leq t \leq T} \Omega(t) \\ (x, t) \in \partial \widetilde{\Omega}_T &= \bigcup_{0 \leq t \leq T} \partial \Omega(t) \end{aligned}$$

ここで $\partial \Omega(t)$ は $\Omega(t)$ の境界, $\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$

これは いわゆる 'moving boundary' の問題であるが
もう少し詳しく '問題' を書き上げてみよう.

(I) $\Omega(t)$ が時間 t と共に どのように変わるとき,
初期 data $[u_0, u_1]$ 及び外力 f がいかなるものであるとき
'解' は存在するか?

(II) いかなる 函数空間で 'well posed' になるのか?

(III) $\Omega(t)$ が $t \rightarrow \pm\infty$ と共に ある 極限 $\Omega^\pm$ に '近づく'

と その '定常状態 $\Omega^\pm$ における解 $u^\pm(t)$ ' と 非定常状態
 における解 $u(t)$ とにどのような関係が生じうるか?
 (或いは、そういう '関係' が生じうる $\{\Omega(t)\}$, $\Omega^\pm$ を特徴付
 けられるか?)

ここでは (I) (II) についての一つの肯定的解答を与えよう。
 (III) については別の機会にゆずろう (但し 非線型項 u^3 が
 ない場合)

以下 $\Omega(t)$ の変化 について 次の仮定をしよう。

(H) (i) $\Omega(t)$ の境界 $\partial\Omega(t)$ は 滑めらか, かつ $\Omega(t)$ は
 互いに 微分同型

(ii) $\partial_t \Omega_t$ は 滑めらかな多様体で, その変化は 光速
 1 を越えないとする。

我々の結果は以下の如し:

定理 A: (*) の解で $E^2(\Omega_T)$ なるものは一意

定理 B: data $[u_0(x), u_1(x), f(x, t)] \in E^\infty(\Omega(0)) \times E^\infty(\Omega(0)) \times$
 $E^\infty(\Omega_T)$ が '無限に両立' しているならば $E^4(\Omega_T)$ に属す
 る解が存在する。

系 $\Omega(t) = \Omega$ としよう. $[u_0, u_1, f(t)] \in H^{l+2}(\Omega) \times H^{l+1}(\Omega)$
 $\times H^{l+1}(\Omega \times (0, T))$ が 次の両立条件をみたすならば,

$\exists u(t) \in \bigcap_{k=0}^{l+2} E_t^k(H^{l+2-k}(\Omega))$ なる (*) の解

(但し $\partial\Omega$ がコンパクトでないときには, F. E. Browder

の意味で 無限遠方で妙ではないと仮定する. i.e.

uniformly regular of class C^∞ とする.)

定理 C. (*) は E^∞ で well-posed である. i.e.

$u(x, t)$ と $v(x, t)$ を data $[u_0, u_1, f]$, $[v_0, v_1, g]$ に対する解

とする. Ω_T の中の任意のコンパクト集合 K , 任意の整数 m ,

任意の定数 $C, \varepsilon > 0$ に対し, コンパクト集合 K , 整数 N ,

及び定数 $\delta > 0$ が存在して data が次の条件をみたすなら

は $|u(x, t) - v(x, t)|_{E^m(K)} \leq \varepsilon$ となる.

data の満たすべき条件は ($K_0 = K \cap \{t=0\}$)

$$\left\{ \begin{array}{l} |u_0(x)|_{E^{m+2}(K_0)} + |u_1(x)|_{E^{m+1}(K_0)} + |f(x, t)|_{E^{m+1}(K)} + |v_0(x)|_{E^{m+2}(K_0)} \\ \quad + |v_1(x)|_{E^{m+1}(K_0)} + |g(x, t)|_{E^{m+1}(K)} \leq C \\ |u_0(x) - v_0(x)|_{E^{m+2}(K_0)} + |u_1(x) - v_1(x)|_{E^{m+1}(K_0)} + |f(x, t) - g(x, t)|_{E^{m+1}(K)} \leq \delta \end{array} \right.$$

注 (1) 用いられた函数空間は 極く通常に用いられて
いるものである.

(2) 両立条件 とは; もし $u(x, t) \in E^m(\Omega_T)$, $u(x, t) = 0$
 $(x, t) \in \partial_L \Omega_T$ とすると $X(x, t)^l u(x, t) = 0$, $(x, t) \in \partial_L \Omega_T$, $l \leq m$
但し $X(x, t)$ は $\partial_L \Omega_T$ に接するベクトル場. 故に, もし
 $u(x, t)$ が (*) の解で $E^m(\Omega_T)$ に属するならば,

$X(x, 0)^l u(x, 0) = 0$ $x \in \partial \Omega(0)$, $l \leq m$ とならなければならない.

い. この関係を (*) を用いて表現したものが, m 次の両立条件である.

§2. 証明概略

まず, $\partial\Omega_T$ 上の任意の点 (x, t) に対し 近傍 $V_{(x, t)}$ 及び変数変換 Φ があって, $V_{(x, t)}$ 中の問題 (*) は, Φ によって以下の問題に変換される.

$$(**) \begin{cases} \tilde{u}_{ss}(y, s) + a_1(y, s; D)\tilde{u}_s(y, s) + a_2(y, s; D)\tilde{u}(y, s) + \tilde{u}(y, s)^3 = f(y, s) \\ \tilde{u}(y, 0) = \tilde{u}_0(y), \quad \tilde{u}_s(y, 0) = \tilde{u}_1(y), \\ \tilde{u}(y, s) = 0 \end{cases} \quad \text{for } (y, s) \in \Phi(\partial\Omega_T \cap V_{(x, t)})$$

ここで, $\partial\Omega_T$ が光速より速く変化しないことより, $a_i(y, s; D)$ が $\Phi(V_{(x, t)} \cap \partial\Omega_T)$ の中で elliptique にとれることに注意しよう. 問題 (**) に対し, J. Sather, K. Jørgens, F.E. Browder 等の方法を組合わせて, 次の定理をうる.

定理 2.1 $(**)$ を $\mathbb{R}^3$ の中の有界領域 ω , $\tilde{u}(y, s) = 0$ $y \in \partial\omega$ で考える. l を任意の整数 ≥ 0 とし, 初期 data 及び外力 $f(s)$

$$[\tilde{u}_0, \tilde{u}_1, f(s)] \in (H^1(\omega) \cap H^{l+2}(\omega)) \times (H^1(\omega) \cap H^{l+1}(\omega)) \times \bigcap_{k=0}^{l+1} \mathcal{E}_s^k(H^{l+1-k}(\omega))$$

が l 次の両立条件を満たすとする. このとき $(**)$ の一意解 $\tilde{u}(s) \in \bigcap_{k=0}^{l+2} \mathcal{E}_s^k(H^{l+2-k}(\omega))$ が存在し, かつ 有限伝播速度は非線型項 $\tilde{u}^3$ がない場合と同じである.

定理 A の証明 $u(x, t), v(x, t)$ を (*) の二つの解とする.

$w(x, t) = u(x, t) - v(x, t)$ とおくと $w(x, t)$ は

$$(i) \begin{cases} \square w(x, t) + \alpha(x, t)w(x, t) = 0 \\ w(x, 0) = w_t(x, 0) = 0 \\ w(x, t) = 0 \quad \text{for } x \in \partial\Omega(t) \end{cases}$$

を満足する. 但し $\alpha(x, t) = u(x, t)^2 + u(x, t)v(x, t) + v(x, t)^2$

1° $(x^0, t^0) \in \widetilde{\Omega}_T$ が $\Lambda(x^0, t^0) \cap \partial\widetilde{\Omega}_T = \emptyset$ を満足するならば

$w(x, t) = 0$ in $\Lambda(x^0, t^0)$ なることは明らか. 但し

$$\Lambda(x^0, t^0) = \{(x, t); |x - x^0| < t^0 - t, t > 0\}$$

2° $(x^0, t^0) \in \widetilde{\Omega}_T$ は $\Lambda(x^0, t^0) \cap \partial\widetilde{\Omega}_T \neq \emptyset$ を満足するとする.

補題 2.2 任意の $(x^0, 0) \in \Lambda(x^0, t^0) \cap (\partial\Omega(0) \times \{0\})$ に対し,

(i) の解 $w(x, t)$ が消える近傍 $V(x^0, 0)$ が存在する.

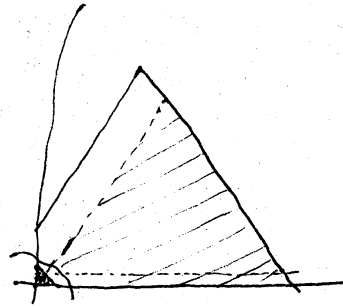
この補題及び $\overline{\Lambda(x^0, t^0) \cap \partial\widetilde{\Omega}_T}$ が compact なことより, 定理 A は証明される.

定理 B の証明 まず次の補題に注意しよう.

補題 2.3 任意の点 $(x^1, t^1) \in \Lambda(x^0, t^0) \cap \partial\widetilde{\Omega}_T$ に対し 近傍

$V(x^1, t^1)$ があつて, そこで次の問題の一意解が存在する

$$(ii) \begin{cases} \square u(x, t) + u(x, t)^3 = f(x, t) & \text{in } V(x^1, t^1) \\ u(x, t^1) = u_0(x), \quad u_t(x, t^1) = u_1(x) & \text{on } V(x^1, t^1) \cap (\Omega(t^1) \times \{t^1\}) \\ u(x, t) = 0 & \text{on } (x, t) \in \Lambda(x^0, t^0) \cap \partial\widetilde{\Omega}_T \end{cases}$$



(x^0, t^0) が $\Lambda(x^0, t^0) \cap \partial \Omega_T = \emptyset$ のとき

$\Lambda(x^0, t^0)$ の中には一意解がある。

左図の如く、上の補題 2.8 を用いることより、初期面を少しあげて同じことを繰返せる。

ここで、その過程が縮んでいかなければ、ある種の
一様性が必要である。それは $\overline{\Lambda(x^0, t^0) \cap \partial \Omega_T}$ が compact
のことに注意して、Lebesgue の covering lemma を用いる。

定理 C の証明 これには、エネルギー不等式の定数が
係数にどう依るかを調べればよい。