

Banach 環上の Jordan homomorphism とその安定性

山形大学工学部

三浦 毅 (Takeshi Miura)

山形大学工学部

高橋 眞映 (Sin-Ei Takahasi)

Department of Basic Technology, Applied Mathematics and Physics,
Yamagata University

日本工業大学 (非常勤講師)

平澤 剛 (Go Hirasawa)

Department of Mathematics, Nippon Institute of Technology

定義 A, B を Banach 環とする. 写像 $\rho: A \rightarrow B$ が *Jordan homomorphism* であるとは, 任意の $f, g \in A$ に対して

$$\rho(f + g) = \rho(f) + \rho(g)$$

$$\rho(f^2) = \rho(f)^2$$

をみたすことである.

注意 1 *Jordan homomorphism* は, 定義により, 連続性及び線型性は仮定されていないことに注意する. 例 1 でみるように, 連続でも線型でもないような *Jordan homomorphism* が存在する.

注意 2 $f, g \in A$ (resp. B) に対して

$$f \circ g \stackrel{\text{def}}{=} fg + gf$$

により定まる積 $\circ$ を *Jordan 積* と呼ぶ. このとき *Jordan homomorphism* $\rho: A \rightarrow B$ は *Jordan 積* を保存する:

$$\rho(f \circ g) = \rho(f) \circ \rho(g) \quad (f, g \in A).$$

実際次の様である. $\rho((f+g)^2) = \{\rho(f) + \rho(g)\}^2$ であるから, 両辺を展開して $\rho(f^2) = \rho(f)^2$ 及び $\rho(g^2) = \rho(g)^2$ を用いると

$$\rho(fg + gf) = \rho(f)\rho(g) + \rho(g)\rho(f)$$

を得るが, これは $\rho(f \circ g) = \rho(f) \circ \rho(g)$ を示す. よって *Jordan homomorphism* は *Jordan* 積を保存する. このことから, 特に A, B が可換であれば, *Jordan homomorphism* は自動的に積を保存する:

$$\rho(fg) = \rho(f)\rho(g) \quad (f, g \in A).$$

注意 1 で述べたように, A, B とともに可換ならば *Jordan homomorphism* $\rho: A \rightarrow B$ は積を保存する. ある場合には一方が可換でなくとも同様の結果が成り立つ. 例えば, 以下に示すように, B が複素数全体のなす可換 Banach 環 $\mathbb{C}$ の場合は, A の可換性は必要ではない. 実際 I. N. Herstein [3] はより一般的な場合についての結果を得ているため, 次の補題 1 は特別な場合に過ぎない. しかしながら完全性を期すため, ここではその証明まで含めて述べることにする. 次の論法は W. Żelazko [8, Proof of Theorem 1] と本質的に同じであることに注意する.

補題 1 A を可換とは限らない Banach 環, $\rho: A \rightarrow \mathbb{C}$ を *Jordan homomorphism* とする. このとき ρ は自動的に積を保存する.

証明 注意 1 で述べたように

$$\rho(xy + yx) = 2\rho(x)\rho(y) \quad (x \in A, y \in A) \tag{1}$$

が成り立つ。(1)は任意の $x, y \in A$ に対して成り立つので、特に x を x^2 に置き換えれば

$$\rho(x^2y + yx^2) = 2\rho(x)^2\rho(y) \quad (2)$$

となる。また y を $xy + yx$ に置き換えれば

$$\rho(x(xy + yx) + (xy + yx)x) = 2\rho(x)\rho(xy + yx),$$

よって(1)とあわせて

$$\rho(x^2y + 2xyx + yx^2) = 4\rho(x)^2\rho(y) \quad (x \in A, y \in A). \quad (3)$$

(3) から(2)を辺々引けば

$$\rho(xyx) = \rho(x)^2\rho(y) \quad (x \in A, y \in A) \quad (4)$$

を得る。さて、 $f \in A$ 及び $g \in A$ を任意に固定し

$$2t = \rho(fg - gf) \quad (5)$$

とおく。このとき(1)及び(5)より

$$\rho(fg) = \rho(f)\rho(g) + t \quad \text{and} \quad \rho(gf) = \rho(f)\rho(g) - t \quad (6)$$

であるが、さらに(4), (5), (6) から

$$\begin{aligned} 4t^2 &= \rho((fg - gf)^2) \\ &= \rho(fg)^2 - \rho(fg^2f) - \rho(gf^2g) + \rho(gf)^2 \\ &= \{\rho(f)\rho(g) + t\}^2 - 2\rho(f)^2\rho(g)^2 + \{\rho(f)\rho(g) - t\}^2 \\ &= 2t^2; \end{aligned}$$

したがって $t=0$, つまり $\rho(fg) = \rho(gf)$ である. よって(1)より $\rho(fg) = \rho(f)\rho(g)$, すなわち ρ は積を保存する. ■

系 2 A を可換とは限らない *Banach* 環, B を半単純可換 *Banach* 環とする. このとき *Jordan homomorphism* $\rho: A \rightarrow B$ は自動的に積を保存する.

証明 M_B を B の極大イデアル空間とする. このとき各 $x \in M_B$ に対して写像 $\rho_x: A \rightarrow \mathbb{C}$ を次で定める:

$$\rho_x(f) = \widehat{\rho(f)}(x) \quad (f \in A).$$

ここに $\widehat{\cdot}$ は *Gelfand* 変換である. いま ρ が *Jordan homomorphism* であることから, 各 $x \in M_B$ に対して ρ_x も *Jordan homomorphism* であることが分かる; したがって, 補題 1 より, ρ_x は積を保存する. つまり

$$\widehat{\rho(fg)}(x) = \widehat{\rho(f)}(x) \widehat{\rho(g)}(x) \quad (f, g \in A, x \in M_B).$$

いま B は半単純であるから $\rho(fg) = \rho(f)\rho(g)$ を得る. ■

以下では *Jordan homomorphism* のある種の安定性について考察する. そのため, まず加法的写像の安定性に関する次の結果を述べる.

定理 A (D. H. Hyers, T. M. Rassias and Z. Gajda) E_1, E_2 を実 *Banach* 空間, $\delta \geq 0, p \geq 0: p \neq 1$ とする. (連続とも線形とも限らない) 写像 $\phi: E_1 \rightarrow E_2$ が次をみたすとする:

$$\|\phi(x+y) - \phi(x) - \phi(y)\| \leq \delta(\|x\|^p + \|y\|^p) \quad (x, y \in E_1).$$

このとき次をみたす加法的写像 $T: E_1 \rightarrow E_2$ が唯一つ存在する :

$$\|\phi(x) - T(x)\| \leq \frac{2\delta}{|2 - 2^p|} \|x\|^p \quad (x \in E_1).$$

定理 A は 1940 年に S. M. Ulam により出された問題 ([7] 参照) に対する 1 つの解答である. 実際, D. H. Hyers [4] は 1941 年に $p = 0$ の場合を, T. M. Rassias [5] は 1978 年に $0 \leq p < 1$ の場合をそれぞれ示した. その後 Z. Gajda [2] は $1 < p < \infty$ に対しても同様の結果が成り立つことを示すとともに, $p = 1$ に対する反例を与えた.

以下では, Hyers-Rassias-Gajda と同様な意味での摂動を Jordan homomorphism について考察し, その安定性について論ずる. このとき, R. Badora [1] の手法を応用し, 若干の問題点を解消することにより, 次の結果が得られた :

定理 3 A, B を可換とは限らない Banach 環, $\delta \geq 0, p \geq 0 : p \neq 1$ とする. このとき写像 $\phi: A \rightarrow B$ が

$$\|\phi(f+g) - \phi(f) - \phi(g)\| \leq \delta(\|f\|^p + \|g\|^p) \quad (f, g \in A)$$

$$\|\phi(f^2) - \phi(f)^2\| \leq \delta\|f\|^{2p} \quad (f \in A) \quad (7)$$

をみたせば, 次のような Jordan homomorphism $\rho: A \rightarrow B$ が唯 1 つ存在する :

$$\|\rho(f) - \phi(f)\| \leq \frac{2\delta}{|2 - 2^p|} \|f\|^p \quad (f \in A).$$

証明 まず定理 A により次をみたす加法的写像 $\rho: A \rightarrow B$ が唯 1 つ存在する :

$$\|\phi(f) - \rho(f)\| \leq \frac{2\delta}{|2 - 2^p|} \|f\|^p \quad (f \in A). \quad (8)$$

この ρ が求める *Jordan homomorphism* であることを以下で示す.

$f \in A$ を任意に取り固定し, $s = |1-p|/(1-p)$ とおく. このとき $0 \leq p < 1$ ならば $s = 1$, $p > 1$ ならば $s = -1$ であることに注意する. ρ は加法的なので, (8) より各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned} \|n^{-2s}\phi(n^{2s}f^2) - \rho(f^2)\| &= \|n^{-2s}\phi(n^{2s}f^2) - n^{-2s}\rho(n^{2s}f^2)\| \\ &\leq n^{-2s} \frac{2\delta}{|2-2^p|} \|n^{2s}f^2\|^p, \end{aligned}$$

すなわち

$$\|n^{-2s}\phi(n^{2s}f^2) - \rho(f^2)\| \leq n^{2s(p-1)} \frac{2\delta}{|2-2^p|} \|f^2\|^p \quad (9)$$

である. 同様にして, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\|n^{-s}\phi(n^s f) - \rho(f)\| \leq n^{s(p-1)} \frac{2\delta}{|2-2^p|} \|f\|^p. \quad (10)$$

となることが分かる. ここで s の取り方から $s(p-1) < 0$ なので, (9) 及び(10) と併せて

$$\rho(f^2) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-2s}\phi(n^{2s}f^2) \text{ and } \rho(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-s}\phi(n^s f) \quad (11)$$

を得る. また(7) より各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $\|\phi(n^{2s}f^2) - \phi(n^s f)^2\| \leq \delta \|n^s f\|^{2p}$ が成り立つ. し

たがって, $s(p-1) < 0$ であることに注意すれば

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-2s} (\phi(n^{2s}f^2) - \phi(n^s f)^2) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} n^{2s(p-1)} \delta \|f\|^{2p} = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

を得る. 以上より(11) 及び(12) から

$$\begin{aligned}\rho(f^2) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-2s} \phi(n^{2s} f^2) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \{n^{-2s} \phi(n^{2s} f^2) - n^{-2s} (\phi(n^{2s} f^2) - \phi(n^s f)^2)\} \\ &= \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-s} \phi(n^s f) \right\}^2 = \rho(f)^2\end{aligned}$$

となる. $f \in A$ は任意であったので, ρ が *Jordan homomorphism* であることが示された. ■

例 1 G を *Jordan homomorphism* $\rho: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ で, さらに全射であるもの全体の集合とする.

例えば恒等写像 z 及び複素共役 $\bar{z}$ は G の元であるから, G は空集合でない. 簡単な計算により, 連続な *Jordan homomorphism* は $z, \bar{z}$ と零写像だけであることが分かる. さらに, よく知られていることではあると思うが, 驚くべきことに

$$\#G = 2^{\#\mathbb{C}}$$

である. ここに $\#$ は集合の濃度である. つまり, 和や二乗を保存するばかりでなく全射性を仮定した写像は, 代数構造や連続性などを保存するとは限らない“単なる写像”と同じだけあることを示している.

例 2 定理 3 と同様の結果は $p = 1$ に対しては成り立たない. 実際 $P. \check{S}emrl$ [6] は各 $\delta > 0$ に対して次のような関数 $\phi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ を構成した:

(a) ϕ は連続かつ積を保存する.

(b) $|\phi(x+y) - \phi(x) - \phi(y)| \leq \delta(|x| + |y|) \quad (x, y \in \mathbb{C}).$

(c) いかなる *Jordan homomorphism* $\rho: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ に対しても

$$\sup_{x \in \mathbb{C} \setminus \{0\}} \frac{|\phi(x) - \rho(x)|}{|x|} \geq 1.$$

例 2 では積を保存するばかりか連続な写像により, 定理 3 の $p = 1$ に対する反例が与えられているが, この連続性はむしろ次の意味で必然的であることが分かる.

定理 4 A を可換とは限らない Banach 環, $\delta \geq 0$ とする. このとき写像 $\phi: A \rightarrow \mathbb{C}$ が

$$|\phi(x+y) - \phi(x) - \phi(y)| \leq \delta(\|x\| + \|y\|) \quad (x, y \in A)$$

$$|\phi(x^2) - \phi(x)^2| \leq \delta\|x\|^2 \quad (x \in A)$$

をみたせば, ϕ は Jordan homomorphism であるか, あるいは

$$\sup_{x \in A \setminus \{0\}} \frac{|\phi(x)|}{\|x\|} \leq \frac{1 + \sqrt{1 + 4\delta}}{2}$$

となる.

参考文献

- [1] R. Badora, *On approximate ring homomorphisms*, J. Math. Anal. Appl. **276** (2002), 589–597.
- [2] Z. Gajda, *On stability of additive mappings*, Internat. J. Math. Math. Sci., **14** (1991), 431–434.
- [3] I. N. Herstein, *Topics in Ring Theory*, Chicago Lectures in Mathematics, Chicago and London, The University of Chicago Press.
- [4] D. H. Hyers, *On the stability of the linear functional equation*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **27** (1941), 222–224.

- [5] T. M. Rassias, *On the stability of the linear mapping in Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **72** (1978), 297-300.
- [6] P. Šemrl, *Non linear perturbations of homomorphisms on $C(X)$* , Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **50** (1999), 87-109.
- [7] S. M. Ulam, *A collection of mathematical problems*, Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, no. 8, Interscience, New York-London, 1960.
- [8] W. Żelazko, *A characterization of multiplicative linear functionals in complex Banach algebras*, Studia. Math. **30** (1968), 83-85.