

曲線とそのヤコビ多様体の定義体について

中大 理工 関口 カ

[6]により, 筆者は non-hyperelliptic な曲線とその偏極ヤコビ多様体の field of moduli が一致することを任意標数でなりたつことを示したのであるが, 最近の Oort-Steenbrinkの結果[5]を用いることにより, 標数2を除いて, 任意の曲線について field of moduli の一致に関する簡単な証明を与えることの出来ることを示す。詳しい内容については, 近いうちに出される[7]を御参照願いたい。

§1. Fields of moduli

以下, 非特異な射影曲線を単に曲線と呼ぶことにする。

定義 $\mathbb{P}$ を体 K 上のある構造をもった代数多様体としたとき, K に含まれる体 K_F が $\mathbb{P}$ の field of moduli とは次の性質を満たすときを言う。

K を, K を含む universal domain としたとき,

i) 任意の元 $\sigma \in \text{Aut}(K)$ に対し,

$$(P \otimes_K K)^\sigma \cong P \otimes_K K \iff \sigma \in \text{Aut}(K/K_F),$$

$$\text{ii) } \bigcap_{k' \subset k} k' = k_P.$$

$\exists P/k' \text{ s.t. } P \otimes_{k'} k \simeq P \otimes_k k$

この定義は、小泉 [3] によるものであり、標数 0 の場合は、 k_P は i) だけで特徴づけられる。

定理 1.1. 偏極アーベル多様体あるいは曲線 P に対し、その field of moduli k_P が存在する。

注意. field of moduli k_P は P の定義体の下極限であり、 k_P は、一般には、 P の定義体とはなり得ない。(志村 [8] 参照.)

§ 2. Fields of moduli に関する問題点

以下、 $A_{g,d,n}$ を次数 d の polarization と level n -structure をもつ次元 g のアーベル多様体のモジュライ空間、 $M_{g,n}$ と level n -structure をもつ種数 g の曲線のなすモジュライ空間とする。特に、 $n=1$ のとき、 $A_{g,d} = A_{g,d,1}$ 、 $M_g = M_{g,1}$ とおく。

問題 1. P を体 k 上の次元 g の偏極アーベル多様体、 C を k 上の種数 g の曲線とし、 x を P に対応する $A_{g,1}$ 上の点、 c を C に対応する $M_{g,1}$ 上の点としたとき、

$$k_P = k(x), \quad k_C = k(c)$$

がなりたつか。

問題 2. 曲線 C に対し、その偏極ヤコビ多様体を $J(C) =$

$(J(c), \lambda(c))$ としたとき,

$$k_c = k_{P(c)}$$

がなりたつ。

§ 3. 問題 1 について

標数 0 の場合, 問題 1 は古典的であり, Bailly, 志村, 松阪により, 肯定的に別々に証明された。体 k の標数 p が正の場合, この問題はいまだ完全には解決されておらず, いまのところ, 次の定理が一般の解答と思われる。

定理 3.1. $n \geq 3$ とし, $\pi: A_{g,1,n} \longrightarrow A_{g,1,1}$ を自然な写像, $\pi(y) = x$ ($y \in A_{g,1,n}$), $S'' = \text{Spec}(k(y) \otimes_{k(x)} k(y)) \xrightarrow[p_2]{p_1} \text{Spec}(k(y)) = S'$ を各成分への射影としたとき, 次は同値である。

- i) $k(y)$ は $k(x)$ 上分離的である。
- ii) $p_1^*(P)$ と $p_2^*(P)$ は同形である。
- iii) $k_P = k(x)$ 。

これより容易に次の定理を得る。

定理 3.2. k を標数 p の体, $P = (X, \lambda)$ を k 上 g 次元の偏極アベル多様体としたとき, 次の条件のうち 1 つが満たれるならば, $k_P = k(x)$ がなりたつ。

- i) X : ordinary,
- ii) $p > 2g+1$,
- iii) $p > g+1$ かつ P : indecomposable.

実際, X が ordinary であれば, Serre-Tate の lifting の理論が使える, 定理 3.1 の (ii) のなりたつことがわかる。また, $\text{Aut}(P)$ の位数の素因数は, 必ず $2g+1$ 以下であり, P が indecomposable であれば, $g+1$ 以下であることに注意すれば, これ等の場合, 定理 3.1 の (i) がなりたち, 定理 3.2 を得る。

定理 3.1 の証明はここでは省略し, またの機会に譲ることにする。

§ 4. 問題 2 について

C が non-hyperelliptic であるか, 種数が 3 (2 でも同様) であれば, $k_C = k_{P(C)}$ のなりたつことを [6] により示したのであるが, [5] を用いれば, 結果は次のように一般化される。

定理 4.1. k を標数 p の体, C を k 上の曲線とし, $p=2$ のときは, C は non-hyperelliptic と仮定する。 $P(C) = (J(C), \lambda(C))$ を C の偏極ヤコビ多様体とする。 k_0 を k の部分体とし, $P(C) \cong P \otimes_{k_0} k$ となる k_0 上の主偏極アーベル多様体 P_0 が存在するならば, k_0 上の曲線 C_0 が存在し, $C_0 \otimes_{k_0} k \cong C$ となる。特に, $k_C = k_{P(C)}$ がなりたち。

証明は次のように行なわれる。

まず, Grothendieck [2] の理論により, S を noetherian scheme, C, C' を S 上の曲線, P, P' を S 上の偏極アーベル

多様体としたとき, 関手

$$T \longmapsto \text{Isom}_T(C \times_S T, C' \times_S T)$$

$$T \longmapsto \text{Isom}_T(P' \times_S T, P \times_S T)$$

を表現する S 上の scheme $\text{Isom}_S(C, C')$, $\text{Isom}_S(P', P)$ の存在することがわかる。ここで更に, Deligne-Mumford [1] の手法により次がわかる。

定理 4.2. $\text{Isom}_S(C, C')$, $\text{Isom}_S(P', P)$ は S 上 finite, unramified である。

この定理と, Weil, Matsusaka, Martens 等による Torelli の定理の結果を組み合わすことにより, 次の結果を得る。

定理 4.3. $J = \text{Pic}^\circ : \text{Isom}_S(C, C') \longrightarrow \text{Isom}_S(P(C'), P(C))$ は closed immersion である。

更に, ここで次の Oort-Steinbrink の結果を用いる。

定理 4.4 (Oort-Steinbrink [5]). $n \geq 3$ とし, $(C, \alpha) \longmapsto (C, -\alpha)$ で定義される involution を $z : M_{g,n} \longrightarrow M_{g,n}$ とおく。ここで, α は曲線 C の level n -structure である。このとき, Torelli map により定義される写像

$$\overline{J}_n : M_{g,n} / \langle z \rangle \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] \longrightarrow A_{g,1,n} \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] = A_{g,1,n}^{(2)}$$

は locally closed immersion となる。更に, $M_{g,n} / \langle z \rangle$ の non-hyperelliptic point では, 標数 2 にあっても, $\overline{J}_n$ は locally closed immersion である。

この Oort-Steenbrink の結果を用いることにより、次の結果が得られる。

定理 4.5. C, C' を noetherian scheme S 上の曲線とする。

(i) C, C' が non-hyperelliptic であれば、自然な写像

$$\bar{J}: \Pi_{\text{geom}, S}(C, C') \longrightarrow \Pi_{\text{geom}, S}(P(C'), P(C)) / \{\pm 1\}$$

は同形を与える。

(ii) C, C' が hyperelliptic であり、かつ、 S が $\text{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{2}])$ 上の scheme であれば、

$$J: \Pi_{\text{geom}, S}(C, C') \longrightarrow \Pi_{\text{geom}, S}(P(C'), P(C))$$

は同形を与える。

この定理を用いることにより、定理 4.1 は次のように導かれる。

$$S' = \text{Spec } k \longrightarrow S = \text{Spec } k_0, \quad S'' = S' \times_S S' \xrightarrow[\pi_2]{\pi_1} \text{Spec } k$$

とおく。簡単の爲、 C を hyperelliptic と仮定して議論する。

non-hyperelliptic の場合も、単に技術的な問題だけで同様に証明がなされる。

このとき、定理 4.5 により、

$$J: \Pi_{\text{geom}, S''}(P_1^*C, P_2^*C) \xrightarrow{\sim} \Pi_{\text{geom}, S''}(P_1^*P(C), P_2^*P(C))$$

は同形である。仮定により、 k_0 上の主偏極アーベル多様体 P

が存在することより、 P を与える descent data $q \in \Pi_{\text{geom}, S''}(P_1^*P(C), P_2^*P(C))$ (S'' -valued point) が存在する。即ち、 $\Delta: S' \rightarrow S''$;

対角写像, $P_{ij}: S' \times_S S' \times_S S' \longrightarrow S'' : (i, j)$ -成分への射影としたとき,

$$\Delta^* \varphi = \mathbb{I}_{P(C)}, \quad P_3^* \varphi = P_{12}^* \varphi \circ P_{23}^* \varphi$$

かなりたつ。丁が同形であるから, φ に対応する C の descent data $\sigma \in \text{Isom}_{S''}(P_1^* C, P_2^* C)$ (S'' -valued point) が存在し, この σ により, C は $S = \text{Spec } k_0$ 上に descent する, 我々の結果を得る。

定理 4.5 の証明. 簡単の爲, C, C' を hyperelliptic と仮定して議論する。

$H_{g,1,n}$ を, principal polarization, linear rigidification, level n -structure をもつ g 次元のアベル多様体のなす fine moduli space とし,

$$\pi: H_{g,1,4} \longrightarrow H_{g,1,1} \otimes_{\text{Spec } \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]} = H_{g,1,1}^{(2)}$$

を自然な写像とする。このとき, π は principal covering with Galois group $S_p(3, \mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ を与える。

ここで, S を適当に小さくすれば, $P(C')$ は linear rigidification ϕ をもち, $(P(C'), \phi)$ は $H_{g,1,1}^{(2)}$ 上の S -valued point u を定める。この u を用いて, fibre product

$$\begin{array}{ccc} S' = S \times_{H_{g,1,1}^{(2)}} H_{g,1,4} & \xrightarrow{u'} & H_{g,1,4} \\ \pi' \downarrow & \square & \downarrow \pi \\ H_{g,1,4} & \xrightarrow{u} & H_{g,1,1}^{(2)} \end{array}$$

をとれば, U' は $(P(C') \times_S S', \alpha)$ (α は level 4-structure) を与える。 $(C'_S = C' \times_S S', \alpha)$ の定める $M_{g,4}$ 上の点を $a: S' \rightarrow M_{g,4}$ とおく。

任意の S' -scheme $f: S'' \rightarrow S'$ と, 任意の S'' -valued point

$$\tau: S'' \longrightarrow \mathbb{I}_{\text{geom}_S}(P(C'_S), P(C_S))$$

に対し, $\tau(\alpha \times_S S'')$ は $P(C_S)$ の level 4-structure を与える。

従って, $(C_{S''}, \tau(\alpha \times_S S''))$ は S'' -valued point $b: S'' \rightarrow M_{g,4}$

を定める。更に, $\tau: (P(C_{S''}), \alpha \times_S S'') \xrightarrow{\sim} (P(C_S), \tau(\alpha \times_S S''))$

であるから, Oort-Steenbrink の結果, 定理 4.4 により

$$J_4(a \circ f) = J_4(b)$$

から

$$a \circ f = b$$

を得る。従って, 同形

$$\phi: (C_{S''}, \tau(\alpha \times_S S'')) \xrightarrow{\sim} (C'_{S''}, \alpha \times_S S'')$$

が存在し, $J(\phi): \alpha \times_S S'' \xrightarrow{\sim} \tau(\alpha \times_S S'')$ より, Serre の定理

と rigidity により, $J(\phi) = \tau$ を得る。このことは,

$$J: \mathbb{I}_{\text{geom}_{S''}}(C_{S''}, C'_{S''}) \longrightarrow \mathbb{I}_{\text{geom}_{S''}}(P(C_{S''}), P(C'_{S''}))$$

が全射であることを意味し, このことと, 定理 4.3 を組み合わせれば,

$$J_{S'}: \mathbb{I}_{\text{geom}_S}(C_S, C'_S) \longrightarrow \mathbb{I}_{\text{geom}_S}(P(C_S), P(C'_S))$$

が同形であることがわかる。更に, $S' \rightarrow S$ が faithfully flat

であることに注意すれば, descentの理論により, 同形

$$J: \mathbb{I}_{\text{geom}_S}(C, C') \xrightarrow{\sim} \mathbb{I}_{\text{geom}_S}(P(C'), P(C))$$

を得る。

References

- [1] P. Deligne and D. Mumford, The irreducibility of the space of given genus, Publ. Math. 36 (Volume dedicated to O. Zariski), L.H.E.S. (1969), 75-109.
- [2] A. Grothendieck, Fondements de la géométrie algébrique, Séminaire Bourbaki, 1952-62, Secrétariat Math., Paris (1962).
- [3] S. Koizumi, The fields of moduli for polarized abelian varieties and for curves, Nagoya Math. J., 48 (1972), 37-55.
- [4] T. Matsusaka, On a theorem of Torelli, Amer. J. Math. 80 (1958), 784-800.
- [5] F. Oort and J. Steenbrink, The local Torelli problem for algebraic curves, Univ. Utrecht, Dep. Math., Preprint Nr. 136, 1979.
- [6] T. Sekiguchi, The coincidence of fields of moduli for non-hyperelliptic curves and for their jacobian varieties, Nagoya Math. J., 82 (1981), 57-82.
- [7] T. Sekiguchi, On the fields of rationality for curves and for their jacobian varieties, to appear.
- [8] G. Shimura, On the field of rationality for an abelian variety, Nagoya Math. J., 45 (1972), 167-178.
- [9] A. Weil, Zur Beweis des Torellischen Satzen, Nachr. Akad. Wissensch. Göttingen, (1957), 33-53.