

Noncausal 確率積分の L^2 -理論 (II)

富山大・理 関口 健 (Takeshi Sekiguchi)

秋田大・教育 塩田 安信 (Yasunobu Shiota)

(I) において, 主に E. I. I. について紹介した。ここでは, (I) で得た結果を $\ast$ -積分に應用する。(I) §3.6. Th. によれば, E. I. I. は $L^2(X)$ の CONS $\{\varphi_n\}$ に依存しない, しかし, $\ast$ -積分は明らかに $\{\varphi_n\}$ に, その順序にも, 依存している。このことを明確にするために, $\{\varphi_n\}$ に関する $\ast$ -積分を $J_\varphi^\ast$ と記す, すなわち, $F \in L^0(X \times \Omega)$ に対し

(1) $J_\varphi^\ast F = \lim_{n \rightarrow \infty} \int F(x) \{k_n^\varphi(x, y) W(dy)\} \mu(dx)$ in prob.,
 ここで $k_n^\varphi(x, y) = \sum_{j=0}^n \varphi_j(x) \varphi_j(y)$ 。また $J_\varphi^\ast F$ が存在するとき, F は φ -integrable という。更に, すべての CONS $\{\varphi_n\}$ に対し φ -integrable で, $J_\varphi^\ast F$ がすべて一致するとき, F は universally integrable という。

E. I. I. の理論を $\ast$ -積分に應用する場合, (I) §4.2. Th., すなわち, " $F \in \mathcal{H}^{(1)}(X \times \Omega)$ が φ -integrable となるための必要十分条件は,

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \iint (\partial F)(x, y) k_n^\varphi(x, y) \mu(dx) \mu(dy) \quad \text{in prob.}$$

が存在することであり, このとき

$$(3) \quad \mathcal{I}_\varphi^* F = \mathcal{I} F + \lim_{n \rightarrow \infty} \iint (\partial F)(x, y) k_n^\varphi(x, y) \mu(dx) \mu(dy)$$

が成り立つ。" が基本となる。

§ 1. Universal integrable に関する注意

先ず適当な CONS $\{\varphi_n\}$ をついで φ -integrable となるが, universally integrable となるような random function F の例を与える。

$X = [0, 1]$, $\mu(dx) = dx$ とし, $0 < \alpha < 1$ をとり

$$g(x, y) = \begin{cases} 1_{[0, x+\alpha]}(y) & , 0 \leq x < 1-\alpha \\ 1_{[0, x+\alpha-1]}(y) & , 1-\alpha \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$F(x) = \int_0^1 g(x, y) W(dy)$$

このとき, $\{\varphi_n\}$ として三角関数系, すなわち $\varphi_0 = 0$, $\varphi_{2k}(x) = \sqrt{2} \cos 2k\pi x$, $\varphi_{2k+1}(x) = \sqrt{2} \sin 2k\pi x$, $k \geq 1$, をとれば, F は φ -integrable となるが, F は universally integrable ではない。実際,

$$\int_0^1 \int_0^1 g(x, y) dx dy = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^1 \int_0^1 g(x, y) \varphi_n(x) \varphi_n(y) dx dy = \frac{\sin 2k\pi\alpha}{2k\pi}, \quad n = 2k, k+1, k \geq 1,$$

に注意すれば,

$$(2) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2k\pi\alpha}{2k\pi} = 1-\alpha$$

となり, (I). § 4. 2. Th. から, F は φ -integrable である。

しかし、上式の級数が条件収束だから、 $\{\varphi_n\}$ の順序を適当に変え、 $\text{CONS } \{\varphi_n\}$ に対しては、 F は φ -integrable とならない、すなわち F は *universally integrable* でない。

次の問は未解決である。

問題 すべての $\text{CONS } \{\varphi_n\}$ に対して φ -integrable な F は *universal integrable* が、すなわち、 $\mathcal{I}_\varphi^* F$ はすべて一致するか。

*-積分の定義 (1) において、"in prob." を "in $L^2(\Omega)$ " で置き換えると、上の問は肯定的に解かれる。実際 $F \in \mathcal{H}''(X \times \Omega)$ とし、すべての $\text{CONS } \{\varphi_n\}$ に対して、(1) が $L^2(\Omega)$ で収束しているとする。このことは、すべての $\{\varphi_n\}$ に対して (2) が $L^2(\Omega)$ で収束することと同値である。いま $G \in L^2(\Omega)$ に対し、bilinear form

$$E \left[\iint (\partial F)(x, y) f(x) g(y) \mu(dx) \mu(dy) G \right], \quad f, g \in L^2(X),$$

を考えれば、これは *trace class* となることが、上の条件から分る。したがって、(2) は $\{\varphi_n\}$ に依存せず、 F は *universally integrable* である。

§ 2 E. I. I. の不定積分の *-integrability

quasi-martingale は *-integrable で、その *-積分は

Stratonovich-Fisk の積分に一致することが, Ogawa により示されている。ここでは, E. I. I. を用いて noncausal な場合にも類似の結果が成り立つことを示す。

以下 $X = [0, 1]$, $\mu(dz) = dz$, $\{\varphi_n\}$ を $L^2([0, 1])$ の CONS とし,

$$k_n^\varphi(z, y) = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j(z) \varphi_j(y), \quad u_n^\varphi(z) = \int_0^z k_n^\varphi(z, y) dy$$

とおく。先づいくつかの補題を準備しておく。

Lem. 1 $G \in \mathcal{H}^{(2)}([0, 1] \times \Omega)$ ならば

$$(4) \quad \int_0^a dz \int_0^z (\partial G)(z, z) W(dz) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^a dz \int_0^1 \int_0^z (\partial G)(z, y) W(dz) k_n^\varphi(z, y) dy \quad \text{in } L^2(\Omega),$$

ここで $0 \leq a \leq 1$.

Proof. (I) § 3.3. Prop. 1. Cor. より

$$\int_0^a dz \int_0^z (\partial G)(z, z) W(dz) = \int_0^a W(dz) \int_z^a (\partial G)(z, z) dz,$$

$$\int_0^a dz \int_0^1 \int_0^z (\partial G)(z, y) W(dz) k_n^\varphi(z, y) dy = \int_0^a W(dz) \int_z^a dz \int_0^1 (\partial G)(z, y) k_n^\varphi(z, y) dy$$

$$\text{だから, } H(z) = 1_{[0, a]}(z) \int_z^a (\partial G)(z, z) dz, \quad H^{(n)}(z) = 1_{[0, a]}(z) \int_z^a dz \int_0^1 (\partial G)(z, y) k_n^\varphi(z, y) dy$$

とおくと, (I) § 3.1. Th. より, $H^{(n)} \rightarrow H$ in $\mathcal{H}^{(1)}([0, 1] \times \Omega)$ を

示せば (4) を得る。Parseval の等式から $H^{(n)} \rightarrow H$ $dz \times dP$ -a.e.

であり, かつ $\{H^{(n)}(z)\}^2 \leq \int_0^1 (\partial G)^2(z, y) dy \in \mathcal{H}([0, 1] \times \Omega)$ と

なるから, Lebesgue の 4 乗根定理より $H^{(n)} \rightarrow H$ in $\mathcal{H}([0, 1] \times \Omega)$.

$$\text{更に } (\partial H)(z, u) = 1_{[0, a]}(z) \int_z^a (\partial^2 G)(z, z, u) dz,$$

$$(\partial H^{(n)})(z, u) = 1_{[0, a]}(z) \int_z^a dz \int_0^1 (\partial^2 G)(z, y, u) k_n^\varphi(z, y) dy$$

に注意すれば, 上と同様に $1 \in \partial H^{(n)} \rightarrow \partial H$ in $\mathcal{H}([0,1] \times \Omega)$
 が示せる。 $1 \in \partial H$ が $\partial H^{(n)} \rightarrow H$ in $\mathcal{H}^{(2)}([0,1] \times \Omega)$, q. e. d.

Lem. 2 $H \in \mathcal{H}^{(3)}([0,1] \times \Omega)$ に対し, $G(x) = \int_0^x H(y) W(dy)$ とお
 け, $G \in \mathcal{H}^{(2)}([0,1] \times \Omega)$ であり,

$$(5) \quad \frac{1}{2} \int_0^a G(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^a dx \int_0^x G(y) k_n^q(x, y) dy \quad \text{in } L^2(\Omega),$$

ここに $0 \leq a \leq 1$.

Proof. (I) § 3.1. Th. より $G \in \mathcal{H}^{(2)}([0,1] \times \Omega)$ であり, (5) 式を
 示す。 (II) § 3.3. Prop. 1. Cor. と $k_n^q(x, y)$ の対称性から

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^a G(x) dx &= \frac{1}{2} \int_0^a W(dx) H(x) \int_x^a dx \\ \int_0^a dx \int_0^x G(y) k_n^q(x, y) dy &= \int_0^a W(dx) H(x) \int_x^a dy \int_y^a k_n^q(x, y) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^a W(dx) H(x) \int_x^a dy \int_x^a k_n^q(x, y) dx, \end{aligned}$$

ここに dx , dy の dx 同様 $\int_x^a dy \int_x^a k_n^q(x, y) dx \rightarrow \int_x^a dx$ であり
 $1_{[0,a]}(x) H(x) \int_x^a dy \int_x^a k_n^q(x, y) dx \rightarrow 1_{[0,a]}(x) H(x) \int_x^a dx$ in $\mathcal{H}^{(2)}([0,1] \times \Omega)$.

したがって, (I) § 3.1. Th. より (5) を得る。 q. e. d.

Lem. 3 (Ogawa) $\{u_n^q\}$ が $L^2([0,1])$ で 強有界となる
 ことと, すべて $g \in L^2([0,1])$ に対し

$$(6) \quad \frac{1}{2} \int_0^1 g(y) dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 dx \int_0^x g(y) k_n^q(x, y) dy$$

となることは同値である。

Lem. 3 から, 次の系を得る。

Cor. $\{u_n^q\}$ が $L^2([0,1])$ で 強有界ならば, $G \in \mathcal{H}([0,1] \times \Omega)$ に対し (5) が成り立つ。

以上の準備から, 次の結果を得る。

Th. (i) $H \in \mathcal{H}^{(3)}([0,1] \times \Omega)$ に対し, $G(x) = \int_0^x H(y) W(dy)$ とおけば, $F(x) = \int_0^x G(y) W(dy)$ は universally integrable で,

$$(7) \quad \int_0^a F(x) W(dx) = \int_0^a F(x) W(dx) + \frac{1}{2} \int_0^a G(x) d_1 x + \int_0^a dx \int_0^x (\partial G)(y; x) W(dy)$$

をみたす。ここで $0 \leq a \leq 1$ 。

(ii) $\{u_n^q\}$ が $L^2([0,1])$ で 強有界ならば, $G \in \mathcal{H}^{(2)}([0,1] \times \Omega)$ に対し $F(x) = \int_0^x G(y) W(dy)$ は φ -integrable で, (7) をみたす。

(iii) $G \in \mathcal{H}^{(2)}([0,1] \times \Omega)$ で, $x \mapsto G(x)$ が a.s. に 有界変分をもつならば, $F(x) = \int_0^x G(y) W(dy)$ は universally integrable で (7) をみたす。

Proof. (i), (ii), (iii) のいずれの場合も, (I) §3.1. Th., §3.3. Prop. 2

により, $F \in \mathcal{H}^{(1)}([0,1] \times \Omega)$ であり,

$$(\partial F)(x; y) = 1_{[0, x]}(y) G(y) + \int_0^x (\partial G)(x; y) W(dy)$$

をみる。したがって (I) §4.2. Th. から, (4) 式と (5) 式を示せば, 証明は完了する。このことは, (i), (ii) については, Lem. 1, Lem. 2, Lem. 3, Cor. 2 で示される。また (iii) については, 有界変分関数 g に対し, $\{q_n\}$ の条件なしに (6) が成り立つことに注意すればよい。 $\square$ e. d.

G が causal, すなわち $B_x = \sigma(\int_0^y W d\omega : 0 \leq y \leq x)$ に adapted, である場合, $\int_0^x dx \int_0^x (\partial G)(y; x) W(dy) = 0$ となり, 上の定理は Ogawa の結果と一致する。しかし, causal な $G \in \mathcal{H}([0,1] \times \Omega)$ についても Ogawa の結果は正しい。次に示すように, causal な $G \in \mathcal{H}([0,1] \times \Omega)$ で $G \notin \mathcal{H}''([0,1] \times \Omega)$ となるものが存在するから, 上の定理は Ogawa の結果を完全に含んではいない。

例. τ を定数でない B_x に属する stopping time とする。

このとき, $G(x, \omega) = 1_{\{\tau \geq x\}}(\omega)$ は causal で $\mathcal{H}([0,1] \times \Omega)$ に属するが, $\mathcal{H}''([0,1] \times \Omega)$ には属さない。

上の例は, 次の一般的な補題から明らかである。

Lem. 4 $\Lambda \in \mathcal{F}$ に対し, $1_\Lambda \in \mathcal{H}''(\Omega)$ ならば, $P(\Lambda)$

0 または 1 である。

Proof. (I) §2.8. Cor.1 より $(\partial 1_\Lambda)(x) = (\partial 1_\Lambda^2)(x) = 2 1_\Lambda (\partial 1_\Lambda)(x)$
 故に, $\partial 1_\Lambda = 0$ on $X \times \Lambda^c$ $\mu \times P$ -a.e. また $\partial 1_\Lambda =$
 $\partial(1 - 1_{\Lambda^c}) = -\partial 1_{\Lambda^c} = 0$ on $X \times \Lambda$ $\mu \times P$ -a.e. (したがって
 $\partial 1_\Lambda = 0$ $\mu \times P$ -a.e. となり, 1_Λ は a.s. 定数, すな
 わり $P(\Lambda) = 0$ または 1. q.e.d.

最後に causal random function の注目すべき性質を述べ
 ておく。

Prop. $G \in \mathcal{H}([0,1] \times \Omega)$ が causal ならば, $\hat{G} \in \mathcal{H}'''([0,1] \times \Omega)$
 $\widehat{1_{[0,x]}^{(y)} G(y)} \in \mathcal{H}^{(2)}([0,1]^2 \times \Omega)$, $\widehat{1_{[0,x]}^{(y)} 1_{[0,y]}^{(z)} G(z)} \in \mathcal{H}^{(3)}([0,1]^3 \times \Omega)$,
 ... 等が成り立つ。

Proof. $G(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \int_0^1 \cdots \int_0^1 g_p(x; x_1, \dots, x_p) W(dx_1) \cdots W(dx_p)$ とす
 ると, G が causal であることは,

$$g_p(x; x_1, \dots, x_p) = 0 \quad \text{if } x_i > x \text{ for some } i=1, \dots, p,$$

と 1 でよい。このとき

$$\hat{g}_p(x_1, x_2, \dots, x_{p+1}) = \frac{1}{p+1} g_p(x_1; x_2, \dots, x_{p+1}) \text{ for } x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_{p+1},$$

に注意すれば,

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 \hat{g}_p^2(x_1, \dots, x_{p+1}) dx_1 \cdots dx_{p+1} = \frac{1}{p+1} \int_0^1 \cdots \int_0^1 g_p(x_1, x_2, \dots, x_{p+1}) dx_1 \cdots dx_{p+1}$$

となる。したがって $\|G\|_{\mathcal{H}([0,1] \times \Omega)} = \|\hat{G}\|_{\mathcal{H}^{(1)}([0,1] \times \Omega)}$ となる。すなわち $\hat{G} \in \mathcal{H}^{(1)}([0,1] \times \Omega)$ を得る。その他のものについても同様に示せる。 *q. e. d.*

§3 *積分の定義について

以下 $k_n(x, y) \in L^2(X^2)$, $n = 0, 1, \dots$, は

$$(8) \begin{cases} \left\| \int k_n(x, y) f(y) \mu(dy) \right\|_{L^2(X)} \leq C \|f\|_{L^2(X)} \\ \int k_n(x, y) f(y) \mu(dy) \rightarrow f(x) \text{ in } L^2(X) \end{cases}, \quad f \in L^2(X),$$

をみたすものとする。ここで C は f に無関係な定数とする。

$\text{CONS } \{\varphi_n\}$ から定義される $\{k_n^{\varphi}\}$ は (8) をみたすことは明らか。

さて *積分の定義を, $F \in L^0(X \times \Omega)$ に対し

$$(9) \quad \int_k^* F = \lim_{n \rightarrow \infty} \int F(x) \int k_n(x, y) W(dy) \mu(dx) \quad \text{in prob.}$$

と拡張しておく。前と同様に $\int_k^* F$ が存在するとき, F は

k -integrable という。このとき, (I) §3.6. Th., §4.2. Th.

は全く同じ証明で, 次のように拡張される。

Th. 1 $F \in \mathcal{H}^{(1)}(X \times \Omega)$ ならば

$$(10) \quad \int F(x) W(dx) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int F(x) \otimes \int k_n(x, y) W(dy) \mu(dx) \text{ in } L^2(\Omega).$$

Th. 2. $F \in \mathcal{H}^{(1)}(X \times \Omega)$ が k -integrable となるための

必要十分条件は,

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \iint (\partial F)(x, y) k_n(x, y) \mu(dx) \mu(dy) \quad \text{in prob.}$$

が存在することであり, このとき

$$(2) \quad J_k^* F = JF + \lim_{n \rightarrow \infty} \iint (\partial F)(x, y) k_n(x, y) \mu(dx) \mu(dy)$$

が成り立つ。

すべての $F \in \mathcal{F}^{(1)}(X \times \Omega)$ に対して, (1) が 0 となる $\{k_n\}$ は存在しないから, 次の系を得る。

Cor. E. I. I. J は $*$ -積分 J_k^* の型の積分ではない。

$\{k_n\}$ を適当に選べ, causal な F に対し $JF = J_k^* F$ となるようにすることは, 通常の Ito 積分の定義から容易に分る。

実際, $X = [0, 1]$, $\mu(dx) = dx$ とするとき, $k_n(x, y) = \sum_{j=1}^{2^n-1} 2^n 1_{I_j}(x) 1_{I_{j+1}}(y)$, $I_j = (\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n}]$, $j=1, \dots, 2^n$, とおけば,

Th. 2. から明らかである。Berger-Mizel は, $F'(x) = \lim_{y \downarrow x} (\partial F)(x, y)$ が存在するとき, $\int F(x) dB(x) = \int F(x) W(dx) + \int F'(x) dx$ による積分を定義しているが, これは上の $\{k_n\}$ から定義される J_k^* に外ならない。

上の注意からも分るように, $\{k_n\}$ を一般化したことにより, J_k^* は Stratonovich-Fisk 積分の拡張とは限らなく

なった。言換えれば、§2の結果は成り立つとは限らない。
しかし、(8)に $k_n(x, y)$ の対称性を加えれば、§2の結果はその
のまま成り立つ。

(I) §6. におけるように、*duality* を用いて $F \in \mathcal{F}_L^{(-\infty)}(X \times \Omega)$
に $*$ -積分を拡張し、これまでの結果の類似を得ることは易
しい。しかし、その効用には疑問の余地がある。