

## 動的幾何学ソフトウェアによる 四元数の積の可視化とその応用

東海大学・理学部数学科 前田 陽一 (Yoichi Maeda)  
Department of Mathematics,  
Tokai University (maeda@tokai-u.jp)

**Abstract.** この論文では、動的幾何学ソフトの数学教育・数学研究への利用の例を紹介する。具体的には、動的幾何学ソフトによる代数的オブジェクトの可視化である。複素数の積は、複素平面によって幾何的に理解できる。しかし、四元数の積は、次元が4次元となり、直接可視化することは困難である。今回は単位四元数の積の可視化について解説する。単位四元数の集合は3次元単位球面と同相なので、立体射影によって3次元ユークリッド空間内で視ることができる。このモデルの応用として、特殊直交群の積のスピン現象が説明できることを示す。本研究で用いる動的幾何学ソフトウェアは Cabri 3D である。

### 1 直観的な四元数の積のイメージ

四元数は複素数の拡張として、1843 年に William R. Hamilton によって発見された数体系である。複素数は、複素数平面上で幾何的性質を完全に捉えることができる。四元数の作る空間は、4次元ベクトル空間であるため、その幾何的性質を捉えるためにはある制限が必要である。ノルムが1である単位四元数であれば、3次元単位球面  $S^3$  と一対一の対応がつく。3次元単位球面  $S^3$  は、立体射影 (stereographic projection) によって3次元ユークリッド空間  $R^3$  内で可視化できる。単位四元数の積はまた単位四元数であるから、結局、3次元ユークリッド空間  $R^3$  内で単位四元数の群構造を可視化できることになる。複素数の場合は、単位複素数は複素平面内の単位円に対応し、その群構造  $U(1)$  は偏角の和として単純に理解することができる。単位四元数の場合はどうであろうか？ 単位四元数の群構造を直観的にイメージする最も有効なものの一つとしてフレンチクルーラー (図 1) が挙げられる。

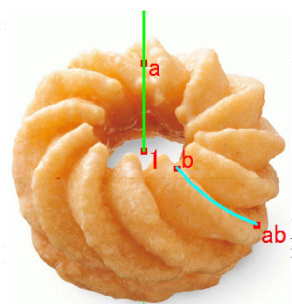


図 1: 四元数の積の直観的イメージ

図1のイメージ図について説明する。まず、中心に1がある。単位四元数 $a$ がフレンチクルーラーの軸上にあり、単位四元数 $b$ がフレンチクルーラーのひだ状にあるとする。このとき、積 $ab$ は、 $b$ からひだに沿って、 $a$ が1と離れている分だけ移動した場所にある。この説明は、かなり荒っぽい説明ではあるが、直観的には理解しやすいと思われる。ここでいう”ひだ”とは、軸 $1a$ とクリフォード平行になっている大円である。以上のことから、単位四元数の積の作図に必要なものはクリフォード平行の作図法、また、1から $a$ までの球面上の距離(角度)分の移動であることがわかる。

## 2 クリフォード平行の作図

3次元球面 $S^3$ の3次元ユークリッド空間 $R^3$ への立体射影は、3次元球面を可視化するのに最も有効な写像である。 $S^3$ 上の北極 $N = (0, 0, 0, 1)$ から $R^3$ へ立体射影すると、南極 $S = (0, 0, 0, -1)$ が原点 $(0, 0, 0)$ に対応し、 $S^3$ の赤道面は単位球面に対応する。 $S^3$ 上の任意の大円は、単位球面(赤道面)上の対心点を通過することを考慮に入れると、次のように作図することができる(図2)。

**作図1** (2点 $A, B$ を通る大円を作図する方法)

- (1) 入力: 点 $A, B$ を任意にとる。
- (2) 単位球面(赤道面)に関して、点 $A, B$ の反転 $A^*, B^*$ を取る。
- (3) 原点に関して、点 $A^*, B^*$ の対心点 $-A, -B$ を取る。
- (4) 出力: 4点 $A, -B, -A, B$ を通る円が $A, B$ を通る大円である。

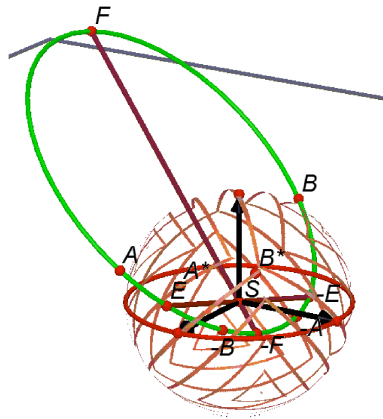


図2:  $S^3$ の立体射影における大円 $\overline{AB}$

作図1において、 $-A, -B$ は、 $A, B$ の $S^3$ における対心点であり、距離は $A(-A) = B(-B) = \pi$ である。図2のように、単位球面と大円 $\overline{AB}$ との交点を $E, -E$ 、また、 $R^3$ のユークリッド距離において原点に最も遠い点を $F$ 、最も近い点を $-F$ とすると、 $FE = E(-F) = (-F)(-E) = (-E)F = \pi/2$ である。立体射影は等角写像であるが、距離は保存しないので、立体射影の像での距離には注意が必要である。

さて,  $a = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k$  を単位四元数とする.  $\|a\|^2 = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$  より,  $(a_0, a_1, a_2, a_3) \in S^3$  となる. 立体射影により, 単位四元数  $a = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k$  は,  $R^3$  内の点  $(x, y, z)$  と次のように対応する.

$$(x, y, z) = \frac{(a_1, a_2, a_3)}{1 + a_0}, \quad (a_0, a_1, a_2, a_3) = \frac{1}{1 + r^2}(1 - r^2, 2x, 2y, 2z),$$

ここで,  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$  である. 本稿では, 便宜上, 図 3 のように,  $x$  軸 ( $i$  軸) を縦の軸として表現することとする. この表現では,  $i = (1, 0, 0)$ ,  $j = (0, 1, 0)$ ,  $k = (0, 0, 1)$ ,  $1 = (0, 0, 0)$ ,  $-1 = (\text{無限遠点})$  などとなる (図 3).

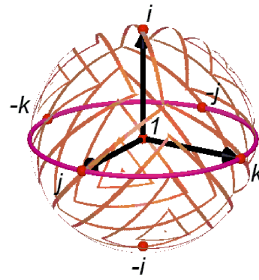


図 3: 単位四元数  $1, i, j, k, -i, -j, -k$  の可視化

**定義 2.1.** (クリフォード平行 [1] p.299)  $S^3$  内の 2 つの大円  $C, C'$  がクリフォード平行とは,  $d(m, C')$  の値が  $m \in C$  によらず一定のときをいう.

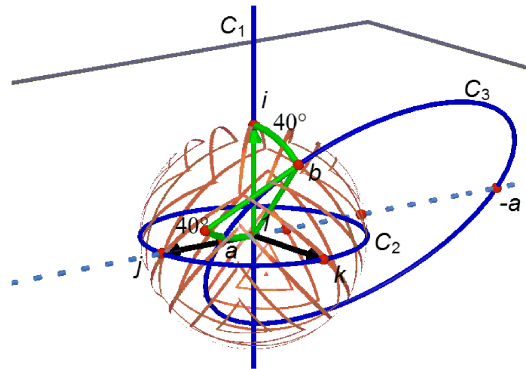


図 4: クリフォード平行

図 4 において,  $d(C_1, C_2) = 90^\circ$ ,  $d(C_1, C_3) = 40^\circ$ ,  $d(C_2, C_3) = 50^\circ$  である. クリフォード平行を作図するためには, 円の中心角と円周角の関係を利用するのが便利である. 図 5 において, 円  $aN(-a)S$  と直線  $NOS$  とのなす角度は, 角  $\angle aNS$  のちょうど 2 倍である. このことは中心角と円周角の関係から簡単に導かれる.

クリフォード平行の作図は次のとおりである. 簡単のため, 大円の 1 つはユークリッド直線  $\overline{1i}$  とし, 点  $a$  は  $jk$  平面上にあるとする.

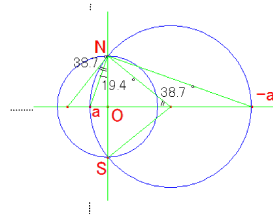


図 5: 中心角と円周角

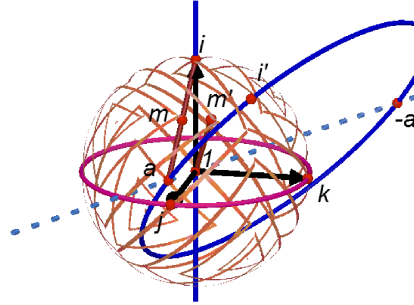


図 6: クリフォード平行の作図

**作図 2** (点  $a$  を通り, 大円  $\overline{1i}$  にクリフォード平行な大円を作図する方法) (図 6)

- (1) 入力: 大円  $\overline{1i}$  と,  $jk$  平面上の点  $a$  を任意にとる.
- (2) 点  $i$  と点  $a$  の中点  $m$  をとる.
- (3) 点  $m$  を直線  $\overline{1i}$  を軸として,  $j$  から  $k$  の方向に  $90^\circ$  回転した点  $m'$  をとる.
- (4) 点  $i$  を線分  $\overline{1m'}$  のまわりに半回転した点  $i'$  をとる.
- (5) 点  $a$  の  $S^3$  の意味での対心点  $(-a)$  をとる. (作図 1 を参照)
- (6) 出力: 3 点できる円  $ai'(-a)$  が  $a$  を通り大円  $\overline{1i}$  にクリフォード平行な大円である.

### 3 四元数の積の作図

立体射影の像内で四元数の積を作図するため行う作業は, 平面に関する鏡映 3 つと, 球面に関する反転 1 つである. 以下, その理由と, 具体的な作図法を述べる. 四元数  $a = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k$  を  $R^4$  内の点とみなすとき,  $\{1, i, j, k\}$  は正規直交基底である. また, 単位四元数  $u$  に対して,  $\{u, ui, uj, uk\}$  もまた正規直交基底になることが容易に確かめられる ([2] p.83).

**命題 3.1.** (単位四元数に関する鏡映 ([2] p.83))

$u$  を単位四元数とする. このとき,  $q \rightarrow -u\bar{q}u$  は,  $u$  に垂直で原点  $O$  を通る超平面に関する鏡映である.

**証明.**  $f(q) = -u\bar{q}u$  とする. このとき

$$f(uq) = -u\overline{uq}u = -u\bar{q}\bar{u}u = -u\bar{q},$$

である. よって,

$$f(u) = -u, \quad f(ui) = ui, \quad f(uj) = uj, \quad f(uk) = uk.$$

したがって,  $f$  は,  $ui, uj, uk$  で張られる超平面に関する鏡映である. □

簡単のため, 以下の議論では  $a = e^{\theta i}$  とする. この場合,  $a$  が大円  $\overline{1i}$  上にあり, 作図の様子が分かり易い. 一般の場合も軸  $\overline{1a}$  の方向が変わるだけで本質的には同じである. 積  $ab$  は,  $R^4$  内の 4 つの鏡映  $f_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) で実現される.  $f_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) を, 次の 4 つの単位四元数

$$u_1 = j, \quad u_2 = j \cos \frac{\theta}{2} + k \sin \frac{\theta}{2} = e^{\frac{\theta}{2}i} j = j e^{-\frac{\theta}{2}i}, \quad u_3 = i, \quad u_4 = i e^{\frac{\theta}{2}i},$$

に垂直な超平面に関する鏡映とする. このとき,

$$f_1(b) = -j\bar{b}j, \quad f_2(b) = -e^{\frac{\theta}{2}i} j\bar{b}j e^{-\frac{\theta}{2}i},$$

よって,

$$f_2 \circ f_1(b) = -e^{\frac{\theta}{2}i} j \overline{(-j\bar{b}j)} j e^{-\frac{\theta}{2}i} = e^{\frac{\theta}{2}i} b e^{-\frac{\theta}{2}i}.$$

一方,

$$f_3(b) = -i\bar{b}i, \quad f_4(b) = -i e^{\frac{\theta}{2}i} \bar{b} i e^{\frac{\theta}{2}i},$$

であるから,

$$f_4 \circ f_3(b) = -i e^{\frac{\theta}{2}i} \overline{(-i\bar{b}i)} i e^{\frac{\theta}{2}i} = e^{\frac{\theta}{2}i} b e^{\frac{\theta}{2}i}.$$

したがって,

$$f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1(b) = e^{ib} b = ab.$$

このように,  $R^4$  内の 4 つの鏡映によって積  $ab$  が実現できる. 直観的にいうと, 立体射影の像内では, 鏡映の合成  $f_2 \circ f_1$  は, ユークリッド直線  $\overline{1i}$  の周りの回転となる. 一方, 鏡映の合成  $f_4 \circ f_3$  は, ユークリッド円  $jk(-j)(-k)$  の周りの "回転" となる.  $R^4$  内の原点を通る超平面に関する鏡映は, 立体射影の像では大球面に関する反転に対応する. 特に, もし単位四元数  $u$  が純四元数 ( $\text{Re}u = 0$ ) ならば,  $R^4$  内の鏡映は, 立体射影の像では原点を通るユークリッド平面に関する鏡映となる. 3 つの単位四元数  $u_1, u_2, u_3$  は純四元数であるが,  $u_4$  は純四元数ではない. したがって, 四元数の積の作図は, 3 つの鏡映と 1 つの反転で実現できる.

**作図 3** (単位四元数  $a, b$  の積  $ab$  を作図する方法) (図 7)

- (1) 入力: 大円  $\overline{1i}$  上にある単位四元数  $a$  と, 任意の場所にある単位四元数  $b$  をとる.
- (2) 点  $a$  を直線  $\overline{1j}$  を軸として,  $i$  から  $k$  の方向に  $90^\circ$  回転した点  $a'$  をとる.
- (3) 点  $a'$  と点  $j$  の中点  $m$  をとる.
- (4) 直線  $\overline{1i}$  と点  $j$  を含む平面  $P_1$  をとる.
- (5) 直線  $\overline{1i}$  と点  $m$  を含む平面  $P_2$  をとる. (平面  $P_1$  と平面  $P_2$  のなす角は  $\theta/2$ )
- (6) 点  $b$  の平面  $P_1$  に関する鏡映点  $b_1 (= f_1(b))$  をとる.
- (7) 点  $b_1$  の平面  $P_2$  に関する鏡映点  $b_2 (= f_2(b_1))$  をとる.
- (8) 点  $1, j, k$  を含む平面  $P_3$  をとる.
- (9) 点  $a$  の  $S^3$  の意味での対心点 ( $-a$ ) をとる. (作図 1 を参照)
- (10) 点  $-a$  を中心として, 点  $j$  を通る球面  $Sp_1$  をとる.  
(平面  $P_3$  と球面  $Sp_1$  のなす角は  $\theta/2$ )

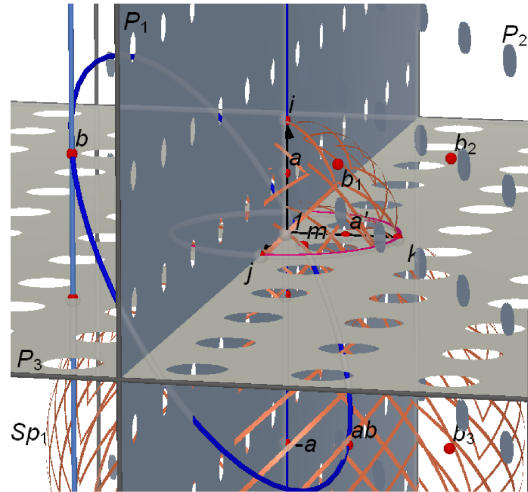


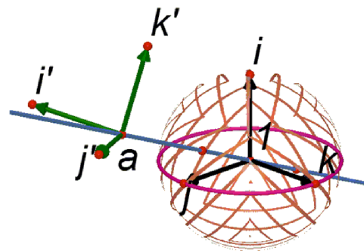
図 7: 単位四元数の積の作図

- (11) 点  $b_2$  の平面  $P_3$  に関する鏡映点  $b_3 (= f_3(b_2))$  をとる.  
 (12) 出力: 点  $b_3$  の球面  $Sp_1$  に関する反転点  $ab (= f_4(b_3))$  が,  $a$  と  $b$  の積の点である.

単位四元数  $a, b$  が任意である場合も, 同様の作図で積  $ab$  を作図できる. また, 作図 3 で作図した  $ab$  は, 大円  $\overline{1a}$  とクリフォード平行な大円  $\overline{b(ab)(-b)}$  上にあることも作図で確かめられる (図 7).

## 4 四元数の可視化の応用

前節まで, 単位四元数の積の可視化について説明してきた. この節では, その応用として, 特殊直交群  $SO(3)$  の積が幾何的に理解できることを示す.  $SO(3)$  の元は,  $R^3$  内の回

図 8: 単位四元数と  $SO(3)$  との関係

転と対応している.  $R^3$  内の回転は, 回転軸  $\vec{v}$  と回転角  $\theta$  で表現される. 図 8 は単位四元数と  $SO(3)$  の元との幾何的關係を表したものである. 単位四元数  $a$  に対して,  $SO(3)$  の元  $A$  を, 次のように対応させることができる ([2], pp.70-78).

$A$  の回転軸  $= \vec{1a}$ ,  $A$  の回転角  $= (1 \text{ と } a \text{ との三次元球面 } S^3 \text{ での距離}) \times 2$ .

ここで, 回転の方向は, ベクトル  $\vec{1a}$  に対して左ねじの方向に回転させるものとする. ここで注意したいことは, 回転角が  $S^3$  での距離の 2 倍になるので, 対心点は同じ  $SO(3)$  の

元に対応することである。いくつか例を挙げると、次のようになる。

$$\pm 1 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \pm i \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \pm \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

このように、単位四元数の群  $Sp(1)$  が特殊直交群  $SO(3)$  の 2 重被覆群であることから量子力学のスピン現象を  $SO(3)$  の軸の変化として目で視ることができる。図 9 は、作図 3

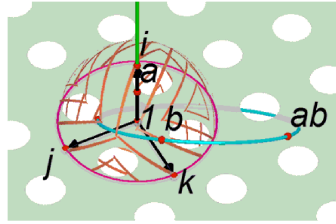


図 9: 四元数  $a, b$  の積  $ab$  の位置

によって、四元数  $a$  と  $b$  との積  $ab$  を作図したものである。簡単のため、 $a$  は、大円  $\overline{1i}$  上を動くとする。任意の点  $b$  に対して、積  $ab$  は  $b$  を通って、大円  $\overline{1i}$  とクリフォード平行な大円上を動く。四元数  $a, b$  に対応する  $SO(3)$  の元を  $A, B$  とすると、行列の積  $AB$  は四元数  $ab$  に対応する。

立体射影の像において、原点から点  $ab$  へ向かうベクトルが  $AB$  の回転軸であることに注意する。 $a$  を、大円  $\overline{1i}$  上で  $1$  から  $i, -1, -i, 1$  と一周させると、 $AB$  の回転軸はどのように動くであろうか？ まずわかることは、 $AB$  の回転軸は、 $b$  を通るクリフォード平行な大円が含まれる平面の上に存在することである。 $a = 1$  のときは、 $AB = B$  であり、 $AB$  の回転軸は  $\overrightarrow{1b}$  方向にある。 $a = -1$  になったときは、再び  $AB = B$  となり、 $AB$  の回転軸は、 $\overrightarrow{1(-b)}$  方向にある ( $\overrightarrow{1b}$  と  $\overrightarrow{1(-b)}$  とは、同一直線上にあることに注意)。つまり、 $a$  が大円  $\overline{1i}$  を  $1$  から  $-1$  まで半周する間に、 $AB$  は  $B$  から変化し、半周後に再び同じ  $SO(3)$  の元  $B$  になる。それは、 $a = 1$  と  $a = -1$  に対応する  $SO(3)$  の元が同じ単位行列  $I_3$  であることから明らかであるし、また、回転軸  $\overrightarrow{1b}$  と  $\overrightarrow{1(-b)}$  は、向きが違いますが同じ直線上にあることとも符合する。しかしここで、 $a = 1$  から  $a = i$  を経由して  $a = -1$  まで連続的に動かしたときの  $AB$  の回転軸の変化に注目すると、別の側面が見えてくる。 $SO(3)$  の元としては、元に戻っているにもかかわらず、 $AB$  の回転軸はちょうど  $180^\circ$  しか回転していないのである。もし、回転軸をさらに  $180^\circ$  回転させて元に戻すとするなら、 $a$  の値をさらに  $a = -1$  から  $a = -i$  を経由して  $a = 1$  まで動かす必要がある。この意味で、 $AB$  の回転軸は、スピンのなふるまいをするといえる (図 10)。

## 5 結論

本稿では、単位四元数の積を 3 次元球面の立体射影の像の中で考え、その可視化ができた。また、その可視化は特殊直交群  $SO(3)$  の積と関係しており、 $SO(3)$  の積を可視化することもできた。さらにその可視化から、積のスピンのなふるまいをみることもできた。



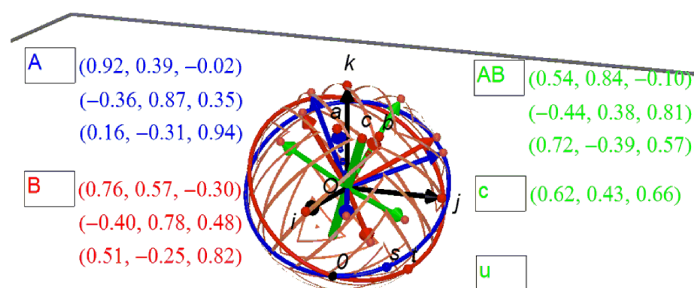


図 10: 軸の変化のスピン現象

動的幾何学ソフトを用いた本研究を通して、動的幾何学ソフトの有用性をまとめてみると次のようになる。

### 1. 動的幾何学ソフトによる実験と検証

今回、四元数の積を可視化するにあたって、3次元ベクトルの内積と外積を用いる方法も考察した。単位四元数  $a = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k$  をスカラー  $a_0$  と3次元ベクトル  $\vec{v}_a = (a_1, a_2, a_3)$  に分けて  $a = (a_0, \vec{v}_a)$  と表すと、

$$ab = (a_0, \vec{v}_a)(b_0, \vec{v}_b) = (a_0b_0 - \vec{v}_a \cdot \vec{v}_b, a_0\vec{v}_b + b_0\vec{v}_a + \vec{v}_a \times \vec{v}_b)$$

となる。本研究開始当初、この式を用いて積の可視化に挑戦していたのであるが思いのほか作図が困難であることが分かった。今回、積の可視化を考案するにあたって、クリフォード平行に着目し、Cabri 3D で実際に図形を描きながら、考察を重ねた。実際に作図することによって、その図形がきちんと定義された図形かがわかり、視覚化することによって、新たな発見があり、それをフィードバックしながら推論を深めることができた。クリフォード平行の作図には、円の円周角と中心角の関係をうまく利用することによって、おそらくもっとも簡単な作図法を提案できたと思っている。積の可視化には、代数的な考察から3つの鏡映と1つの反転で作図できることがわかった。

### 2. 動的幾何学ソフトによる可視化と幾何的応用

四元数の積の可視化が、 $SO(3)$  の積の可視化と関連しており、スピン現象を起こすこと、またそのメカニズムを解明できた。実際に作図し、動かすことによって動的幾何学ソフトならではのダイナミズムを体感できる。このような群構造の可視化は、数学研究のみならず、数学教育にも大いに役立つと思われる。

## 参考文献

- [1] Berger, M. (1987). *Geometry I*. Berlin Heidelberg, Germany: Springer-Verlag.
- [2] 示野信一 『演習形式で学ぶリー群・リー環』臨時別冊・数理科学SGCライブラリ-88 サイエンス社, 2012.