

Harmonic volumes of hyperelliptic curves from analytical and topological viewpoints

田所 勇樹

(東京大学大学院数理科学研究科)

Yuki Tadokoro

(Department of Mathematical Sciences, University of Tokyo)

2002 年 12 月 5 日

概要

B. Harris は, Chen の反復積分を用いて, Riemann 面の調和体積を定義した. 超楕円曲線に対する調和体積を完全に決定した. この結果は田中淳氏の定理 [8] の幾何的解釈の一つを与える.

目次

1. Introduction and Preliminaries
2. The harmonic volumes of hyperelliptic curves
3. Topological viewpoints
4. Appendix (Iterated integrals of Fermat curves)

1 Introduction and Preliminaries

X を種数 $g(\geq 3)$ のコンパクト Riemann 面とする. 興味の対象は, X 上の 1 形式に対する, X 上の道での Chen [2] の反復積分 (iterated integrals) である. 簡単に反復積分の定義を復習しよう. ω_1, ω_2 を X 上の 1 形式とし, $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ を X 上の道とする. このとき, ω_1, ω_2 の γ での (長さ 2 の) 反復積分は

$$\int_{\gamma} \omega_1 \omega_2 = \int_{0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1} f_1(t_1) f_2(t_2) dt_1 dt_2$$

と定義される。ただし、 f_1, f_2 は、 t を閉区間 $[0, 1]$ の座標としたとき、 $\gamma^*(\omega_i) = f_i(t)dt$ を満たす。端点を固定した際、反復積分は一般的にホモトピー不変ではない。ホモトピー不変にするために補正項を付け加える。

Lemma 1.1 $\omega_{1,i}, \omega_{2,i}, i = 1, 2, \dots, m$, を X 上の閉 1 形式とし、 $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ を X 上の道とする。 $\int_X \sum_{i=1}^m \omega_{1,i} \wedge \omega_{2,i} = 0$ と仮定すれば、 $d\eta = \sum_{i=1}^m \omega_{1,i} \wedge \omega_{2,i}$ を満たすような X 上の 1 形式 η がとれる。
このとき、

$$\sum_{i=1}^m \int_{\gamma} \omega_{1,i} \omega_{2,i} - \int_{\gamma} \eta$$

は端点を固定してホモトピー不変になる。

Remark 1.2 この η を具体的に表すためには Green 作用素が必要となり、大変難しい(少なくとも私には)。しかし、超楕円曲線 (CP^1 の 2 重分岐被覆) の場合には、 CP^1 上の 1 形式を利用して表すことができる [4]。

Lemma 1.1 を用いて、調和体積 [4] を定義しよう。まずは、点付き調和体積 [7] から定義する。1 次元コホモロジー群 $H^1(X; \mathbb{Z})$ とホモロジー群 $H_1(X; \mathbb{Z})$ を Poincaré 双対により同一視し、 H と表す。Hodge $*$ 作用素 (ここでは、複素構造にのみ依存し計量には依存しない) によりこの H は “ X 上の $\mathbb{Z}$ に周期を持つ、実調和 1 形式全体からなる加群” と同一視できる (Hodge の定理)。 $(,) : H \otimes H \rightarrow \mathbb{Z}$ を交叉形式 $H \times H \rightarrow \mathbb{Z}$ とテンソル積の普遍性から得られる非退化交代形式とし、 $K = \ker(,)$ とおく。点付き調和体積 I_{x_0} は点付き Riemann 面 (X, x_0) に対し、反復積分を用いて以下のように定義される $K \otimes H$ から $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ への準同型である。

Definition 1.3

$$I_{x_0} \left(\sum_{k=1}^m \left(\sum_{i=1}^{n_k} a_{i,k} \otimes b_{i,k} \right) \otimes c_k \right) = \sum_{k=1}^m \left(\sum_{i=1}^{n_k} \int_{\gamma_k} a_{i,k} b_{i,k} - \int_{\gamma_k} \eta_k \right) \mod \mathbb{Z},$$

ここで γ_k は、 $H_1(X; \mathbb{Z}) \ni [\gamma_k] = (\text{コホモロジー類 } c_k \text{ の Poincaré 双対})$, となる x_0 を基点とするループである。 $\sum_{i=1}^{n_k} (a_{i,k}, b_{i,k}) = 0$ であることから、以下を満たす X 上の 1-形式 η_k の存在とその一意性が言える。 $d\eta_k = \sum_{i=1}^{n_k} a_{i,k} \wedge b_{i,k}$ かつ任意の X 上の閉 1-形式 α に対して、 $\int_X \eta \wedge * \alpha = 0$, を満たす。 I_{x_0} は γ_k のとり方に依存しない。

Remark 1.4 Pulte [7] は、点付き調和体積 I_{x_0} と X の Jacobian $J(X)$ における algebraic cycle $X - X^-$ の intermediate Jacobian を用いて、 $\mathbb{Z}\pi_1(X, x_0)/J^3$ 上の

自然な Mixed Hodge Structure の幾何的解釈を与えた。ただし、 x_0 は基点であり、 J は群環 $\mathbb{Z}\pi_1(X, x_0)$ の augmentation ideal である。

調和体積 I は点付調和体積 I_{x_0} の制限である。自然な準同型 $p: H^{\otimes 3} \rightarrow H^{\otimes 3}$ を $p(\omega_1 \otimes \omega_2 \otimes \omega_3) = ((\omega_1, \omega_2)\omega_3, (\omega_2, \omega_3)\omega_1, (\omega_3, \omega_1)\omega_2)$ と定める。 $(H^{\otimes 3})' = \ker p \subset K \otimes H$ とおくと、これは階数 $(2g)^3 - 6g$ の自由加群になる。調和体積 I はコンパクト Riemann 面に対して、次のように定義される準同型 $(H^{\otimes 3})' \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ である。

Definition 1.5

$$I\left(\sum_i a_i \otimes b_i \otimes c_i\right) = I_{x_0}\left(\sum_i a_i \otimes b_i \otimes c_i\right) \mod \mathbb{Z}.$$

Remark 1.6 I は x_0 の取り方に依存しない。また、 $\sigma \in \mathfrak{S}_3$, $\omega_1 \otimes \omega_2 \otimes \omega_3 \in (H^{\otimes 3})'$ に対し、 $I(\omega_{\sigma(1)} \otimes \omega_{\sigma(2)} \otimes \omega_{\sigma(3)}) = \text{sgn}(\sigma)I(\omega_1 \otimes \omega_2 \otimes \omega_3)$ が成り立つ。

$\{x_i, y_i\}_{i=1, \dots, g}$ を H の symplectic 基底、つまり $(x_i, y_j) = \delta_{ij} = -(y_j, x_i)$, $(x_i, x_j) = (y_i, y_j) = 0$ を満たす H の基底とする。 $z_i = x_i$ or y_i , とおけば、以下が成り立つ。

Proposition 1.7 $\mathfrak{A}$ を下表の元からなる $(H^{\otimes 3})'$ の部分集合とするとき、 $\mathfrak{B} = \{\sigma(a); a \in \mathfrak{A}, \sigma \in A_3\}$ は $(H^{\otimes 3})'$ の $\mathbb{Z}$ 上の基底となる。

- | | | |
|------|---|--|
| (1) | $z_i \otimes z_j \otimes z_k$ | $(i \neq j, j \neq k \text{ and } k \neq i)$ |
| (2a) | $x_i \otimes y_i \otimes z_k - x_{k+1} \otimes y_{k+1} \otimes z_k$ | $(i \neq k \text{ and } i \neq k+1)$ |
| (2b) | $y_i \otimes x_i \otimes z_k - y_{k+1} \otimes x_{k+1} \otimes z_k$ | $(i \neq k \text{ and } i \neq k+1)$ |
| (3a) | $x_i \otimes x_i \otimes z_k$ | $(i \neq k)$ |
| (3b) | $y_i \otimes y_i \otimes z_k$ | $(i \neq k)$ |
| (4a) | $x_i \otimes x_i \otimes x_i$ | |
| (4b) | $y_i \otimes y_i \otimes y_i$ | |
| (5a) | $x_{i+1} \otimes x_i \otimes y_{i+1} + y_{i+1} \otimes x_i \otimes x_{i+1}$ | |
| (5b) | $y_{i+1} \otimes y_i \otimes x_{i+1} + x_{i+1} \otimes y_i \otimes y_{i+1}$ | |
| (6a) | $x_i \otimes x_i \otimes y_i - x_i \otimes x_{i+1} \otimes y_{i+1} - x_{i+1} \otimes x_i \otimes y_{i+1}$ | |
| (6b) | $y_i \otimes y_i \otimes x_i - y_i \otimes y_{i+1} \otimes x_{i+1} - y_{i+1} \otimes y_i \otimes x_{i+1}$ | |

添え字 i, j, k は $1, 2, \dots, g$ をわたり、 $\mod g$ で考える。

このうち (3), (4), (5), (6) の I の値は、0 ((3), (4), (5) のとき), $1/2$ ((6) のとき), であることが定義から直ちにわかるので、(1), (2) の場合だけを調べれば良い。

2 The harmonic volumes of hyperelliptic curves

自然な射影 $H^{\otimes 3} \rightarrow \wedge^3 H$ を用いて, 短完全列からなる可換図式

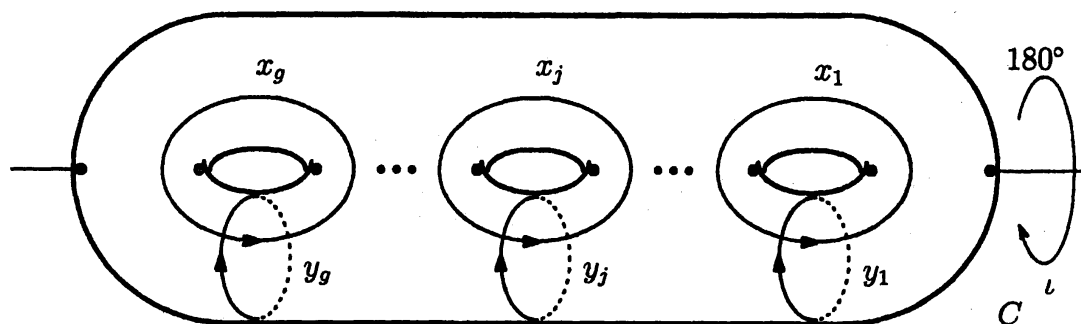
$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & (H^{\otimes 3})' & \longrightarrow & H^{\otimes 3} & \longrightarrow & H^{\otimes 3} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & P & \longrightarrow & \wedge^3 H & \longrightarrow & H \longrightarrow 0 \end{array}$$

を満たすように P を定める. ただし, $H^{\otimes 3} \ni (a, b, c) \mapsto a + b + c \in H$ である. 調和体積 $I : (H^{\otimes 3})' \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ は, $\nu = 2I : P \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ に拡張することもできる. 調和体積に興味を持つ人々はこの ν に興味を持ってきたように思われる. X の Jacobian における algebraic cycle $X - X^-$ が自明ならば, $\nu = 0$ である [5]. 一つの目標として, $\nu \neq 0$ となる X を見つけたいのだが, いまだにできていない. なお, $\mathbb{C}$ 上に拡張した調和体積を用いて, Harris は algebraic cycle $X - X^-$ が自明でない例を見つけた. 詳しくは, Section 4 を参照せよ. 一方, $\wedge^3 H$ では見えないが, $H^{\otimes 3}$ で見えるものがあるかもしれない. Harris [4] によれば, X が超楕円曲線 C のとき, $C - C^-$ が自明なので, $2I \equiv 0 \pmod{\mathbb{Z}}$, つまり, $I \equiv 0$ または $1/2 \pmod{\mathbb{Z}}$ となることが知られていた. そこで, ν では見分けられない違いを決定しようと試み, 超楕円曲線の調和体積を完全に決定した.

Theorem 2.1 任意の超楕円曲線 C に対して, $\{x_i, y_i\}_{i,j=1,\dots,g}$ を以下の図のような $H_1(C; \mathbb{Z}) = H$ の symplectic 基底とし, $z_i = x_i$, or y_i とする. このとき, 次が成立する.

$$I(z_i \otimes z_j \otimes z_k) \equiv 0 \quad \text{for } i \neq j, j \neq k \text{ and } k \neq i,$$

$$I(x_i \otimes y_i \otimes z_k - x_{k+1} \otimes y_{k+1} \otimes z_k) \equiv \begin{cases} 1/2 & \text{for } i < k, k = 2, 3, \dots, g-1 \text{ and } z_k = y_k, \\ 0 & \text{for } i \geq k+2, k = g \text{ or } z_k = x_k. \end{cases}$$



ただし, ι は C 上の超楕円対合とし, $\bullet$ は 2 重分岐被覆 $\pi : C \rightarrow \mathbb{CP}^1$ の分岐点

証明は、 I が Riemann 面の moduli 空間、正確には Torelli 空間、を正則的 (特に連続的) に変化することを利用して、超楕円曲線 C_0 , $w^2 = z^{2g+2} - 1$ のコンパクト化、の直接計算に帰着させる。

3 Topological viewpoints

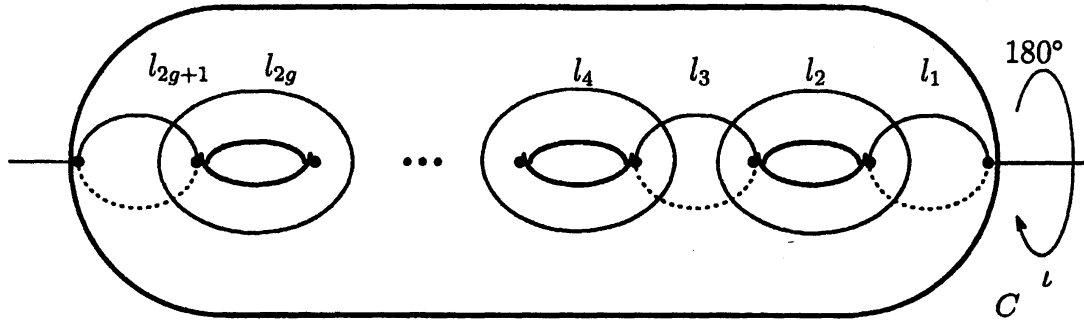
Σ_g を向き付けられた種数 g の閉曲面とする。写像類群 $\mathcal{M}_g$ は、 Σ_g の向きを保つ微分同相写像の isotopy 類、として定められる。 $\mathcal{M}_g$ は H に自然に作用する。 I は $\text{Hom}_{\mathcal{M}_g}((H^{\otimes 3})', \mathbb{R}/\mathbb{Z})$ の元だとみなすことができる。Theorem 2.1 の証明は言わば “解析的” なものであった。ここで、コンパクト Riemann 面の調和体積はどこまでホモロジー代数でとらえられるか? を考えたい。答えは、超楕円曲線ではできた (それ以外はよくわからない)。超楕円的写像類群 Δ_g を $\mathcal{M}_g$ における ι の isotopy 類の中心化群とする。

Theorem 3.1 (Birman-Hilden [1], Theorem 8) Δ_g は以下の表示を持つ。

- generators: $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{2g+1}$
- relations:
 - (1) $\sigma_n \sigma_m = \sigma_m \sigma_n, |n - m| \geq 2,$
 - (2) $\sigma_n \sigma_{n+1} \sigma_n = \sigma_{n+1} \sigma_n \sigma_{n+1}, 1 \leq n \leq 2g,$
 - (3) $\theta^{2g+2} = 1,$
 - (4) $(\theta \kappa)^2 = 1,$
 - (5) $\sigma_1(\theta \kappa) = (\theta \kappa) \sigma_1,$

ただし、 $\theta = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{2g+1}$, $\kappa = \sigma_{2g+1} \sigma_{2g} \cdots \sigma_1$ である。

Remark 3.2 $\tau_i, i = 1, 2, \dots, 2g+1$ を C 上の単純閉曲線 l_i に沿った Dehn twists とすれば、 $\tau_i = \sigma_i$ であることが知られている。



超楕円曲線 C においては, $I \in \text{Hom}_{\Delta_g}((H^{\otimes 3})', \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ とみなすことができる.

Theorem 3.3 $g \geq 3$ のとき,

$$\text{Hom}_{\Delta_g}((H^{\otimes 3})', \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

証明は Δ_g と対称群のコホモロジーの計算を頑張る. 途中経過をグッとにらむと, Theorem 2.1 が得られる.

Theorem 3.3 は次の田中淳志氏の結果の幾何的解釈の一つを与える.

Theorem 3.4 (Tanaka[8], Theorem 1.1)

$g \geq 2$ のとき,

$$H_1(\Delta_g; H) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

この定理と普遍係数定理から $H^1(\Delta_g; \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ が得られる. 短完全列

$$0 \longrightarrow (H^{\otimes 3})' \longrightarrow H^{\otimes 3} \longrightarrow H^{\otimes 3} \longrightarrow 0$$

を用いて, $H^1(\Delta_g; \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}))$ の生成元が I に由来を持つことがわかる.

4 Appendix (Iterated integrals of Fermat curves)

この節では, $\mathbb{CP}^2$ 上の非特異代数曲線, 次数 $N \geq 4$ の Fermat curve $F(N) := \{(X : Y : Z) \in \mathbb{CP}^2; X^N + Y^N = Z^N\}$ の反復積分, をまとめておく. 計算結果自体は, Proposition 4.3 以外は Tretkoff-Tretkoff [9] によるものである. $\zeta = \zeta_N = \exp(2\pi\sqrt{-1}/N)$, $\zeta_{2N} = \exp(2\pi\sqrt{-1}/2N)$ とおき, α, β を $F(N)$ 上の正則自己同型

$$\alpha(X : Y : Z) = (\zeta X : Y : Z), \quad \beta(X : Y : Z) = (X : \zeta Y : Z)$$

と定める. α, β の作用は可換であることに注意する. 正則写像

$$\pi : F(N) \ni (X : Y : Z) \mapsto (X : Z) \in \mathbb{CP}^1$$

は N 重分岐被覆で, 分岐点は $\{\alpha^i(1 : 0 : 1) \in \mathbb{CP}^1\}_{i=0,1,\dots,N-1}$ となる. $F(N)$ の種数は Riemann-Hurwitz 公式を用いて, $(N-1)(N-2)/2$ がすぐにわかる.

以下簡単のため, $x = X/Z, y = Y/Z$ として話を進める. $i = 0, 1, \dots, N-1$ に対して, $P_i = \alpha^i(1, 0), Q_i = \beta^i(0, 1)$ と定める. 単連結領域 $\Omega = \mathbb{C} \setminus \bigcup_{j=0}^{N-1} \{t\zeta^j; |t| \geq 1, t \in \mathbb{R}\}$ に対して, $\pi^{-1}(\Omega)$ は N 枚の弧状連結成分に分かれるが, Q_i を含む成分を Ω_i とおく. $F(N)$ 上の path $\gamma_0 : [0, 1] \ni t \mapsto (t, \sqrt[N]{1-t^N}) \in F(N)$ とする. ただし, $\sqrt[N]{1-t^N} \in [0, 1]$ となる分岐をとる. この path を用いて, $F(N)$ 上のループ κ_0 を

$$\gamma_0(\beta\gamma_0)^{-1}(\alpha\beta\gamma_0)(\alpha\gamma_0)^{-1}$$

と定める. ただし, path の積 $l_1 \cdot l_2$ は最初に l_1 をわたり, 次に l_2 をわたるものとする. これは Q_0 を基点とするループで,

$$Q_0 \xrightarrow{\Omega_0} P_0 \xrightarrow{\Omega_1} Q_1 \xrightarrow{\Omega_1} P_1 \xrightarrow{\Omega_0} Q_0$$

と動く.

Lemma 4.1 $\kappa \in \{\alpha^i\beta^j\kappa_0\}_{i,j=0,1,\dots,N-1}$ を $H_1(F(N); \mathbb{Z})$ の元とみなすと, 次のような交点数を得る.

$$\left\{ \begin{array}{lll} \kappa \cdot \alpha\kappa = 1 & = -\alpha\kappa \cdot \kappa \\ \kappa \cdot \beta\kappa = 1 & = -\beta\kappa \cdot \kappa \\ \kappa \cdot \alpha\beta\kappa = -1 & = -\alpha\beta\kappa \cdot \kappa \\ \kappa \cdot \alpha\beta^{-1}\kappa = 0 & = \alpha\beta^{-1}\kappa \cdot \kappa \end{array} \right.$$

Lemma 4.1 より, 具体的に $\{\alpha^i\beta^j\kappa_0\}_{i=0,1,\dots,N-3,j=0,1,\dots,N-2}$ の交点行列を具体的に書き下すことにより, 以下を得る.

Proposition 4.2 $\{\alpha^i\beta^j\kappa_0\}_{i=0,1,\dots,N-3,j=0,1,\dots,N-2}$ は $H_1(F(N); \mathbb{Z})$ の基底になる.

$\{\omega_{r,s} = x^{r-1}y^{s-1}dx/y^{N-1}\}_{r,s \geq 1, r+s \leq N-1}$ は, $F(N)$ 上の正則 1 形式全体の空間の基底となることが知られている. この 1 形式の周期は直接計算から確認することができる [3].

Proposition 4.3

$$\int_{\alpha^i\beta^j\kappa_0} \omega_{r,s} = \frac{B(r/N, s/N)}{N} (1 - \zeta^r)(1 - \zeta^s) \zeta^{ir+js}$$

ただし, $B(u, v)$ はベータ関数 $\int_0^1 t^{u-1}(1-t)^{v-1}dt$ ($u, v > 0$) である.

$R = \mathbb{Z}[\zeta]$ と定める. $\omega'_{r,s} = \frac{N}{B(r/N, s/N)}\omega_{r,s}$ とおけば,

$$\int_{\alpha^i \beta^j \kappa_0} \omega'_{r,s} = (1 - \zeta^r)(1 - \zeta^s)\zeta^{ir+js} \in R$$

が成り立つ.

Proposition 4.4 $\int_{\alpha^i \beta^j \kappa_0} \omega'_{r,s} \omega'_{l,m}$ は mod R で以下のように計算される.

$$\frac{N^2(1 - \zeta^{l+r})(1 - \zeta^{m+s})\zeta^{i(r+l)+j(s+m)}}{B(r/N, s/N)B(l/N, m/N)} \int_0^1 \left(\int_0^t \frac{t_1^{r-1} dt_1}{(1 - t_1^N)^{(N-s)/N}} \right) \frac{t^{l-1} dt}{(1 - t^N)^{(N-m)/N}}.$$

Harris [5] は, $\mathbb{C}/R$ に値をもつ拡張された調和体積と上記の計算を用いて, $X = F(4)$ のときに, $2I \neq 0 \pmod{\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]}$ を得て, $J(X)$ における algebraic cycle $X - X^-$ が自明でないことを示した.

参考文献

- [1] Birman, Joan S.; Hilden, Hugh M: *On the mapping class groups of closed surfaces as covering spaces*. Advances in the theory of Riemann surfaces (Proc. Conf., Stony Brook, N.Y., 1969), pp. 81–115. Ann. of Math. Studies, No. 66.
- [2] Chen, Kuo Tsai: *Iterated integrals, fundamental groups and covering spaces*. Trans. Amer. Math. Soc. 206 (1975), 83–98.
- [3] Gross, Benedict H.; Rohrlich, David E.: *Some results on the Mordell-Weil group of the Jacobian of the Fermat curve*. Invent. Math. 44 (1978), no. 3, 201–224.
- [4] Harris, Bruno: *Harmonic volumes*. Acta Math. 150 (1983), no. 1-2, 91–123.
- [5] Harris, Bruno: *Homological versus algebraic equivalence in a Jacobian*. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 80 (1983), no. 4 i., 1157–1158.
- [6] Tadokoro, Yuki: *Harmonic volumes and iterated integrals of hyperelliptic curves*. Preprint.

- [7] Pulte, Michael J.: *The fundamental group of a Riemann surface: mixed Hodge structures and algebraic cycles*. Duke Math. J. 57 (1988), no. 3, 721–760.
- [8] Tanaka, Atsushi: *The first homology group of the hyperelliptic mapping class group with twisted coefficients*. Topology Appl. 115 (2001), no. 1, 19–42.
- [9] Tretkoff, C. L.; Tretkoff, M. D.: *Combinatorial group theory, Riemann surfaces and differential equations*. Contributions to group theory, 467–519, Contemp. Math., 33, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1984.