

Algebraic independence of values of gap series

奈良女子大 理 西岡久美子(Kumiko Nishioka)

代数的数を係数に持つ巾級数 $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{e_k}$ ($0 \leq e_0 < e_1 < \dots$, $a_k \neq 0$) の代数的数における値の代数的独立性について考える。

$$S_k = [Q(a_0, a_1, \dots, a_k) : Q]$$

$$A_k = \max \{1, |a_0|, \dots, |a_k|\}$$

$$M_k = \min \{d \in \mathbb{N} \mid da_0, \dots, da_k \text{ は代数的整数}\}$$

とおく。ここで代数的数 α に対し $|\alpha|$ とは α のすべての共役の絶対値の最大値である。以下では

$$(*) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} S_k(e_k + \log A_k M_k)/e_{k+1} = 0$$

と仮定する。 $f(z)$ の収束半径を $R > 0$ とする。 $f(z)$ の代数的数における値の超越性、代数的独立性に関していくつかの結果が得られている。

Cijsouw and Tijdeman(1973) は代数的数 α ($0 < |\alpha| < R$) に対し $f(\alpha)$ は超越数であることを示した。Bundschuh and Wylegala(1980) は代数的数 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ($0 < |\alpha_i| < R$) の絶対値が相異なれば $f(\alpha_1), \dots, f(\alpha_n)$ は代数的独立であることを証明した。後者の証明は

$$f(\alpha_i) = \sum_{k=0}^{m-1} a_k z^{e_k} \sim a_m \alpha_i^{e_m} \quad (m \rightarrow \infty)$$

となることから、 $f(\alpha_1), \dots, f(\alpha_n)$ の収束の速さが相異なることに基づいている。この方法では α_i 達の絶対値が等しい場合を扱うことができない。私は最近証明された Evertse(1984) の定理を使って a_k ($k = 0, 1,$

...) がすべて1つの代数体 K に含まれているときに、これら $f(\alpha_i)$ 達の代数的独立性のための必要十分条件をみつけることができた([10])。

[定理1] K を代数体とする。 $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{e_k}$ ($0 \leq e_0 < e_1 < \dots$, $a_k \in K^*$) は(*)をみたし、その収束半径は $R(>0)$ であるとする。代数的数 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ($0 < |\alpha_i| < R$) に対し、次の3つの性質は同値である。

- (i) $f(\alpha_1), \dots, f(\alpha_n)$ は代数的従属である。
- (ii) $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ の空でない部分集合 $\{\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_s}\}$ と代数的数 r 、1の巾根 $\zeta_{i_1}, \dots, \zeta_{i_s}$ 、0 でない代数的数 $d_1, \dots, d_s$ があって

$$\alpha_{i_j} = \zeta_{i_j} r, \quad \sum_{j=1}^s d_j \zeta_{i_j}^{e_k} = 0$$

が十分大きなすべての自然数 k について成り立つ。

- (iii) $1, f(\alpha_1), \dots, f(\alpha_n)$ は $\mathbb{Q}$ 上1次従属である。

例1 $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} z^{k!}$ とする。代数的数 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ($0 < |\alpha_i| < 1$) に対して、 $f(\alpha_1), \dots, f(\alpha_n)$ が代数的独立であるための必要十分条件は任意の α_i/α_j ($i \neq j$) が1の巾根でないことである。

例2 $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} z^{k!+k}$ とする。代数的数 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ($0 < |\alpha_i| < 1$) が相異なれば $f(\alpha_1), \dots, f(\alpha_n)$ は代数的独立である。

次に我々は巾級数 $f_w(z) = \sum_{k=1}^{\infty} [kw]z^k$ (w は実無理数) の特殊値の代数的独立性について考える。Mahler(1929) は w が2次無理数の時、代数

的数 α ($0 < |\alpha| < R$) に対し $f_w(\alpha)$ は超越数であることを示した。

Loxton and van der Poorten(1977) は Mahler の方法を一般化して、 w が任意の無理数の時、代数的数 α ($0 < |\alpha| < R$) に対し $f_w(\alpha)$ は超越数であることを示した。 w の連分数展開を $[a_0; a_1, a_2, \dots]$ とする。代数的独立性については Masser(1982) が $\{a_k\}_{k=0,1,\dots}$ が有界の時、代数的数 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ($0 < |\alpha_i| < 1$) が相異なれば $f_w(\alpha_1), \dots, f_w(\alpha_n)$ は代数的独立であることを証明無しで報告している。しかし残念ながら証明はまだ公表されていない。我々は $\{a_k\}_{k=0,1,\dots}$ が有界でない場合を考える。Evertse(1984) の定理を使って次の定理を得ることができた([11])。

[定理 2] w の連分数展開を $[a_0; a_1, a_2, \dots]$ とし、単調増加自然数列 $\{k_r\}_{r=0,1,\dots}$ と自然数 m で

$$\lim_{r \rightarrow \infty} a_{k_r} = \lim_{r \rightarrow \infty} a_{k_r - m} = \infty$$

をみたすものが存在すると仮定する。このとき、代数的数 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ($0 < |\alpha_i| < 1$) が相異なれば $f_w(\alpha_1), \dots, f_w(\alpha_n)$ は代数的独立である。

例 3 $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \infty$ なら w は定理 2 の条件をみたす。

例 4 $e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, \dots]$ だから e は定理の条件をみたす。

$\{a_k\}_{k=0,1,\dots}$ が有界でないという条件だけの下に、代数的独立性の必要十分条件を求めることはまだできていない。しかし次の定理が証明される([11])。

[定理 3] w の連分数展開を $[a_0; a_1, a_2, \dots]$ とし、 $\{a_k\}_{k=0,1,\dots}$ が有界でないとする。代数的数 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ($0 < |\alpha_i| < 1$) に対して、任意

の α_i/α_j ($i \neq j$) が 1 の巾根でないなら、 $f(\alpha_1), \dots, f(\alpha_n)$ は代数的独立である。

参考文献

- [1] P. Bundschuh: A criterion for algebraic independence with some applications. to appear.
- [2] P. Bundschuh and F.-J. Wylegala: Über algebraische Unabhängigkeit bei gewissen nichtfortsetzbaren Potenzreihen. Arch. Math. 34(1980) 32-36.
- [3] P.L. Cijsouw and R. Tijdeman: On the transcendence of certain power series of algebraic numbers. Acta Arith. 23(1973) 301-305.
- [4] J.-H. Evertse: On sums of S-units and linear recurrences. Compositio Math. 53(1984) 225-244.
- [5] Y. Flicker: Algebraic independence by a method of Mahler. J. Austral. Soc.(Ser. A)27(1979) 173-188.
- [6] J.H. Loxton and A.J. van der Poorten: Arithmetic properties of certain functions in several variables III. Bull. Austral. Math. Soc. 16(1977) 15-47.
- [7] K. Mahler: Arithmetische eigenschaften der Lösungen Einer klasse von functionalgleichungen. Math. Ann. 101(1929) 342-366.

- [8] D.W. Masser: A vanishing theorem for power series. *Inven. math.* 67(1982) 275-296.
- [9] K. Nishioka: Proof of Masser's conjecture on the algebraic independence of values of Liouville series. *Proc. Japan. Acad. Ser. A* 62(1986) 219-222.
- [10] K. Nishioka: Conditions for algebraic independence of certain power series of algebraic numbers. *Compositio math.* 62(1987) 53-61.
- [11] K. Nishioka: Evertse theorem in algebraic independence. to appear.