

Varieties which have two projective bundle structures

九州大教養 佐藤栄一

基礎体 k は代数的閉体とする。 M と $M_i (i=1,2)$ は k 上代数多様体とし、 $p: M \rightarrow M_1$ と $q: M \rightarrow M_2 \in$ proper surjective morphism であって、その closed fiber of p (又 q) $\in P^r$ (又 P^s) と同型とする。

定義: M が two projective bundle structures $(M_1, P^r, p; M_2, P^s, q) \in$ もつ $\iff$ 上記の M_1, M_2 と morphism p, q があって $\dim \Phi(M) > \max \{ \dim M_1, \dim M_2 \}$ である。(Φ は p, q が誘導される morphism $M \rightarrow M_1 \times M_2$ である。)

この下の記号の下に2つの定理を示す。

定理 A M は非特異射影多様体で上記の束構造 $(P^r, P^r, p; P^m, P^s, q) \in$ もつとする。その時、

- a) $l=s$ かつ $m=r$ で $M \cong P^l \times P^m$ 又は
- b) $l=m=r+1=s+1$ で $M \cong P(T_{P^r})$ (T_{P^r} は P^r 上接束)

のいずれかである。

定理 B M は $\text{char } k = 0$ の非特異射影 3-fold とする。 M は上記の束構造をもち、 $M_1, M_2 \in$ 非特異曲面とする。その時

- a) $M \cong M_1 \times_C M_2$ (C は非特異完備代数曲線で、 M_i は C 上 P^1 -bundle)

- b) $M \cong P(T_{P^2})$ で $M_i \cong P^2$.

のいずれかが成立。

まず定理 A の証明をする。

Lemma 1 $M, S \in$ 非特異射影多様体で morphism $p: M \rightarrow S$ の closed fiber は P^r に同型とする。その時 p は étale top で P^r -bundle である。さらに S が 1) $\dim S = 1$ 又は 2) 有理曲面 又は 3) 射影空間なら、 p は Zariski top で P^r -bundle であり S 上階数 $(r+1)$ のベクトル束 E の $P(E)$ から induce される。

[5] の定理 0.1, [6] の lemma 1.2 を要す。

上記の 2 つの束構造の定義の優劣の是非について

Lemma 2, M, M_1, M_2 は上記のものとする。この時、次は同値である。

- 1) $\dim \mathfrak{I}(M) = \max \{ \dim M_1, \dim M_2 \}$
- 2) $\dim \mathfrak{I}(M) = \dim M_1 = \dim M_2$
- 3) $p = q$ なる同型 $\phi: M_1 \xrightarrow{\sim} M_2$ が存在。

上の 2 つの lemma より Th A を示すために、次のように考えることができる。

$E_1 \in P^l$ 上の rank $(r+1)$ のベクトル束, $E_2 \in P^m$ 上の $(s+1)$ のベクトル束とし, $p, q \in P(E_1) \rightarrow P^l, P(E_2) \rightarrow P^m$ の canonical 射影とし, M は $P(E_1)$ と $P(E_2)$ に同型とし, $\dim \mathfrak{I}(M) > \max(l, m)$ とする。そして Chern class から M についての情報を得る。

[記号]

$$\xi = \mathcal{O}_{P(E_1)}(1), \quad \eta = \mathcal{O}_{P(E_2)}(1), \quad h = p^* \mathcal{O}_{P^l}(1), \quad \kappa = q^* \mathcal{O}_{P^m}(1).$$

$$Pic M \subseteq \mathbb{Z}\xi + \mathbb{Z}h \subseteq \mathbb{Z}\eta + \mathbb{Z}\kappa \text{ より}$$

$$(3) \quad \eta = a\xi + bh, \quad \kappa = \bar{a}\xi + \bar{b}h \text{ で } a, \bar{a}, b, \bar{b} \text{ は整数.}$$

Lemma 4, $\bar{a} > 0, \quad \bar{a}b - a\bar{b} = 1$

(2) $f_p \in p$ の fiber ($\simeq P^1$) とする。 $(\kappa \cdot f_p \cdot \xi^{r-1}) = \bar{a}(\xi^r \cdot f_p) + \bar{b}(h \cdot f_p \cdot \xi^{r-1})$ より、仮定は $\bar{a} > 0$ を要す。一方 $\xi = c\eta + d\kappa, h = \bar{c}\eta + \bar{d}\kappa$ ($c, \bar{c}, d, \bar{d} \in \mathbb{Z}$) とする時 $\begin{pmatrix} a & b \\ \bar{a} & \bar{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ \bar{c} & \bar{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ と $\bar{c} > 0$ を得る。これより $\bar{a}b - a\bar{b} = 1$ を得る。 q.e.d.

$A^r(S)$ = group of cycles of codim r on a non-singular variety S
modulo rational equivalence

$$A(S) = \bigoplus_{r=0}^{\dim S} A^r(S)$$

E を非特異多様体 Z 上 $\text{rank } r$ のベクトル束とし, $\sigma \in E$ の tautological line bundle とし $c_i(E)$ は E の i -次 Chern class とする。この時よく知られた次の定理がある。

定理 5. 上の記号の下で $f: P(E) \rightarrow Z$ は canonical 射影とする。この時 f^* によって $A(P(E))$ は $1, \sigma, \dots, \sigma^{r-1}$ を基とする $A(Z)$ 上の自由加群になり, 次の等式が成立。

$$\sum_{i=0}^r (-1)^i f^* c_i(E) \sigma^{r-i} = 0 \quad \text{in } A^r(P(E)).$$

上の定理より, M の Chow ring E_1, E_2 の Chern 類を使って調べる。 $c_i(E_1) = c_i h^i$, $d_j(E_2) = d_j k^j$ (c_i, d_j は整数, $1 \leq i \leq \min(l, r+1) = e$, $1 \leq j \leq \min(m, s+1) = f$), 次のような Z 上 graded な finite algebra の同型を考える。

$$(6) \quad \begin{aligned} & Z[X, Y] / (Y^{e+1}, X^{r+1} - c_1 X^r Y + c_2 X^{r-1} Y^2 - \dots + (-1)^e c_e X^{r+1-e} Y^e) \\ & \cong Z[U, V] / (V^{m+1}, U^{s+1} - d_1 U^s V + \dots + (-1)^f d_f U^{s+1-f} V^f) \end{aligned}$$

さらに次の条件を付く。

$U = aX + bY$, $V = \bar{a}X + \bar{b}Y$, $\bar{a} > 0$, $\bar{a}b - a\bar{b} = 1$, U, V, X, Y は不定元。

1) 後 $f(X, Y) = \sum_{i=0}^e c_i X^{r+1-i} Y^i$ ($c_0 = 1$), $g(U, V) = \sum_{j=0}^f d_j U^{s+1-j} V^j$ ($d_0 = 1$)
 $I = (Y^{e+1}, f(X, Y))$, $J = (V^{m+1}, g(U, V))$ とおく。

(7) $l \geq m$ と仮定。

(6) について I, J の minimal generator に関する議論より l, m, r, s は次のような関係をもつ。

(8, a) $l < r, l = m, r = s$

(8, b) $l = r = m = s$

(8, c) $l > r, l = s, m = r$

(8, d) $l > r, l = m, r = s$

以後 $\bar{a} = 1$ を求めることが重要であるが、その前に一つの lemma を述べる。

Lemma 9. 定理 A の条件の下で $\bar{a} = 1$ を仮定する

その時 (8, b) (8, c) の場合 $\pi: M \rightarrow P^l \times P^m$ は同型である。
 ○ (8, d) の場合は $l=r+1$ の仮定を加えると, π は closed immersion で, $\pi(M)$ は $P(T_P)$ に同型になる。

略証) (8, b), (8, c) は π は finite birational morphism であることより同型になる。後半も π は $M \rightarrow \pi(M) (\subseteq P^l \times P^l)$ は finite birational morphism。一方 $\pi(M)$ は $P^l \times P^l (x_0, \dots, x_l, y_0, \dots, y_l)$ を同次座標系にあく) において $f(x_0, \dots, x_l, y_0, \dots, y_l) = 0$ で定義される (f は $(x), (y)$ に関する, 同次多項式)。 $\bar{a}=1$ なる仮定より, f は $(x), (y)$ に関する, 次数が 1 をえる, ($\bar{a}=1$ in lemma 4)。これより $(x), (y)$ についての線型変換をすることにより又, P, Q の各 fiber ($\subseteq P^{l-1}$) は 底空間 (P^l) の超平面であることに注意すると $\pi(M)$ は $\sum_{i=0}^l x_i y_i = 0$ で表わされる。
 q.e.d

上の lemma 9 より Th. A を示すには, 次を示せばよい。

1) $\bar{a} = 1$.

2) $\bar{a} = 1$ かつ (8, d) $\Rightarrow m = r+1$.

まず 1) を示す

(8, a) が起り得ないことは明らか, $P^r \rightarrow P^m$ ($r > m$) の morphism は定数写像しかないことが理由。

(8, b) (6) より $(\bar{a}x + \bar{b}y)^{l+1} = Af(x, y) + By^{l+1}$ (A, B 整数)

故に $A = \bar{a}^{l+1}$, $B = \bar{b}^{l+1}$, $f(x, y) = (x + \bar{b}y/\bar{a})^{l+1} - (\bar{b}y/\bar{a})^{l+1}$.
 $x^l y$ の係数は $(l+1)\bar{b}^l/\bar{a}^l$. 一方 $\bar{a}\bar{b} - \bar{a}\bar{b} = 1$ より $\bar{a}, \bar{b}$ は互いに素。

故に $\bar{a}^l | l+1$ より $\bar{a} = 1$.

(8, c) $(\bar{a}x + \bar{b}y)^{r+1} = Af(x, y)$ ($A \in \mathbb{Z}$). 故に $(x + \bar{b}y/\bar{a})^{r+1} \in \mathbb{Z}[x, y]$

$\bar{b} = 0$ なら $\bar{a}\bar{b} - \bar{a}\bar{b} = 1$ より $\bar{a}\bar{b} = 1$ $\therefore \bar{a} > 0$ より $\bar{a} = 1$

$\bar{b} \neq 0$ なら $(\bar{a}, \bar{b}) = 1$ より $\bar{a} = 1$.

(8. d) については次が重要

定理 9 ϕ を原始の乗根とする。 A を $\mathbb{Q}(\phi)$ の整数環とする。

その時 $A = \bigoplus_{(i,n)=1} \mathbb{Z}\sigma^i$ ($i=0$ は含ま)

[4] の定理 4 を見よ。

系 10. $\Phi_n(x)$ ($n \geq 3$) を円周等分多項式, α, β を整数とする

。 $\alpha \Phi_n(x)$ が $\Phi_n(\alpha x + \beta)$ を $\mathbb{Z}[x]$ で割ると仮定する。($\Phi_n(x)$ は n の Euler 数) その時 $\alpha = \pm 1$ である。

(6) より 次の等式を得る。

$$(11.1) \quad V^{m+1} = AV^{m+1} + f(x, y) \bar{f}(x, y)$$

$$(11.2) \quad Y^{m+1} = BY^{m+1} + g(u, v) \bar{g}(u, v)$$

$$\bar{f}, \bar{g} \in \mathbb{Z}[x, y] \quad \bar{g} \in \mathbb{Z}[u, v] \quad A, B \text{ 整数} \quad \deg \bar{f} = \deg \bar{g} \geq 1$$

Step I $A = B = 1$ の場合

(証) (11.1) $\times B$ + (11.2) より

$$Y^{m+1} = ABY^{m+1} + Bf\bar{f} + g\bar{g}.$$

一方 $\deg f = \deg g$ より $g(u, v) \in x, y$ で書き表わすと,

$$g(u, v) = g(ax+by, \bar{a}x+\bar{b}y) = g(a, \bar{a}) f(x, y).$$

$$\text{故に } Y^{m+1}(1-AB) = f(x, y) \cdot (B\bar{f}(x, y) + g(a, \bar{a})\bar{g}(ax+by, \bar{a}x+\bar{b}y))$$

より $AB = 1$ である。

q. e. d

$\bar{a} = 1$ を得るために 次の 2 つ の場合に分ける。

(12.1) m が奇数 かつ $v=1$

(12.2) 上記以外

(12.2) の時を先に調べる。

Step II (12.2) の時 $\bar{a} = 1$

(証) $A=1$ とする。(11.1) において $V = \bar{a}x + \bar{b}y$ とし, $y=1$ とおく。

$$(\bar{a}x + \bar{b})^{m+1} - 1 = f(x, 1) \bar{f}(x, 1). \quad \text{この両辺は } \mathbb{Z}[x] \text{ において}$$

素因数分解する。右辺は $\Phi_n(\bar{a}x + \bar{b})$ の積に分解する。

(但し $f_v(x)$ は 円周等分多項式). $\Phi_u(\bar{a}x + \bar{b})$ は $\mathbb{Q}[X]$ で既約元であることに注意する. その時 左辺の因数 $\Phi_u(\bar{a}x + \bar{b})$ と $f_v(x)$ の因数 $f_v(x)$ があって $\deg \Phi_u(\bar{a}x + \bar{b}) = \deg f_v(x) \geq 2$ である. さらに $\Phi_u(\bar{a}x + \bar{b}) = \bar{a}^{\phi(u)} f_v(x) \in \mathbb{Z}$ である. その故, 系 10 より, $\bar{a} = 1$ を得る. $A = -1$ の時も上と同じ議論で示される. q.e.d.

次に上の (1) $\bar{a} = 1$ から (8. d) $\Rightarrow l = r + 1$ を示す.

この証明のためには sheaf 理論, 特に Chern 類を使う.

まず次の M 上の完全列を考える.

$$(13)_p \quad 0 \rightarrow T_p \xrightarrow{i_p} T_M \xrightarrow{j_p} p^* T_{p^M} \rightarrow 0$$

$$(13)_q \quad 0 \rightarrow T_q \xrightarrow{i_q} T_M \xrightarrow{j_q} q^* T_{p^M} \rightarrow 0$$

T_M は M の接束, T_p は p に関する相対接束.

この完全列をそれぞれ p の fiber に制限すると次を得る.

Lemma 14.

$$0 \rightarrow T_p \xrightarrow{i_p} T_M|_p \rightarrow \mathcal{O}_p^{\oplus m} \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow T_q|_p \xrightarrow{i_q} T_M|_p \xrightarrow{j_q} T_p \oplus \mathcal{O}_p^{(1)}^{\oplus m-r} \rightarrow 0.$$

さらに上の完全列は split する.

註) $p^u \in p^v$ の linear subspace とする. その時 $T_{p^u}|_{p^u} = T_{p^u} \oplus \mathcal{O}(1)^{\oplus v-u}$.

又 $H^1(p^v, T_{p^v}) = 0$ より Lemma は明らか.

q.e.d.

Lemma 15 合成写像 $i_p \circ j_p$ は bundle map として injective.

その故 $i_p \circ j_p: T_p \rightarrow q^* T_{p^M}$ は bundle map として injective.

同様に $i_q \circ j_q: T_q \rightarrow p^* T_{p^M}$ も injective.

証明) $\text{Hom}(T_p, T_p) \cong k$ と $\text{Hom}(T_p, \mathcal{O}(1)) = 0$ より明らか.

Lemma 15 より次の M 上の完全列を考える.

$$0 \rightarrow T_p \oplus T_q \xrightarrow{(i, j)} T_M \rightarrow A \rightarrow 0.$$

A は $q^* T_{p^M} / i_j(T_p)$, $p^* T_{p^M} / i_p(T_q)$ に同型であることを注意.

これより A についての次の系を考える.

系 16. p の fiber ($= f_p$) に対して $A|_{f_p} \cong \mathcal{O}_{p^r(1)}^{\oplus m-r}$. 同様
に q の fiber ($= f_q$) に対し, $A|_{f_q} \cong \mathcal{O}_{p^r(1)}^{\oplus m-r}$. したがって A は
 $q^* \mathcal{O}_{p^m(1)} \otimes p^* A_p$ と $p^* \mathcal{O}_{p^m(1)} \otimes q^* A_q$ に同型である (A_p と A_q は P^m
上の階数 $m-r$ のベクトル束である.)

略証) base change Theorem よりわかる.

次の 2 つの case における

$$(17.1) \quad m > 2r$$

$$(17.2) \quad m \leq 2r$$

さらに次の完全列を考える。

$$(18)_p \quad 0 \rightarrow \mathcal{E} \otimes T_p \xrightarrow{\gamma} p^* E_1 \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow 0$$

$$(18)_q \quad 0 \rightarrow \mathcal{G} \otimes T_q \xrightarrow{\eta} q^* E_2 \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow 0$$

さらに E_1, E_2 について次のような設定をおく。

仮定, $E_1 = p_* q^* K$, $E_2 = q_* p^* h$ (つまり $\bar{a} = b = 1$, $a = \bar{b} = 0$)

これは $\bar{a} = 1$, $\bar{c} = 1$ よりこれが可能である。

$$\text{Lemma 19.} \quad c_1(E_1) = (m-r)h \quad c_1(E_2) = (m-r)K$$

Claim (17.1) は起りえない。

略証) $f(x, 1) (= x^{m+1} - c_1 x^r + \dots)$ は $x^{m+1} - 1$ の約数。故に

$|c_1| \leq r$ 。一方 lemma 19 より $c_1 = m-r > r$ 。矛盾

次は (17.2) について考える。次の完全列について既にしって

$$0 \rightarrow T_p \rightarrow q^* T_{p^m} \rightarrow A \rightarrow 0.$$

これに $q^* \mathcal{O}_{p^m(1)} \in \text{Tensor}$ する。一方 $T_{p^m(1)}$ は $(m+1)$ 個の
section で生成される。したがって

$$0 \rightarrow (\text{subbundle} = B) \rightarrow \bigoplus^{m+1} \mathcal{O}_M \rightarrow p^* A_p \rightarrow 0 \text{ となる。}$$

この列に対して $R^* p_* \mathcal{E}$ とすることにより

$$0 \rightarrow p_* B \rightarrow \bigoplus^{m+1} \mathcal{O}_{p^m} \rightarrow A_p \rightarrow 0 \text{ となる。}$$

系 16, $m \leq 2r$ より $c(A_p) = m-r C_i$ ($1 \leq i \leq m-r$).

故に $c(\bigoplus_{p \in m} \mathcal{O}_{p,m}) = c(p \times B) c(A_p)$ より $m-r=1$.

これより次を得る。

Lemma 20. $\bar{a} = 1$ か $(8, d) \Rightarrow n = r+1$.

Th A の証明を完結するためには, (12.1) の case が起りえないことを示す必要がある。それは (13)_p, (13)_q, (18)_p, (18)_q を利用したと容易に矛盾が出る。これ故 Th A が示された。 q.e.d

次に Th B の略証を述べる。

Lemma 21 Y, Z が非特異射影曲面とし, $f: Y \rightarrow Z$ は surjective morphism, Y は geometrically ruled surface (以後 g.r.s と略記する) とする。その時, Z は, g.r.s または P^2 である。

証明は容易

Lemma 22. Th B の条件の下で, M_1, M_2 は g.r.s または P^2 。

次に $M_2 \in \text{g.r.s}$ と仮定する。その時 $\bar{q}: M_2 \rightarrow C$ は canonical 射影とする。C の点 λ の fiber $\in \ell_\lambda (= \bar{q}^{-1}(\lambda) \triangle P')$ とせよ。

注意: $\bar{q}^{-1}\ell_\lambda \rightarrow M_1$ は surjective な点 λ があれば, C のすべての点 μ に対し, $p: \bar{q}^{-1}\ell_\mu \rightarrow M_1$ は surjective.

それ故, 2つの case に分けて考える

(23.A) $\forall \lambda \in C \Rightarrow p(\bar{q}^{-1}\ell_\lambda) : \text{curve}$

(23.B) $\forall \lambda \in C \Rightarrow p(\bar{q}^{-1}\ell_\lambda) = M_1$

Lemma 24 (23.A) の場合, M は $M_1 \times_C M_2$ に同型である。且し M_i ($i=1,2$) は C 上 ruled 曲面である。

この Lemma を示すために次を利用すれば容易に示せる。

Proposition 25 $\phi: F_n = \text{Proj}(\mathcal{O}_P \oplus \mathcal{O}_P(n))$ ($\phi: F_n \rightarrow P'$) とせよ。C は F_n 上既約曲線で, $\phi: C \rightarrow P'$ は finite map で, $C^2 = 0$ とせ

よ。その時 $m=0$ かつ C は ϕ の section である。

Lemma 26, $(23, B)$ の場合 M は $M_1 \times C$ に同型である。但し M_1 は有理 g.r.s であり, C は g.r.s M_2 の base curve P^1 である。

M_2 が P^2 の場合は, 同時に M_1 も P^2 になり Th A よりわかる。故に Th B の証明は完了する。

引用文献

- 1) Artin, M and Mumford, D, Some elementary examples of unirational varieties which are not rational, Proc. London Math Soc, 25 (1972) 75-95
- 2) Grothendieck, A. La theorie des classes de Chern, Soc. Math de France 86 (1958), 137-154
- 3) ———, Le groupe de Brauer I. Seminaire Bourbaki, Expose 290 (1965)
- 4) Lang, S., Algebraic number theory, Addison-Wesley. Reading, 1970
- 5) Maruyama, M., On classification of ruled surfaces 紀国屋書店
- 6) ———, On a family of algebraic vector bundles, Number Theory, Algebraic Geometry and Commutative algebra, in honor of Akizuki, 紀国屋書店 (1973)
- 7) Milne, J. Étale cohomology, Princeton University Press, Princeton.