

δ -polynomial of decomposable links

大阪工大 渋谷哲夫 (Tetsuo Shibuya)

R^3 中の tame な oriented link l には R^3 で orientable surface F で $\partial F = l$ になるものがある。そこでこのような surface のうちで connected component の数の最大数を $\nu(l)$ で表す。 l が decomposable とは $\nu(l) \geq 2$ のときを言う。

つぎに link の ∇ -polynomial ([2]) を定義する。link l に対して connected orientable surface F で $\partial F = l$ になるものから Seifert matrix S が定義される ([5])。この S をつかい、 l の ∇ -polynomial, $\nabla_l(t)$ で表す、を

$$\nabla_l(t) = (t-1)^{-\mu+1} |S - tS'|$$

で定義する、ここで μ は l の component の数で S' は S の転置行列。しかし l が decomposable のとき、すなわち $\nu(l) = n \geq 2$ とすると l の Seifert matrix S は最後の $n-1$ 行と $n-1$ 列の成分がすべて 0 になることがわかり、常に $\nabla_l(t) = 0$ になる。そこで $\nu(l) = n \geq 2$ のとき、この最後の $n-1$ 行と $n-1$ 列をとりのぞいた行列を W として、

$$\delta_l(t) = (t-1)^{-\mu+n} |\mathbb{W} - t\mathbb{W}'|$$

と定義し、これを l の δ -polynomial と言う。また $v(l)=1$ のときは、 $\delta_l(t) = \nabla_l(t)$ と考える。したがって δ_l と ∇_l は $v(l) \geq 2$ で 違い がでる。たとえば、 $l=3, \circ 4$, ($\circ$ は split を意味する) とすると、 $\nabla_l(t) = 0$ だが、 $\delta_l(t) = \Delta_{3,1}(t) \Delta_{4,1}(t)$ になる。

上で述べたように l が decomposable ならば、 $\nabla_l(t) = 0$ であるが、この逆が成立するかというのが [4] における予想であるが答は No. である。たとえば次ぎのような 3-component link $l = k_1 \cup k_2 \cup k_3$ を考えればよい。この Seifert

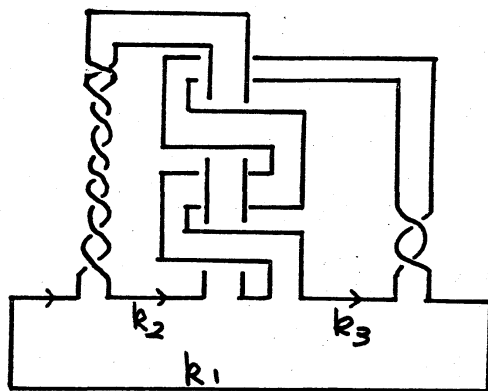


図 1

matrix S をつくと、

$$S = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

だから、 $\nabla_l(t) = (t-1)^{-2} |S - tS'| = 0$. しかしながら l は

decomposable でない。なぜなら l が decomposable ならば、ある $i (=1, 2, 3)$ に対して $\text{Link}(k_i, l - k_i) = 0$ でなければならないが、どの i に対しても上の linking number は 0 にならない。

つぎに decomposable link に対して simple fusion というものを定義する。

いま l を μ -component link として $B = B_1 \cup \dots \cup B_n$ を互いに交わらない disks で $l \cap B_i = l \cap \partial B_i = 2$ 本の arcs

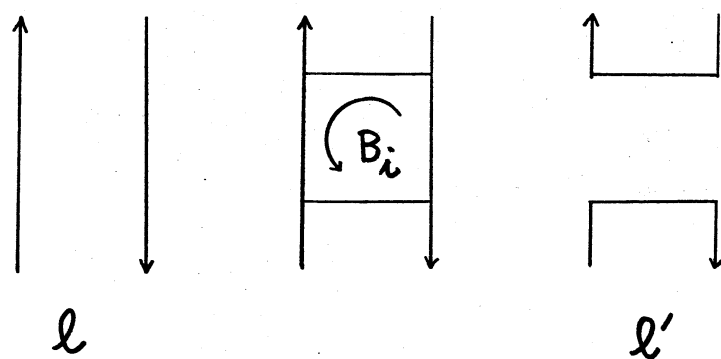


図 2

となる B を考えたとき、 $l' = l + \partial B$ の component の数が $\mu - n$ のとき、 l' は l の fusion で得られるといい、 B を l の fusion を与える bands という。

特に l が decomposable のとき、orientable surface $F = F_0 \cup \dots \cup F_m$ で $\partial F = l$, $\partial F_i \cap l \neq \emptyset$ があるが、 l の fusion を与える bands $B = B_1 \cup \dots \cup B_m$ が $\forall s = 0, \dots, m$ に対して $l_s \cap B \neq \emptyset$ のとき、 $l' = l + \partial B$ を l の simple

fusion で得られる link といふ, ここで $l_i = 2Fi$ 。

l が decomposable のとき, l に張る surface は一意ではないし, B のとり方も一意ではなく, したがって l' は link type として一意には決まらない。しかし δ -polynomial に関してはずの定理が成立する([6])。

定理 l が decomposable link で l' を l の simple fusion で得られる link で $\nu(l')=1$ とする。そのとき,

$$\delta_{l'}(t) = f(t)f(t^{-1})\delta_l(t)$$

と書ける, ここで $f(t)$ はある integral polynomial で $f(1)=\pm 1$ を満たすものである。

証明 l を μ -component link とし $\nu(l)=n$ とする。すると l の Seifert matrix S は F の形になる:

$$S = \begin{pmatrix} W & \overset{n-1}{0} \\ \underset{n-1}{0} & 0 \end{pmatrix}.$$

したがって定義より, $\delta_l(t) = (t-1)^{-\mu+n} |W - tW'|$.
また l の simple fusion を与える $(n-1)$ 個の bands と l が張る surface との交わりは ribbon type のみとしてよ

11. この各 ribbon type の交わりの個所で図3のような orientation preserving cut を行う。各 orientation

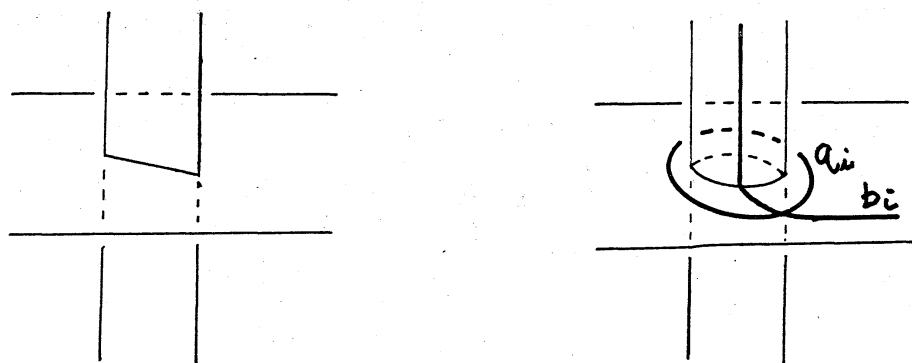


図3

preserving cut を行うと genus が 1 つづつ 増えて、 ℓ' に non-singular orientable surface F が張れる。 F から Seifert matrix $\bar{S}$ をつくと F のようになる:

$$\bar{S} = \begin{matrix} & \begin{matrix} a_i & b_i \end{matrix} \\ \begin{matrix} a_i \\ b_i \end{matrix} & \begin{pmatrix} W & 0 & U_4 \\ 0 & 0 & U_2 \\ U_3 & U_1 & U \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

$\nu(\ell') = 1$ で ℓ' の component の数は $\mu - n + 1$ だから、

$$\begin{aligned} \delta_{\ell'}(t) &= (t-1)^{-\mu+n-1+1} |\bar{S} - t\bar{S}'| \\ &= (t-1)^{-\mu+n} |W - tW'| |U_1 - tU_2'| |U_2 - tU_1'| \\ &= f(t)f(t^{-1})\delta_{\ell}(t). \end{aligned}$$

∴ $f(t) = |U_1 - tU_2'|$ である。また $a_i \cap b_i = -1$, $a_i \cap b_j = \phi(i \neq j)$ にとれるから $f(1) = \pm 1$ になる。

これを使うとつぎの系を得る。

系 l が slice link in the weak sense であり、
 も boundary link ならば、 $\delta_l(t) = f(t)f(t^{-1})$ と書ける。
 ここで $f(t)$ は integral polynomial で $f(1) = \pm 1$ を満たす
 ものとする。

証明 l が slice link in the weak sense だから、
 $l \subset R^3[0]$ に対して R^4 の上半空間 R_+^4 で locally flat
 な genus 0 の surface F が張れる。 F の minimal
 point, saddle point を図4(a) から (b) のように変形
 する。この変形で得られた surface を F' とすると、 $F' \cap R^3[0]$

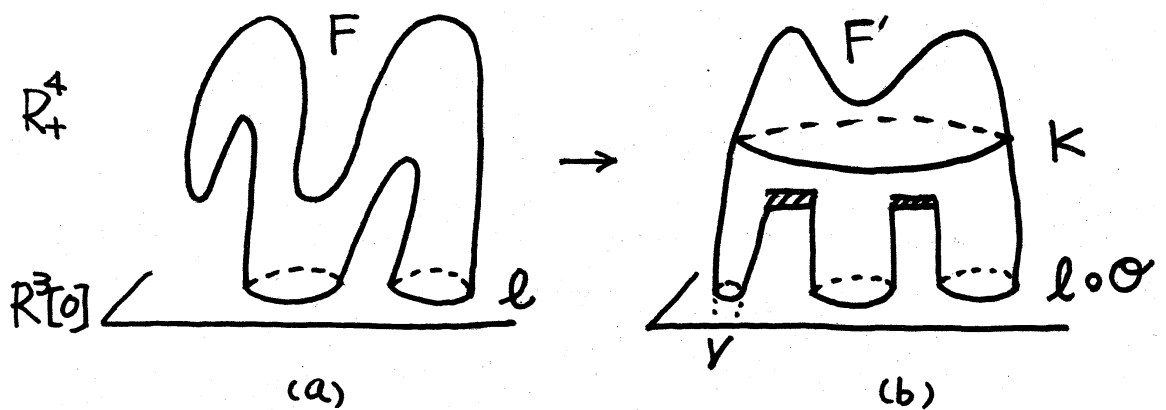


図4

は l と trivial link O が split している。 l が boundary
 link だから $l \circ O$ も boundary link で knot K は $l \circ O$

の simple fusion で得られ $V(K)=1$ である。故に定理より

$$\delta_K(t) = f_1(t) f_1(t^{-1}) \delta_L(t).$$

一方で K は ribbon knot だから,

$$\delta_K(t) = f_2(t) f_2(t^{-1})$$

と表わせるから、ある integral polynomial $f(t)$ が存在して

$$\delta_L(t) = f(t) f(t^{-1}).$$

この系を使い Casson の問題を考える。Whitehead link L_0 の 1 つの component の non-twisted double をつくる

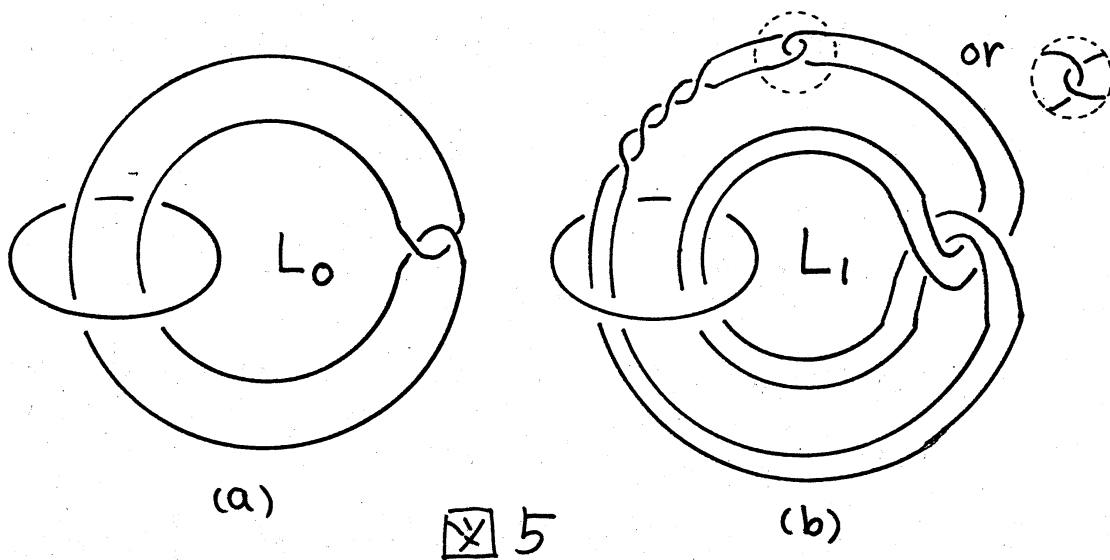


図 5

(図 5(b)). これを 1-iterated Whitehead link と呼び L_1 で表す。以下同様に p -th iterated Whitehead link L_p をつくる。そのとき、

Cassonの問題 ([3]) $\forall p$ に対して $L_p \sim 0$ (すなわち L_p は slice link in the strong sense) か?

これについては $L_1 \neq 0$. 実際は系より L_1 は slice link in the weak sense でない。なぜなら L_1 は boundary link で、

$$\delta_{L_1}(t) = t^4 - 4t^3 + 5t^2 - 4t + 1$$

$$\text{or } t^4 - 4t^3 + 7t^2 - 4t + 1$$

でこれらは $f(t)f(t^{-1})$ に分解できない。

注 $p \geq 2$ ならば $\delta_{L_p}(t) = 1$ である。また $\exists p(\geq 2)$ で $L_p \sim 0$ ならば $\forall g \geq p$ で $L_g \sim 0$ である ([7])。

References

- [1] C. Goldberg: On the genera of links, Ph.D. Thesis, Princeton Univ., 1970.
- [2] F. Hosokawa: On ∇ -polynomials of links, Osaka Math. J., 10 (1958), 273-282.
- [3] R. Kirby: Problems in low dimensional manifold theory, Proc. of Symposia in Pure Math. 33 (1978),

273-310.

- [4] K. Murasugi: Lecture Notes, Toronto Univ., (1970).
- [5] H. Seifert: Über das Geschlecht von Knoten, Math. Ann., 110 (1934), 571-592.
- [6] T. Shibuya: δ -polynomial of links, Kobe J. of Math., to appear.
- [7] T. Shibuya: On the cobordism of links with two components in a solid torus, Kobe J. of Math., to appear.