

函数を用いて運動方程式等の数値解 を求めるときの諸問題

気象研 台風 窪田正八
気象研 予報 菊池幸雄

§ 1. 緒論

気象力学の分野で扱う基礎方程式は、流体力学で使われている運動方程式或はそれを變形した渦度方程式である。これらの方程式をもとにして大気の力学的性質を調べるときには、或る初期条件を与えて偏微分方程式を解くという初期値問題を扱う場合が非常に多い。

運動方程式或は渦度方程式は非線型であるからその初期値問題の解析解を求めることは困難で、数値的に解かなければならないが、その際二つの方法がとられている。即ちスペクトル法と格子点法である。以下は気象力学の分野において運動方程式等に関する初期値問題の数値解を求めるときの諸問題の中で、特にスペクトル法に関連する二三の問題についての話である。

運動方程式或は渦度方程式をできる限り簡単化すると次の形になる。

$$(1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -u \frac{\partial u}{\partial x}$$

線型化すると、

$$(2) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -U \frac{\partial u}{\partial x}$$

今後(1)或は(2)をもとにして議論を進めることにする。ここで x は $\frac{2\pi}{L}$ によって無次元化された長さ、 t は時間を表わすものとする。又、 u は区間の両端で等しいと假定する。

§ 2. スペクトル法と格子点法の対称性

偏微分方程式の初期値問題を数値的に解く場合、空間微分の扱い方によってスペクトル法と格子点法とに分けることができる。方程式(2)を例として考えることにしよう。 u を次のように

$$(3) \quad u = \sum_m \psi_m e^{imx}$$

と展開し、(2)式に入れて係数を整理すると

$$(4) \quad \dot{\psi}_m = -imU \psi_m$$

が得られる。 ψ_m の時間微分を更に差分でおきかえて解を求め

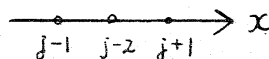
る方法がスペクトル法である。しかしここでは時間微分はそのまゝにしておく。(4)の正確な解は

$$(5) \quad \psi_m = A_m e^{-imUt}$$

であるから (3) の ψ_m に (5) を代入すると (2) の正確解が得られる。

格子点法では x の区間に適当な間隔で格子点を作り、各格子点の値を使って空間微分を差分でおまかえる。例えば、中心差分方式を用いると (2) は

$$(6) \quad \frac{\partial u_j}{\partial t} = -U \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta x}$$



となる。 $\frac{\partial u_j}{\partial t}$ を更に差分でおまかえ解を求めると格子点法であるが、こゝでも又時間差分はさうまゝにしておく。

格子点を用いて u を表現する場合、格子間隔に応じて分解能がまゝから或る波数よりも大きい波数の波は u の表現に正しい寄与をしないはずである。しかしここではすべての波数の波が分解可能であると仮定しよう。そのときには (3) 式より

より

$$(7) \quad u_j = \sum_m \psi_m e^{imj\Delta x}$$

となる。 u_{j-1} , u_{j+1} についても同様でこれを (6) に入れると

$$(8) \quad \dot{\psi}_m = -imU \frac{\sin m\Delta x}{m\Delta x} \psi_m$$

を得る。この正確解は

$$(9) \quad \psi_m = A_m \exp(-imU \frac{\sin m\Delta x}{m\Delta x} t)$$

この ψ_m を (3) に入れるならば (6) 式の正確解が得られる。かくして (5) と (9) を比較することにより、(2) 式とその空間微分を差分でおきかえた (6) 式の解の差が明確になる。即ちその違いは mU に係数

$$\frac{\sin m\Delta x}{m\Delta x} = 1 + O[(m\Delta x)^3] \quad (|m\Delta x| < 1)$$

がかかっていることである。これは space truncation error によるもので、 $|m\Delta x| < 1$ なるときには U の order は $(m\Delta x)^3$ となる。

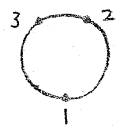
スペクトル法では space truncation error は現われないうが、実際の計算では級数を有限項で打ち切るから spectrum truncation error が生ずる。格子点法でも格子の分解能に応じて spectrum truncation があるはずで、それがどのように現われるかを考えてみよう。

まず正角を 3 の格子点で分けた場合には (6) 式より

$$(10) \quad \begin{cases} \dot{u}_1 = -a(u_2 - u_3) \\ \dot{u}_2 = -a(u_3 - u_1) \\ \dot{u}_3 = -a(u_1 - u_2) \end{cases}$$

$$a = \frac{U}{2\Delta x}$$

$$\Delta x = \frac{2\pi}{3}$$



なる常数係数の連立常微分方程式が得られる。この解を $e^{\lambda t}$ と仮定すると

$$(11) \quad \lambda(\lambda^2 + 3a^2) = 0$$

上式の解を用いると u_j は次のように表わされる。

$$(12) \quad u_j = b_0^{(j)} + b_1^{(j)} \exp(i\sqrt{3}at) + b_{-1}^{(j)} \exp(-i\sqrt{3}at)$$

(12) と (9) を比較すると次のような対応関係のあることが判る。

$$1 = \exp(0) \Rightarrow \exp\left[t\left(imU \frac{\sin m\Delta x}{m\Delta x}\right)_{m=0, \Delta x = \frac{2\pi}{3}}\right]$$

$$(13) \quad \exp(i\sqrt{3}at) \Rightarrow \exp\left[t\left(imU \frac{\sin m\Delta x}{m\Delta x}\right)_{m=1, \Delta x = \frac{2\pi}{3}}\right]$$

$$\exp(-i\sqrt{3}at) \Rightarrow \exp\left[t\left(imU \frac{\sin m\Delta x}{m\Delta x}\right)_{m=-1, \Delta x = \frac{2\pi}{3}}\right]$$

以上より明らかのようにこの場合の解は(6)式の正確解の中で $m \geq 2$ の波をすべて打ち切ったものに外ならない。

格子点を4点、5点、6点とした場合も同様で、これらの場合の λ の方程式はそれぞれ次のようになる。

$$\lambda^2(\lambda^2 + 4a^2) = 0, \quad \lambda(\lambda^4 + 5a^2\lambda^2 + 5a^4) = 0, \quad \lambda^2(\lambda^2 + 3a^2)^2 = 0$$

また(13)に対応してこれらの場合には

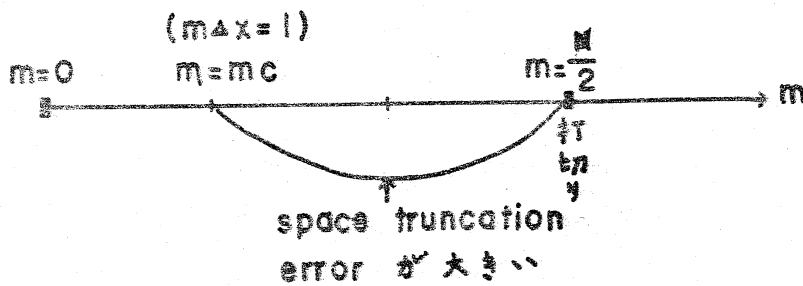
$$4.5. \quad \begin{cases} 1 = \exp(0) \Rightarrow \exp\left[t\left(imU \frac{\sin m\Delta x}{m\Delta x}\right)_{m=0, \Delta x = \frac{2\pi}{4}}\right] \\ \exp(\pm i2at) \Rightarrow \exp\left[t\left(imU \frac{\sin m\Delta x}{m\Delta x}\right)_{m=\pm 1, \Delta x = \frac{2\pi}{4}}\right] \\ 1 = \exp(0) \Rightarrow \exp\left[t\left(imU \frac{\sin m\Delta x}{m\Delta x}\right)_{m=2, \Delta x = \frac{2\pi}{4}}\right] \end{cases}$$

$$5.点 \begin{cases} 1 = \exp(0) \Rightarrow \exp\left[t\left(imU \frac{\sin m\Delta X}{m\Delta X}\right)\right]_{m=0, \Delta X=\frac{2\pi}{5}} \\ \exp(\pm i \frac{5\pm\sqrt{5}}{2}at) \Rightarrow \exp\left[t\left(\begin{array}{c} \text{ } \end{array}\right)\right]_{m=\pm 1, \Delta X=\frac{2\pi}{5}} \\ \exp(\pm i \frac{5\pm\sqrt{5}}{2}at) \Rightarrow \exp\left[t\left(\begin{array}{c} \text{ } \end{array}\right)\right]_{m=\pm 2, \Delta X=\frac{2\pi}{5}} \end{cases}$$

$$6.点 \begin{cases} 1 = \exp(0) \Rightarrow \exp\left[t\left(\begin{array}{c} \text{ } \end{array}\right)\right]_{m=0, \Delta X=\frac{2\pi}{6}} \\ \exp(\pm i\sqrt{3}at) \Rightarrow \exp\left[t\left(\begin{array}{c} \text{ } \end{array}\right)\right]_{m=\pm 1, \Delta X=\frac{2\pi}{6}} \\ \exp(\pm i\sqrt{3}at) \Rightarrow \exp\left[t\left(\begin{array}{c} \text{ } \end{array}\right)\right]_{m=\pm 2, \Delta X=\frac{2\pi}{6}} \\ 1 = \exp(0) \Rightarrow \exp\left[t\left(\begin{array}{c} \text{ } \end{array}\right)\right]_{m=3, \Delta X=\frac{2\pi}{6}} \end{cases}$$

なる対応関係が得られる。4点、5点の場合には $m \geq 3$ の波、6点の場合には $m \geq 4$ の波が打ち切られることが判る。以上より推論すると一般に N (偶数) 点、或いは $N+1$ 点の格子点の場合の解は(6)式の正確解の中で $m > \frac{N}{2}$ の波を打ち切ったものとなるであろう。

また、 $m_c \Delta X = 1$ を満足するような m_c は $m_c = \frac{1}{\Delta X} = \frac{N}{2\pi}$ であるから解を構成する波 ($m \leq \frac{N}{2}$) のほぼ $\frac{1}{3}$ は $(m\Delta X) < 1$ であるが、残りの $\frac{2}{3}$ の波については $|m\Delta X| > 1$ で、space truncation error の非常に大きい波であることが判る。



§ 3. Non-linear Instability

Phillips は大気大循環の数値実験を行なった際、格子間隔 Δx の大きさに関係なく方程式の非線形効果によって計算不安定の起ることを見出した。

方程式(1) をもとに(1)の向題を考えてみよう。(1)を変形すると、

$$(1)' \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial x}$$

空間微分も中心差分で近似すると

$$(14) \quad \frac{\partial u_j}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{u_{j+1}^2 - u_{j-1}^2}{2\Delta x} = -r(u_{j+1}^2 - u_{j-1}^2), \quad r = \frac{1}{4\Delta x}$$

となる。こゝでも時間微分はそのままにしておく、 x の区間 $\in J_T$ に分割し、 u は次のように 3 波で構成されているとしよう。

$$(15) \quad u_j = C \cos \frac{\pi}{2} j + S \sin \frac{\pi}{2} j + U \cos \pi j + V$$

第一項、第二項は波数 $J/4$ ，第三項は波数 $J/2$ の波である。

(15) と (14) に入れた場合、 u_j を構成している波は非線形項の
たうにより大きな波数、即ち $m = 3J/4$ ， $m = J$ の波を生ずる。
格子点の数は J であるから §2 の議論より明らかのように
これらの発生した波は用いている格子では分解不可能であ
る。このときこれらの波はあたかもその格子で分解可能な波
数の波であるかのようにみなされる。例えば、波数 m_1, m_2
の二つの波より波数 $m_1 + m_2$ の波ができ、この波数が $J/2$ を超
えているとしよう。そのときには次式

$$\begin{cases} \cos \frac{2\pi}{J} j(m_1 + m_2) = \cos \frac{2\pi}{J} j(J - w) = \cos \frac{2\pi}{J} jw \\ \sin \frac{2\pi}{J} j(m_1 + m_2) = \sin \frac{2\pi}{J} j(J - w) = -\sin \frac{2\pi}{J} jw \\ (w < \frac{J}{2}) \end{cases}$$

より明らかのように発生波は波数 w の波であるかのように扱
われるわけである。このために生ずる error を aliasing error
という。したがって波数 $3J/4$ ， J の波はそれぞれ波数 $J/4$ ，
 0 の波であるかのように扱われる。

(15) と (14) に入れ、以上のような事情を考慮して係数を整
理すると、

$$\dot{C} = 4rs(U - V)$$

$$(16) \quad \begin{cases} \dot{S} = 4rc(U+V) \\ \dot{U} = 0 \\ \dot{V} = 0 \end{cases}$$

この場合には $J/4, J/2$ 以外の新しい波数の波は発生しないことになるから、(16)の解は u が(15)で与えられたとき aliasing error を考慮した場合の(14)の解に外ならない。容易に判るように C 或は S は e^{Kt} 及び e^{-Kt} の形の解をもつかう $K^2 > 0$ ($K^2 = 16r^2(U+V)(U-V)$) ならば解は時間と共に増大する。これが Phillips のいう non-linear instability である。これは、 Δx をいかに小さくしても防ぐことはできない。

ここで方程式(1)或は(1')の保存量を考えてみよう。 $l > -1$ なる l に対して

$$(17) \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{2\pi} u^l dx = 0$$

が容易に証明される。 $l=1, l=2$ のとき(17)はそれぞれ物理的に運動量保存、運動エネルギー保存の関係を表わしている。

(14)がこれらの保存性を満足しているかどうか調べてみよう。 u が格子点毎に与えられている場合の運動量保存、及び運動エネルギー保存は次式で与えられる。

$$(18) \quad \sum_{j=1}^J \dot{u}_j = 0$$

$$(19) \quad \sum_{j=1}^J u_j \dot{u}_j = 0$$

(18), (19) の $\dot{u}_j$ に (14) を代入すると

$$\sum_{j=1}^J \dot{u}_j = -r \left(\sum_{j=1}^J u_{j+1}^2 - \sum_{j=1}^J u_{j-1}^2 \right) = -r \left(\sum_{j=1}^J u_j^2 - \sum_{j=1}^J u_j^2 \right) = 0$$

$$\sum_{j=1}^J u_j \dot{u}_j = -r \sum_{j=1}^J (u_j u_{j+1}^2 - u_j u_{j-1}^2) = -r \sum_{j=1}^J [-u_j^2 (u_{j+1} - u_{j-1})] \neq 0$$

即ち (14) 式は運動エネルギー保存の関係は満足していない。

(18), (19) を同時に満足する差分方程式として例えば次, ようなものが考えられる。

$$(20) \quad \frac{\partial u_j}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{1}{\Delta x} \left[\left(\frac{2u_{j+1} + u_j}{3} \right)^2 - \left(\frac{u_j + 2u_{j-1}}{3} \right)^2 \right]$$

$$= -r' [u_{j+1}^2 - u_{j-1}^2 + u_j (u_{j+1} - u_{j-1})], \quad r' = \frac{2}{9\Delta x}$$

u_j が前のように (15) 式で表わされるとし、前と全く同様の扱い方をすると

$$(21) \quad \begin{cases} \dot{U} = 2r'S(U - 2V) \\ \dot{S} = 4r'C(U + V) \\ \dot{U} = -2r'CS \\ \dot{V} = 0 \end{cases}$$

が得られる。上式より $\frac{\partial}{\partial t}(C^2 + S^2 + 3U^2 + V^2) = 0$ が判るから

、この場合には non-linear instability は起らない。即ちこれらの方程式がもつ保存性のうち、一次及び二次の量の保存性を満足するように差分方程式を作ることによって non-linear instability を防ぐことができたわけである。

同じ問題をスペクトル法で考えてみよう。任意の x の値に対して u を表わすように (15) を書き直すと、

$$(22) \quad u = C \cos mx + S \sin mx + U \cos 2mx + V$$

こゝで $m = \frac{j}{4}$ である。スペクトル法では非線型効果により発生する波のうち、はじめに選んだ波数の波以外のものはすべて打ち切るから (22) を (1)' に入れて係数を整理すると、

$$(23) \quad \begin{cases} \dot{C} = \frac{1}{2} m S (U - 2V) \\ \dot{S} = \frac{1}{2} m C (U + 2V) \\ \dot{U} = -m C S \\ \dot{V} = 0 \end{cases}$$

が得られる。この場合には

$$\frac{\partial}{\partial t}(C^2 + S^2 + U^2 + V^2) = 0$$

なることが判るから、スペクトル法では Phillips のいう non-linear instability は起らない。

方程式(1)'のスペクトル表現(23)がもとの方程式のもつ保存性もどの程度まで満しているか調べてみよう。次々式は二つ場合の保存量の時間変化のスペクトル表現とそれが保存性を満足しているかどうかを示している。

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{2\pi} u dx \Rightarrow \dot{v} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{2\pi} u^2 dx \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} (C^2 + S^2 + U^2 + 2V^2) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{2\pi} u^3 dx \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{1}{2} U(C^2 - S^2) + V(C^2 + S^2 + U^2 + \frac{2}{3} V^2) \right) \right] \neq 0$$

二の場合には二つまでの保存量の保存性は満足しているが、三つの保存量の保存性は満たしていない。

以上は波が3つある場合であるが、波が4つの場合にはついで同じ問題を考えてみよう。(22)に対応して

$$(25) \quad u = C \cos m\chi + S \sin m\chi + U \cos 2m\chi + V \sin 2m\chi$$

ここで常数項は問題の本質を変えろことはなれりて省略する。
この場合の(1)'式のスペクトル表現は

$$(26) \quad \begin{cases} \dot{C} = -\frac{1}{2} m e v + \frac{1}{2} m s u \\ \dot{S} = \frac{1}{2} m c u + \frac{1}{2} m s v \\ \dot{U} = -m c s \end{cases}$$

$$\dot{V} = \frac{1}{2} m C^2 - \frac{1}{2} m S^2$$

となる。したがって (24) に対応して次式が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{2\pi} u dx \Rightarrow \dot{0} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{2\pi} u^2 dx \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} (C^2 + S^2 + U^2 + V^2) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{2\pi} u^3 dx \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} U (C^2 - S^2) + C S V \right] = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{2\pi} u^4 dx \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} (C^2 + S^2 + U^2 + V^2) + C(U+V) - S(U-V) + \frac{1}{2} (C^2 - S^2) + C S \right] \neq 0$$

即ち波が4ヶになると3次までの保存量の保存性は満たされるが4次の保存量の保存性は破れる。

以上より波の数が多くなるほどより高次の保存量の保存性が満たされるように見える。スペクトル法で Phillips のいう non-linear instability が現われないうちは、この方法ではもとの方程式のもつ保存性をかなり程度まで自動的に満足しているためであろう。かくして Phillips のいう non-linear instability とは空間微分を差分で近似すると、もとの方程式のもつ2次までの保存量の保存性を満足してゐないなうに起るものという二とが出来る。

§4. 時間差分方式

今までは空間微分に関する問題と時間微分に関する問題の

混乱をさけるため時間微分はとりまゝにして扱ったが、実際計算では時間微分も差分に直すなければならない。これはスペクトル法でも格子点法でも同じである。

時間差分方式を分類すると、explicit 方式と implicit 方式に分けられる。各方式は更に、使う微分係数の次数及び時間格子点の数によって分類される。気象力学の分野で使用及び提案された時間差分方式の主なものをまとめたのが次頁の表である。

§2 の議論より明らかなるように、スペクトル法或いは格子点法で (2) 式の解を数値的に求める際の時間差分に關する問題を網べるという事は、次の形の方程式も数値積分する場合の問題に帰着できる。

$$(28) \quad \dot{\psi} = -i\alpha\psi$$

ここで $\alpha = mU$ ならばスペクトル法、 $\alpha = mU \frac{\sin \pi \alpha X}{\pi \alpha X}$ ならば格子点法に対応する。

同じ差分方式でも適用する微分方程式によって数値解の性質、計算安定の条件等は異ってくる。ここでは上式 (28) の時間微分を差分でおきかえる場合の問題を考えよう。

Heun 方式: (Euler 方式については 15 頁の表を参照)

この方式は ψ を消去すると $\psi_{t+1} = \psi_t + \Delta t \dot{\psi}_t + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\psi}_t$ となる。

微分 方程式の 次数	時間 階級 の数	名称	方 式	切断誤 差のorder (Δt) ⁿ	安定性 の条件	解 の 性 質
1	1	Euler (forward)	$\psi_{\tau+1} = \psi_{\tau} + \dot{\psi}_{\tau} \Delta t$	2	不安定	$ \lambda = (1 + P^2)^{\frac{1}{2}}$
	2	Leapfrog (centered)	$\psi_{\tau+1} = \psi_{\tau-1} + 2\Delta t \dot{\psi}_{\tau}$	3	$ P < 1$	$\lambda_1 = e^{-i\theta}, \lambda_2 = (-1) e^{i\theta}$ Physical mode 以外は computational mode が現われる。両 mode 共、振巾は 2 倍。 Physical mode は計算不安定に達するが、 computational mode の振巾は時間と共に 減小する。
		Adams- Bashforth	$\psi_{\tau+1} = \psi_{\tau} + \Delta t \left(\frac{3}{2} \dot{\psi}_{\tau} - \frac{1}{2} \dot{\psi}_{\tau-1} \right)$	3	不安定	$ \lambda = \left(1 + \frac{P^4}{4} \right)^{\frac{1}{2}}$
		Heun	$\psi_{\tau+1} = \psi_{\tau} + \Delta t \dot{\psi}_{\tau}$ $\psi_{\tau+1} = \psi_{\tau} + \frac{\Delta t}{2} (\dot{\psi}_{\tau} + \dot{\psi}_{\tau*})$	2	$ P < 1$	$ \lambda = (1 - P^2 + P^4)^{\frac{1}{2}}$ 振巾は時間と共に減少。周波数の 大きい波程 減少率は大きい。 Physical mode の振巾は computational mode の振巾も時間と共に減少。
2	1	Matsuno (Euler- backward)	$\psi_{\tau} = \psi_{\tau+1} + \Delta t \dot{\psi}_{\tau}$ $\psi_{\tau+1} = \psi_{\tau} + \Delta t \dot{\psi}_{\tau*}$	3	$ P < \sqrt{2}$	$ \lambda = \left(1 - \frac{1}{72} P^6 + \frac{1}{576} P^8 \right)^{\frac{1}{3}}$ 振巾は時間と共に僅かに減少
	2	Leapfrog- trapezoidal	$\psi_{\tau} = \psi_{\tau-1} + 2\Delta t \dot{\psi}_{\tau}$ $\psi_{\tau+1} = \psi_{\tau} + \frac{\Delta t}{2} (\dot{\psi}_{\tau} + \dot{\psi}_{\tau*})$ $k_1 = \dot{\psi}(\tau, \psi_{\tau}) \Delta t, k_2 = \dot{\psi}(\tau + \frac{\Delta t}{2}, \psi_{\tau} + \frac{\Delta t}{2} k_1) \Delta t$ $k_3 = \dot{\psi}(\tau + \frac{\Delta t}{2}, \psi_{\tau} + \frac{\Delta t}{2} k_2) \Delta t, k_4 = \dot{\psi}(\tau + \Delta t, \psi_{\tau} + \Delta t k_3) \Delta t$ $\psi_{\tau+1} = \psi_{\tau} + \frac{\Delta t}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$	5	$ P < \sqrt{8}$	
4	1	Runge- Kutta	$\psi_{\tau+1} = \psi_{\tau} + \Delta t \dot{\psi}_{\tau+1}$	2	安定	$ \lambda = \frac{1}{1 + P^2}$, 振巾は時間と共に減少
		backward				
implicit	1	trapezoidal	$\psi_{\tau+1} = \psi_{\tau} + \frac{\Delta t}{2} (\dot{\psi}_{\tau+1} + \dot{\psi}_{\tau})$	3	安定	$ \lambda = 1$, 振巾は 2 倍

λ は amplification matrix の固有値, λ_1 は physical mode, λ_2 は computational mode. $P = \alpha \Delta t$

2次の微分係数まで使った方式であるというのはこの意味である。

特性方程式は $\lambda = 1 - \frac{P^2}{2} - iP$ であるから $|\lambda| = (1 + \frac{P^4}{4})^{\frac{1}{2}} > 1$ 。
したがってこの方式も計算不安定である。

Trapezoidal 方式:

特性方程式は $\lambda = \frac{1 - i\frac{P}{2}}{1 + i\frac{P}{2}}$ 。したがって $|\lambda| = 1$ であるから $\lambda = |\lambda|e^{-i\theta}$ とおくと、この場合の数値解は

$$(29) \quad \psi_c = A|\lambda|^T e^{-i\theta T} = A e^{-i\theta T}$$

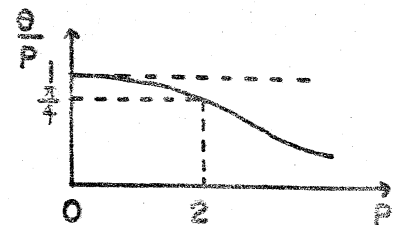
となる。

一方(28)の正確解は

$$(30) \quad \psi = \psi_0 e^{-i\alpha t} = \psi_0 e^{-iP\tau}, \quad (P = \alpha \Delta t)$$

であるから、振巾が一定であるという点で数値解と正確解は一致する。また θ は P に対応する量で、もし $\theta = P$ ならば数値解は正確解を表わすわけであるが、時間微分を差分で近似している限り、その truncation error の影響は必ず θ に現われる。 θ/P が P によってどのように変るかをモデル的に示したが第1図である。

かくしてこの方式は(28)の正確解に近いという点で非常にすぐれてい



第1図

るが Implicit 方式であるから答えを得るには iteration を行わねばならない。これは長時間にわたって積分するときには、計算時間の面から不利である。Implicit 方式は常に2つより不利な点をもっている。

Leap-frog 方式

特性方程式は $\lambda^2 + i2p\lambda - 1 = 0$ であるから

$|P| < 1$ に対して

$$\begin{cases} |\lambda_1| = 1 & \theta_1 = \sin^{-1} p \\ |\lambda_2| = 1 & \theta_2 = -(\pi + \theta_1) \end{cases}$$

$|P| > 1$ に対して

$$\begin{cases} |\lambda_1| = p - \sqrt{p^2 - 1} & \theta_1 = \frac{\pi}{2} \\ |\lambda_2| = p + \sqrt{p^2 - 1} & \theta_2 = -\frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

となる。 $|\lambda|$ 及び θ/p と p の関係をもデル的に示したのが次の図である。

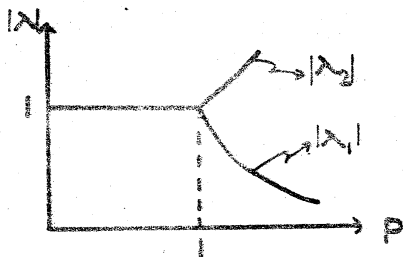


図 2 (a)

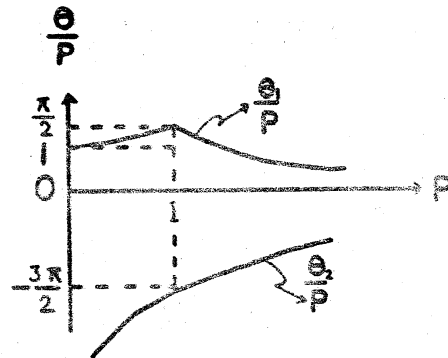


図 2 (b)

計算が安定であるための条件は $|P| < 1$ である。

この場合には λ のついた解は正確解に近いものである。

ることが直ちに判る。これを *Physical mode* という。一方 *suffix* のついた解は時間格子長を二つ使って次の *step* の値を求める方式であるためにでてきたもので、これを *Computational mode* という。時間格子長の数が増すにつれて、*Computational mode* の数も多くなることは特性方程式の次数が大きくなることから明らかである。

この方式による解の *Physical mode* をみると、振巾は時間と共に変らなから正確解に近いことが判るが、*Computational mode* があり、しかもこれが *Physical mode* よりも大きい位相角を持ってゐるから、それら二つの *mode* の線型結合として得られる数値解の振巾はある値のまわりを振動することになる。 *Computational mode* の振巾を小さく抑さえることによつてこの振巾は小さくすることが出来る。

Matsuno 方式:

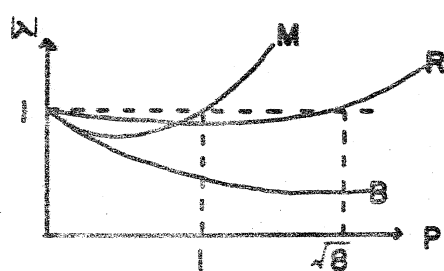
ψ_* を消去するとこの方式は結局 $\psi_{t+1} = \psi_t + \Delta t \dot{\psi}_t + \Delta t^2 \ddot{\psi}_t$ に外ならない。特性方程式は $\lambda = 1 - p^2 - ip$ 。したがつて

$|\lambda| = (1 - p^2 + p^4)^{\frac{1}{2}}$, $\theta = \tan^{-1} \frac{p}{1 - p^2}$ 。計算安定の条件は $|p| < 1$ である。 $|\lambda|$ 及び θ/p と p の関係は第3図に示されている。

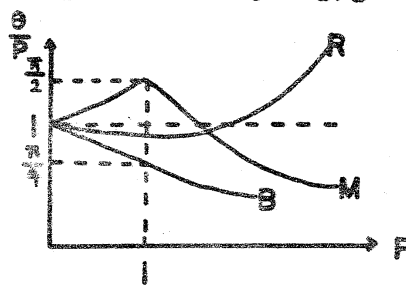
Runge-Kutta 方式:

ψ が τ に *explicit* に含まない場合、 k_i ($i=1, \dots, 4$) を消去すると $\psi_{t+1} = \psi_t + \Delta t \dot{\psi}_t + \frac{1}{2!} \Delta t^2 \ddot{\psi}_t + \frac{1}{3!} \Delta t^3 \dddot{\psi}_t + \frac{1}{4!} \Delta t^4 \psi^{(4)}_t$ となる。

M: Matsuno R: Runge Kutta B: Backward



第3図 (a)



第3図 (b)

4がてを explicit に含む場合についても同様にして、この方式は4次の微分係数まで用いる方式であることは容易にわかる。

特性方程式は $\lambda = (1 - \frac{1}{2}p + \frac{1}{24}p^4) + i(p - \frac{1}{6}p^3)$ 。

$$|\lambda| = (1 - \frac{1}{72}p^6 + \frac{1}{576}p^8), \quad \theta = \tan^{-1} \frac{p - \frac{1}{6}p^3}{1 - \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{24}p^4}.$$

計算安定の条件は $|p| < \sqrt{8}$ 。 $|\lambda|$ 及び $\frac{\theta}{p}$ と p の関係は第3図にモデル的に示されている。

Backward 方式:

特性方程式は $\lambda = \frac{1}{1+ip}$ 。したがって $|\lambda| = \frac{1}{1+p^2}$, $\theta = \tan^{-1} p$ 。

常に計算安定。 $|\lambda|$ 及び $\frac{\theta}{p}$ と p の関係は同じく第3図に示されている。

上述の3つの方式の特徴は解の振巾が時間と共に減少すること、それが p に依存しているから、 Δt を適宜にとって、周波数 (mu) の高い波程振巾の減衰が大きくなるようにすることが出来る。かくして、これらの波を人工的に除去することが出来るわけである。しかし、充分長い時間積分を続けて

いくと、おちようとする低周波の波の振幅も次第に減衰する
という欠点がある。

Adams-Bashforth 方式:

特性方程式は $\lambda^2 - (1 - i\frac{3}{2}p)\lambda - i\frac{1}{2}p = 0$ 。 $|\lambda|$ と p の関係が
お4図に示されている。この方式は常に計算不安定を起す。

Leapfrog-trapezoidal 方式:

この方式は Leapfrog 方式と trapezoidal 方式を組合わせた

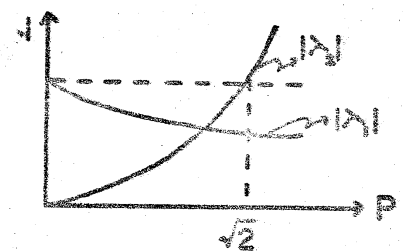
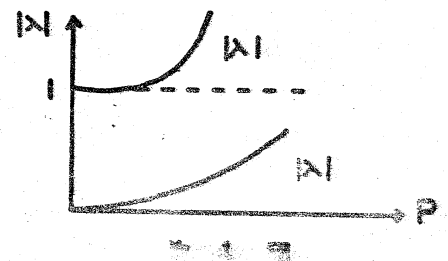
もので φ_* を消去すると

$$\varphi_{t+1} = \varphi_t + \frac{\Delta t}{2}(\dot{\varphi}_t + \dot{\varphi}_{t-1}) + 4t^2\ddot{\varphi}_t.$$

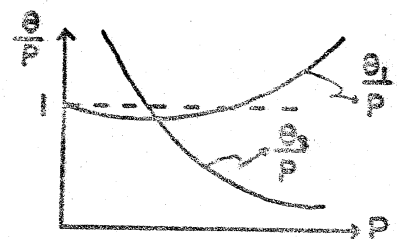
特性方程式は $\lambda^2 - (1 - p^2 - i\frac{1}{2}p)\lambda + i\frac{1}{2}p = 0$ 。 $|\lambda|$ 及び θ/p と p の関
係がお5図に示されている。

計算安定の条件は $|p| < \sqrt{2}$ であ
る。

以上述べた二つの方式の経
微は computational mode の振
幅が時間と共に減衰すること
である。



お5図(a)



お5図(b)

§ 5. 時間差分に関連する non-linear instability

§ 4. で各種の差分方式について述べたが、比較的簡単でしかも正確解に近い数値解が得られるという点で Leapfrog 方式が広く用いられている。しかしこの方式を用いる場合には、computational mode の振巾を小さく抑える必要がある。

この方式は二つの時間格子点を用いるから、計算をはじめるときには初期値の外に次の step の値を必要とする。その値は適当な方法で初期値から求めるわけであるが、その求め方によつて computational mode の振巾の大小が左右される。Leapfrog 方式の数値解は

$$(31) \quad \varphi_c = A e^{-i\theta\tau} + B(-1)^{\tau} e^{i\theta\tau}, \quad \theta = \sin^{-1} p$$

であるから

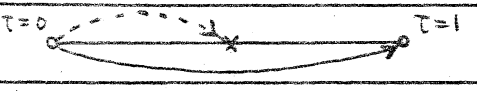
$$(32) \quad \varphi_1 = \varphi_0 [e^{-i\theta} + F(p)]$$

とおくと

$$(33) \quad \begin{cases} A = \varphi_0 \left(1 + \frac{F(p)}{2 \cos \theta}\right) \\ B = -\varphi_0 \frac{F(p)}{2 \cos \theta} \end{cases}$$

となる。 $\tau=0$ の φ_0 から $\tau=1$ の φ_1 を求める方法によつて $F(p)$ が定まるから、もし $F(p)=0$ となるような方法があったとすれば、 $B=0$, $A=\varphi_0$ となり、数値解は正確解に一致す

る。次表には出発値のきめ方と $|F|$ の大きさが示されている。

方式	出発値のきめ方	$ F $ のorder
A		$\frac{1}{8} p^4$
B		$\frac{1}{18} p^2$
C		$\frac{1}{8} p^3$
D		$\frac{1}{8} p^3$
E	正確な値	$\frac{1}{3} p^3$

---→ Euler 方式
 → leap-frog 方式

方式Aが非常によい方法であることが判る。こゝで正確な値を与えることが必ずしもよい方法ではないということに注意すべきである。

さつらで空間差分に関連して起る non-linear instability について述べたが、空間差分について non-linear instability が起らないような方式を用いるか或いはスペクトル法を用いたとしても、方程式が非線型の場合は時間差分方式として、

leapfrog 方式を用いると、似たような non-linear instability が発生する。次にその例を示そう。

方程式系

$$\dot{a} = -bc - \frac{1}{3}cd$$

$$(34) \begin{cases} \dot{b} = ac \\ \dot{c} = -\frac{2}{5}ab + \frac{2}{3}ad \\ \dot{d} = -\frac{1}{7}ac \end{cases}$$

については $\frac{\partial}{\partial t}(a^2 + \frac{3}{2}b^2 + \frac{5}{4}c^2 + \frac{7}{2}d^2) = 0$ が成立つから、

Phillips のいう non-linear instability は起らないはずである

。(34) を leapfrog 方式と Adams-Bashforth 方式を用いて積分した結果が次の図に示されている。

この図より明らかなように leapfrog 方式では、計算不安定が起っている。しかし、Adams-Bashforth 方式、即ち computational mode が時間と共に減衰する方式では、安定な結果が

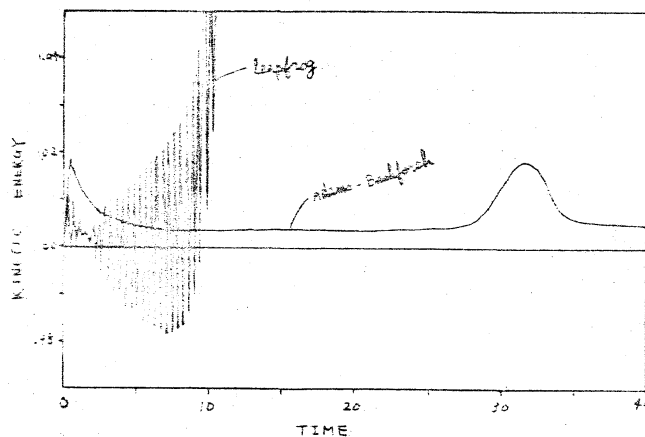


図 6

得られている。これより、leapfrog 方式を用いるときに起る non-linear instability は computational mode の振動が非線型効果によって異常に大きくなるためであると推論される。

我々はこの non-linear instability をいかにして防いでい

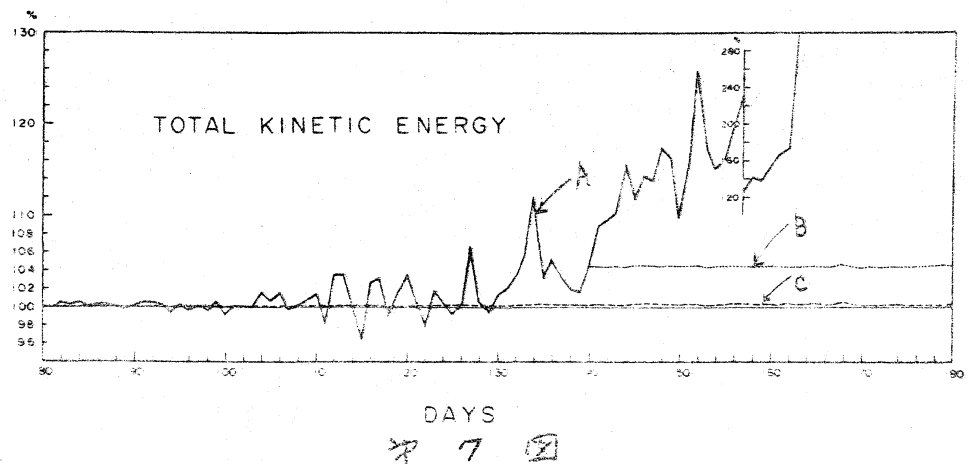
3 かを次の例で示そう。 方程式系

$$(35) \quad \dot{\psi}_j = \sum_{k=1}^{30} \sum_{l=1}^{30} i a_{jkl} \psi_k \psi_l + i b_j \psi_j \quad (j=1, 2, \dots, 30)$$

は渦度方程式のスペクトル表現である。ここで ψ は複素数、 $i = \sqrt{-1}$ である。係数 a_{jkl} , b_j の性質より

$$(36) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left[\sum_{j=1}^{30} n_j (n_j + 1) |\psi_j|^2 \right] = 0 \quad (n_j \text{ は } j \text{ によつて定まる整数})$$

なる運動エネルギー保存の成立つことが知られている。即ちこの場合には Phillips のいう non-linear instability は起らないはずである。しかし、時間微分を leapfrog 方式で近似して積分をすすめると、第7図の曲線 A のように 164 日頃には計算不安定を起こしてしまう。これは上述の正しく computational



mode の振幅が大きくなるたきであると考へ、これを抑える意味で 140 日目には、これを発見として再出発する。即ち 140

日目を初期値とし、式Aで次のstepの値を求め、以後 leap-frog 方式で積分をすすりたのが曲線Bである。明らかなに non-linear instability の発生は抑えられている。更に80日目より20日毎に再出発するという方法で積分をすすりたのが曲線Cである。この場合には non-linear instability が起らないばかりでなく、誤差も非常に小さく抑えられていることが判る。

§6. スペクトル切断誤差

線型微分方程式をスペクトル法で解く場合、スペクトル切断の影響は、切断した波が誤差として現われるだけで、残りの波に影響は与えないが、方程式が非線型なときは残りの波もスペクトル切断の影響を受ける。ここでは Platzman に従い、方程式(1)をもとにしてこの問題を考えよう。

方程式(1)の一般解は

$$(37) \quad u = F(x - ut)$$

F は任意の函数でよいが、簡単のため $t = 0$ で $u = -\sin x$ とする解は

$$(38) \quad u = -\sin(x - ut)$$

となる。パラメータ θ を用いると(38)式は

$$(39) \quad \begin{cases} u = -\sin \theta \\ \theta = x + t \sin \theta \end{cases}$$

と表現することもできる。(38) 或いは(39)より明らかのように $t=0$ で $u=0$ の点では時間が経っても常に $u=0$ である。一方 $t=0$ で $u=u_m$ の点は u_m の値を保ちつつ u_m の速度で x 軸上を移動する。したがって $u=0$ の点とぶつかり、そこで u の傾度は無限大となり、更に時間がたつと u はどのような函数となる。即ち、shock wave が発生するわけである。図はその様相を示している。

$$p = \frac{\partial u}{\partial t} \text{ とおくと (1) 式より } \frac{ds}{dt} = -S^2.$$

$$\text{したがって } S = \frac{1}{t + S_0^{-1}}.$$

$S = \infty$ となる時刻を t_c とする

$$\text{と、 } t_c = \frac{1}{S_0} = \frac{1}{\cos x} \text{ となる。}$$

かくして、 $t > 1$ では u はどのような函数となることが判る。

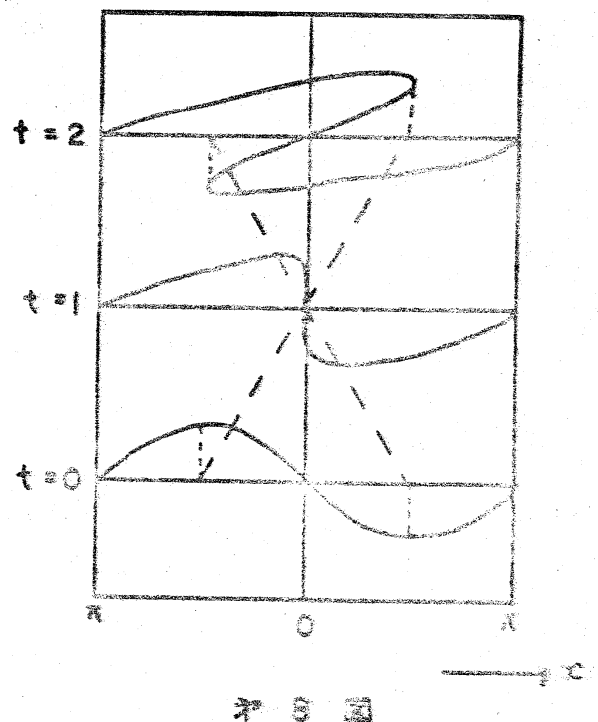
(38) を級数で表現すると、

$$(40) \quad -u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin nx$$

$$(41) \quad u_n(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(x, t) \sin nx dx$$

となる。(39) を用いると (41) は

$$(42) \quad u_n(t) = \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} \cos n(\theta - t \sin \theta) \cos \theta d\theta.$$



Bessel 函数の積分表示

$$(43) \quad J_n(z) = \frac{z}{n\pi} \int_0^\pi \cos(n\theta - z \sin \theta) \cos \theta d\theta$$

と (42) を比較することにより

$$(44) \quad u_n(t) = 2J_n(nt)/nt$$

かくして

$$(45) \quad u = -2 \sum_{n=1}^{\infty} (nt)^{-1} J_n(nt) \sin n\chi \quad (\text{: Kapteyn 級数})$$

が得られる。(38) は $t > 1$ に対して多価になるが、その級数表現 (45) は収斂し、かつ一価である。したがって $t \leq 1$ なる時のみ、(45) は (1) の解である。

解 (38) 式は $\chi = 0$ 及び $\chi = -\pi$ で常に $u = 0$ であるから、

$t > -1$ なる t に対して $\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\pi}^0 u^2 d\chi = 0$ が成立つ。したがって

運動量保存及び運動エネルギー保存に対応するものとして

$$(46) \quad \begin{cases} M_1 = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^0 u d\chi = 1 \\ M_2 = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^0 u^2 d\chi = 1 \end{cases}$$

を得る。(46) 式の u は (45) を入れた場合の M_1, M_2 の値の t による変化を示したのが図 9 である。 $t > 1$ に対して (45) はもはや解ではないので (46) の関係も満足していない。

(40) を (1) に入れ係数を整理すると、

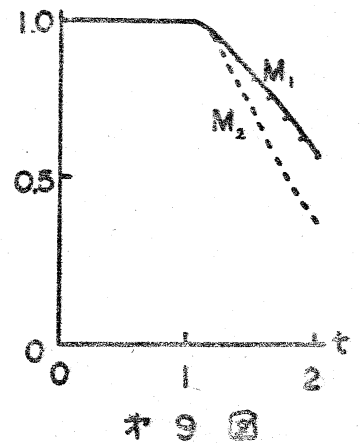
$$(47) \quad \frac{2}{\pi} \dot{u}_n = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} u_k u_{n-k} - \sum_{k=1}^{\infty} u_n u_{n+k}$$

なる (1) 式のスペクトル表現が得られる。一方 (40) を (46) 式の u に入れると

$$(48) \quad \begin{cases} M_1 = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} n^{-1} u_n(t) = 1 \\ M_2 = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} [u_n(t)]^2 = 1 \end{cases}$$

を得る。(47) より求められた u_n がいかなる n に対しても (48) を満足することは容易に証明できる。勿論 $\sigma > 1$ に対しては (47) より得られる u_n はもはや解でないことは、それが u の多価函数を表現し得ないことが明らかである。しかし、常に (48) を満足するから $\sigma > 1$ に対して (44) とは違った u_n であることが判る。とにかく $\sigma \leq 1$ に対しては (44) により u_n の正確解が判っているから、その価と (47) を適宜にスペクトル切断したものが求めた u_n とを比較して、スペクトル切断の影響を調べることができる。

第10図には、 u_1, u_2, u_3 の正確な値を実線で、(47) 式よりそれらの第1近似、第2近似をとって計算したものを点で



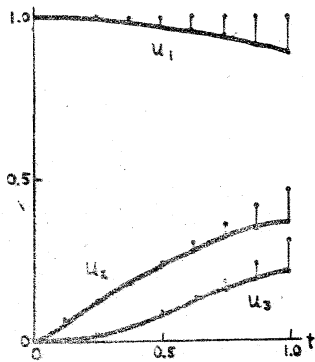


図 10

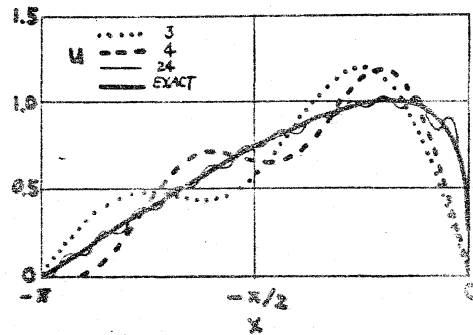


図 11

示している。ここで u_1 の第 1 近似とは

$$2 \dot{u}_1 = 0$$

であり、

$$\begin{cases} 2 \dot{u}_1 = -u_1 u_2 \\ \dot{u}_2 = \frac{1}{2} u_1^2 \end{cases}$$

が u_1 の第 2 近似であると共に u_2 の第 1 近似となる。以下同様である。図 10 より明らかなように第 2 近似になるとほとんど正確解と一致していることが判る。

しかしこれは u が少ない項数です分に表現できるというわけではない。特に shock wave の発生する $x=1$ においては、かなり多くの項数までとってもなお u の表現に不十分なことが、図 11 より判るであろう。

