

縮小写像の離散不動点定理と純戦略均衡

Discrete fixed point theorems for contraction mappings and pure-strategy equilibria

川崎英文 *

HIDEFUMI KAWASAKI †

九州大学大学院数理学研究院

FACULTY OF MATHEMATICS, KYUSHU UNIVERSITY

Abstract

In [1], the author presented a discrete fixed point theorem for contraction mappings as a corollary of Richard-Shih-Dong's discrete fixed point theorem for local contraction mappings [2]. He also applied the former theorem to an n -person strategic game. However it didn't fully utilize the advantage of the latter theorem. In this paper we directly apply the latter theorem to the n -person strategic game.

1 はじめに

著者は [1] において, Richard-Shih-Dong の離散不動点定理の系として整数区間上の縮小写像に対する離散不動点定理を与え, それを n 人戦略形ゲームの最適応答写像に適用することにより, 唯一の純戦略 Nash 均衡をもつゲームを提示した. しかしながら, その手法は Richard-Shih-Dong の離散不動点定理の長所を十分に生かしていなかった. 本稿では Richard-Shih-Dong の離散不動点定理を直接 n 人戦略形ゲームに適用することを図る.

2 Robert の離散不動点定理

ブール代数の直積 $\{0, 1\}^n$ を **ブール束** という. Robert [3, 1986] はブール束からそれ自身への縮小写像に対して離散不動点定理を与えた. 本節では Robert の離散不動点定理を紹介する.

ブール代数 $\{0, 1\}$ 上の行列を **ブール行列** とよび, 行列の和や積は通常の計算方法である. ブール束 $\{0, 1\}^n$ 上の写像 $f = (f_1, \dots, f_n)$ の各成分 f_i が変数 x_j に依存するかどうかを表したものが **関係行列** $B(f) := (b_{ij})$ である. すなわち,

$$b_{ij} := \begin{cases} 0, & f_i(x_j, x_{-j}) = f_i(y_j, x_{-j}) \quad \forall x \in \{0, 1\}^n, \forall y_j \in \{0, 1\}. \\ 1, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (1)$$

*kawasaki@math.kyushu-u.ac.jp

†本研究は JSPS 科研費 JP16K05278 の助成を受けている.

$0, 1$ 要素からなる n 次行列 $B = (b_{ij})$ に対して、点集合を $\{1, \dots, n\}$ とし、 $b_{ij} = 1$ のとき i から j へ有向枝を引いて得られる有向グラフを $\Gamma(B)$ で表す。 $\Gamma(B(f))$ を f の連結グラフとよぶ。つまり、 f_i が x_j に依存するとき i から j へ有向枝を引いたものが連結グラフである。

縮小という言葉が意味をもつには、距離のようなものが必要である。 $x, y \in \{0, 1\}^n$ に対して、縦ベクトルを $d(x, y) := (|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|)^T \in \{0, 1\}^n$ で定義する。このとき、任意の $x, y \in \{0, 1\}^n$ に対し $d(f(x), f(y)) \leq B(f)d(x, y)$ が成立する。

ブール行列 $B = (b_{ij})$ に対して、非零ベクトル $u \in \{0, 1\}^n$ と $\lambda \in \{0, 1\}$ が $Bu = \lambda u$ をみたすとき、 u をブール固有ベクトル、 λ をブール固有値とよぶ。最大固有値をブールスペクトル半径とよび $\rho(B)$ と書く。ブール行列は固有値をもち、 $B \leq C$ ならば $\rho(B) \leq \rho(C)$ が成立する。

定理 1

([3]) ブール行列 $B = (b_{ij})$ について、以下の条件は同値である。

(a) $\rho(B) = 0$. (b) どの主小行列も零行をもつ。 (c) 置換行列 P が存在して $P^T B P$ は強下三角行列になる。 (d) ある $k \leq n$ があって $B^k = 0$. (e) 任意の巡回置換 $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ に対し、 $b_{i_1 i_2} b_{i_2 i_3} \cdots b_{i_k i_1} = 0$.

ブール束 $\{0, 1\}^n$ 上の写像 f は、 $\rho(B) = 0$ なるブール行列が存在して、任意の $x, y \in \{0, 1\}^n$ に対して $d(f(x), f(y)) \leq B d(x, y)$ が成立するとき、縮小写像とよばれる。 f が縮小写像であるための必要十分条件は $\rho(B(f)) = 0$ である。

定理 2

(Robert の離散不動点定理) ブール束 $\{0, 1\}^n$ 上の縮小写像 f は唯一の不動点をもつ。その不動点を a とすると、ある $k \leq n$ が存在して $f^k(x) \equiv a$.

3 Shih-Dong の離散不動点定理

Shih-Dong [4, 2005] はブール束 $\{0, 1\}^n$ 上の写像 $f = (f_1, \dots, f_n)$ に対し、離散微分 (discrete derivative) $f'(x) := (f'_{ij}(x))$ を (2) で定義し、すべての点 $x \in \{0, 1\}^n$ で $\rho(f'(x)) = 0$ が成立するとき、 f を局所縮小写像とよんだ。ただし、 $\bar{x}^j$ は x の第 j 成分 x_j をその反転 $\bar{x}_j$ で置き換えた点を表す。また、 $V_x := \{\bar{x}_j \mid j = 1, \dots, n\}$ を x の直近傍とよぶ。

$$f'_{ij}(x) := \begin{cases} 0, & f_i(\bar{x}^j) = f_i(x), \\ 1, & f_i(\bar{x}^j) \neq f_i(x). \end{cases} \quad (2)$$

補題 1

(1) $\max_{x \in \{0, 1\}^n} f'(x) = B(f)$. (2) 縮小写像は局所縮小写像である。 (3) 任意の $x \in \{0, 1\}^n$ と $y \in V_x$ に対して $d(f(x), f(y)) = f'(x)d(x, y)$.

定理 3

(Shih-Dong [4]) 局所縮小写像は唯一の不動点をもつ。

定理 2 は大域的な仮定 $\rho(B(f)) = 0$ から大域的な結論「唯一の不動点の存在」を導いたものであるが、定理 3 は局所的な条件 $\rho(f'(x)) \equiv 0$ から大域的な結論を導いた深い結果である。

4 Richard-Shih-Dong の離散不動点定理

X_i ($i = 1, \dots, n$) を整数の有限区間で $|X_i| \geq 2$ なるものとし, $X := X_1 \times \dots \times X_n$ を整数区間とよぶ. Richard [2, 2008] は Shih-Dong の離散不動点定理を整数区間に拡張した. $x \in X$ の直近傍を $V_x := \{x \pm e_i \mid i = 1, \dots, n\} \cap X$ で定義する. 整数区間 X 上の写像 f に対しても (1) で関係行列 $B(f)$ を定義し, $\rho(B(f)) = 0$ を満たすとき縮小写像とよぶ. ブール束の場合の離散微分 (2) の自然な拡張として $f'[x, v] := (f_{ij}[x, v])_{i,j}$ を次の様に定義する.

$$f_{ij}[x, v] := \begin{cases} 0, & f_i(x + v_j e_j) = f_i(x) \\ 1, & f_i(x + v_j e_j) \neq f_i(x). \end{cases} \quad (3)$$

ただし, $v \in \{\pm 1\}^n$ は $x + v$ が X に留まるようなベクトルである. また, 離散微分より精密な離散ヤコビ行列 (discrete Jacobian matrix) $f'(x, v) := (f_{ij}(x, v))_{i,j}$ を次式で定義する.

$$f_{ij}(x, v) := \begin{cases} 0, & f_i(x) \text{ と } f_i(x + v_j e_j) \text{ は } x_i + \frac{v_j}{2} \text{ に関して同じ側にある} \\ 1, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (4)$$

すなわち, $f_{ij}(x, v)$ が 0 になるのは次のときである.

$$\begin{aligned} v_j = 1, & \quad (f_i(x) \leq x_i, f_i(x + e_j) \leq x_i) \text{ or } (f_i(x) > x_i, f_i(x + e_j) > x_i), \\ v_j = -1, & \quad (f_i(x) \geq x_i, f_i(x + e_j) \geq x_i) \text{ or } (f_i(x) < x_i, f_i(x + e_j) < x_i). \end{aligned} \quad (5)$$

(6) を満たす f を局所縮小写像, (7) を満たすものを広義局所縮小写像とよぶ.

$$\rho(f'[x, v]) = 0 \quad \text{if } x + v \in X. \quad (6)$$

$$\rho(f'(x, v)) = 0 \quad \text{if } x + v \in X, \quad (7)$$

補題 2

離散ヤコビ行列 $f'(x, v)$, 離散微分 $f'[x, v]$, 関係行列 $B(f) = (b_{ij})$ について以下のことが成り立つ.

- (a) $f_{ij}(x, v) \leq f_{ij}[x, v] \leq b_{ij} \quad \forall i, j$.
- (b) 縮小写像 $\Rightarrow$ 局所縮小写像 $\Rightarrow$ 広義局所縮小写像.
- (c) $B(f) = \max_{x, x+v \in X} f'[x, v] \geq \max_{x, x+v \in X} f'(x, v)$.
- (d) f がブール束 $\{0, 1\}^n$ 上の写像のとき, $x + v \in \{0, 1\}^n$ を満たす $v \in \{\pm 1\}^n$ は x に対して一意に決まり, $f'(x, v)$, $f'[x, v]$, $f'(x)$ は一致する.

Richard [2] は次の定理 4 を帰納法で証明した. その最初のステップ $|X_1| = \dots = |X_n| = 2$ が Shih-Dong の離散不動点定理である.

定理 4

(Richard-Shih-Dong の離散不動点定理) 広義局所縮小写像は唯一の不動点をもつ.

例 1

図 1 (1) で定義される $\{0, 1, 2\}^2$ 上の写像 f は以下の性質をもつ.

- 1. 広義局所縮小写像である. 2. 局所縮小写像ではない.
- 3. 不動点以外のどの点 x^0 から始めても, 点列 $x^{k+1} = f(x^k)$ は不動点に収束しない.

系 1

任意の $a \in X$ と任意の巡回置換 $\sigma = (i_1, i_2, \dots, i_k)$ に対し $f_{i_j}(x_{i_{j+1}}, a_{-i_j-i_{j+1}})$ ($j = 1, \dots, k$) のどれかが定数関数ならば, f は局所縮小写像である. ただし, $i_{k+1} = i_1$ とする. このとき唯一の純戦略 Nash 均衡が存在する.

系 2

2 人ゲームの最適応答写像 $f = (f_1, f_2)$ について以下の条件は同値である.

(a) f は縮小写像である. (b) f は局所縮小写像である. (c) f は広義縮小写像である. (d) $f_1(x_2)$, $f_2(x_1)$ の少なくとも一方は定数関数である.

系 3

3 人ゲームの最適応答写像 f が局所縮小写像であるための必要十分条件は, $x + v \in X$ を満たす任意の $x \in X$, $v \in \{\pm 1\}^3$ と任意の $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ に対し,

$$f_i(x_j + v_j, x_k) - f_i(x_j, x_k), f_j(x_k + v_k, x_i) - f_j(x_k, x_i), f_k(x_i + v_i, x_j) - f_k(x_i, x_j)$$

のどれかは 0 であり, さらに, $f_i(x_j + v_j, x_k) - f_i(x_j, x_k)$, $f_j(x_i + v_i, x_k) - f_j(x_i, x_k)$ のどちらかが 0 になることである. また, 任意の $a \in X$ に対し $f_i(x_j, a_k)$, $f_j(x_k, a_i)$, $f_k(x_i, a_j)$ のいずれかが定数関数で, $f_i(x_j, a_k)$, $f_j(x_i, a_k)$ のどちらかが定数関数ならば, f は局所縮小写像である. このとき唯一の純戦略 Nash 均衡が存在する.

図 3 で与えられる 3 人ゲームの最適応答写像 f は局所縮小写像であるが, 縮小写像ではない.

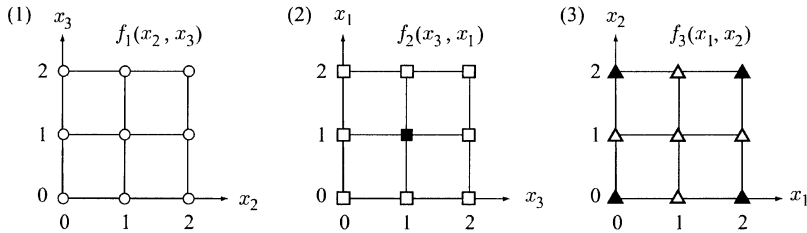


図 3: 3 人ゲームの最適応答写像. f_1 は定数関数で, $f_2(\blacksquare) \neq f_2(\square)$. $f_3(\blacktriangle) \neq f_3(\triangle)$.

図 4 で与えられた 3 人ゲームの最適応答写像 f は f_1, f_2, f_3 のどれも定数関数でない局所縮小写像であるが, 縮小写像ではない.

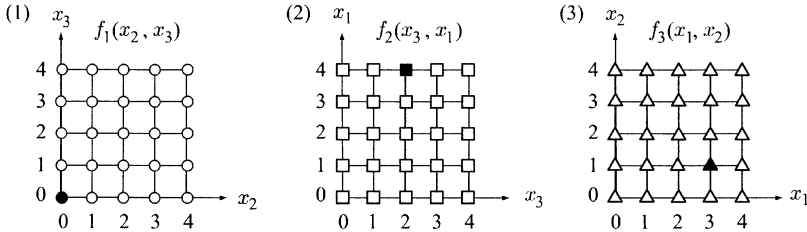


図 4: 3 人ゲームの最適応答写像. $f_1(\bullet) \neq f_1(\circ)$, $f_2(\blacksquare) \neq f_2(\square)$. $f_3(\blacktriangle) \neq f_3(\triangle)$.

参 老 文 献

- [1] H. KAWASAKI, A. KIRA, AND S. KIRA, An application of a discrete fixed point theorem to a game in expansive form, *Asia-Pacific J. of Operational Research*, **30**, 1340013 (2013).
- [2] A. RICHARD, An extension of the Shih-Dong's combinatorial fixed point theorem, *Advances in Appl. Math.*, **41** (2008) 620–627.
- [3] F. ROBERT, *Discrete Iterations: A Metric Study*, Springer, Berlin, (1986).
- [4] M.-H. SHIH AND J.-L. DONG, A combinatorial analogue of the Jacobian problem in automata networks, *Advances in Appl. Math.*, **34** (2005) 30–46.