

Connexion について

奈良工専

北川 誠之助

§ 1 序

ここでは、A. Connes の $T(M)$ に関する結果の一部を紹介し、

記号 : M, N : Neumann algebra

φ, ψ : M 上の normal semi-finite faithful

weight (又は state) 以下では weight (又は state) は全て normal semi-finite faithful であるとする

$$\mathcal{N}_\varphi = \{x \in M : \varphi(x^*x) < \infty\}$$

$$\mathcal{M}_\varphi = \{x^*y : x, y \in \mathcal{N}_\varphi\}$$

π_φ : φ による modular automorphism

$$\mathcal{M}_\pi = \{x : \pi_\varphi(x) = x\}$$

§ 2

定理 1 φ, ψ : M 上の weight

$u_t \longmapsto u_t \in M_u$ strongly conti. mapping

$$\pi_\varphi^u(x) = u_t \pi_\varphi(x) u_t^* \quad \forall x \in M$$

証明

 $\overline{F}_2 = \{2 \times 2\text{-matrix } \}$ とする

$$\theta(\sum x_{ij} \otimes e_{ij}) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(x_{11}) + \varphi(x_{22}) \quad \sum x_{ij} \otimes e_{ij} \in (M \otimes \overline{F}_2)_+$$

$$\mathcal{M} \ni \sum x_{ij} \otimes e_{ij} \iff x_{i1} \in \mathcal{M}_\varphi, \quad x_{i2} \in \mathcal{M}_\varphi \quad (i=1,2) \text{ かつ }$$

θ は $M \otimes \overline{F}_2$ の weight 1 になる事は容易にわかる。

$f_j = 1 \otimes e_{jj} \quad (j=1,2)$ は $(M \otimes \overline{F}_2)_\theta$ に含まれることを示す。

すなわち $\pi_\theta^\theta(f_j) = f_j \quad (j=1,2)$ を示す。

[1] により次の事を示せば十分である。

$$f_j \mathcal{M}_\theta \subset \mathcal{M}_\theta, \quad \mathcal{M}_\theta \cdot f_j \in \mathcal{M}_\theta \quad (j=1,2)$$

$$\theta(f_j \cdot a) = \theta(a \cdot f_j) \quad \forall a \in \mathcal{M}_\theta \quad (j=1,2)$$

しかし、容易に計算できるので、計算は省略する。

$$\pi_\theta^\theta(x \otimes e_{11}) = \sum x_{ij} \otimes e_{ij} \text{ とすると}$$

$$(1 \otimes e_{11}) \pi_\theta^\theta(x \otimes e_{11}) = \pi_\theta^\theta(x \otimes e_{11}) = \pi_\theta^\theta(x \otimes e_{11})(1 \otimes e_{11})$$

$$0 = (1 \otimes e_{22})(\pi_\theta^\theta(x \otimes e_{11})) = \pi_\theta^\theta(x \otimes e_{11})(1 \otimes e_{22})$$

$$\text{よって } \exists \pi_+(x) \in M \quad \pi_\theta^\theta(x \otimes e_{11}) = \pi_+(x) \otimes e_{11} \text{ となる}$$

$x \longrightarrow \pi_+(x) =$ strongly conti. one-parameter group of automorphisms in M .

$x \longrightarrow \pi_+(x)$ に関して、 φ の K.M.S. 条件を満たすことを示す。

$$\varphi(\pi_+(x^*x)) = \theta(\pi_\theta^\theta(x^*x) \otimes e_{11}) = \theta(x^*x \otimes e_{11}) = \varphi(x^*x) \otimes e_{11}$$

$$\forall a, b \in \mathcal{M}_\varphi$$

$$\varphi(\pi_+(a)b) = \theta(\pi_\theta^\theta(a \otimes e_{11}) \cdot b \otimes e_{11})$$

$$\varphi(b \Gamma_+(a)) = \theta(b \otimes e_{11} \cdot \Gamma_+^{\theta}(a \otimes e_{11}))$$

Γ_+^{θ} が θ に関する K.M.S 条件を満たすことより

$${}^3\bar{F}(z) = \text{holomorphic} \quad 0 < \text{Im } z < 1, \text{ center} \quad 0 \leq \text{Im } z \leq 1$$

$$F(x) = \theta(\Gamma_+^{\theta}(a \otimes e_{11}) b \otimes e_{11}) = \varphi(\Gamma_+(a) b)$$

$$\bar{F}(t+i) = \theta(b \otimes e_{11} \cdot \Gamma_+(a \otimes e_{11})) = \varphi(b \Gamma_+(a))$$

したがって K.M.S 条件の一意性により

$$\Gamma_+(x) = \Gamma_+^{\varphi}(x) \quad \forall x \in M.$$

$$\therefore \Gamma_+^{\theta}(x \otimes e_{11}) = \Gamma_+(x) \otimes e_{11} = \Gamma_+^{\varphi}(x) \otimes e_{11}$$

同様に $\Gamma_+^{\theta}(x \otimes e_{22}) = \Gamma_+^{\varphi}(x) \otimes e_{22} \quad \forall x \in M.$

$$(1 \otimes e_{22}) \Gamma_+^{\theta}(1 \otimes e_{21}) = \Gamma_+^{\theta}(1 \otimes e_{21}) = \Gamma_+^{\theta}(1 \otimes e_{21})(1 \otimes e_{11})$$

$$0 = (1 \otimes e_{11}) \Gamma_+^{\theta}(1 \otimes e_{21}) = \Gamma_+^{\theta}(1 \otimes e_{21}) 1 \otimes e_{22}$$

より $\Gamma_+^{\theta}(1 \otimes e_{21}) = u_+ \otimes e_{21} \quad u_+ \in M. \quad \text{とあり}$

$$u_+^* u_+ \otimes e_{11} = \Gamma_+^{\theta}(1 \otimes e_{11}) = 1 \otimes e_{11}$$

$$u_+ u_+^* \otimes e_{22} = \Gamma_+^{\theta}(1 \otimes e_{22}) = 1 \otimes e_{22} \quad \text{より } u_+ \text{ は unitary operator.}$$

$$(u_+ \otimes e_{21})(\Gamma_+^{\varphi}(x) \otimes e_{11})(u_+^* \otimes e_{12}) = \Gamma_+^{\theta}(1 \otimes e_{21}) \Gamma_+^{\theta}(x \otimes e_{11}) \Gamma_+^{\theta}(1 \otimes e_{12})$$

$$= \Gamma_+^{\theta}(x \otimes e_{22}) = \Gamma_+^{\varphi}(x) \otimes e_{22}$$

$$\therefore u_+ \Gamma_+^{\varphi}(x) u_+^* = \Gamma_+^{\varphi}(x) \quad \forall x \in M. \quad \text{g.e. } \theta$$

定理 1 で求めた u_+ を $(D\varphi; D\varphi)_+$ と書く。

$(D\varphi, D\varphi)_+$ は次の様な性質を持つ。

Lemma 1) ~~$\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$~~ $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ φ : weight

$$i) (D\varphi_1; D\varphi_2)_+ (D\varphi_2; D\varphi_3)_+ = (D\varphi_1; D\varphi_3)_+.$$

ii) $\varphi = \nabla_t^\varphi$ - invariant weight

[1] により $\exists R \text{ if } M\varphi \quad R \geq 0$

$\varphi(x) = \varphi(h \cdot x)$ と表わされる。

$(D\varphi = D\varphi)_t = R \cdot t$ となる。

iii) $u \in M_u \quad \varphi_u \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(u \otimes u^*)$

$\nabla_t^\varphi(u) = u(D\varphi_u = D\varphi)_t$

(*) iv) $(D\varphi = D\varphi)_{t_1+t_2} = (D\varphi = D\varphi)_{t_1} \cdot \nabla_{t_1}^\varphi((D\varphi = D\varphi)_{t_2})$

証明は、いずれも簡単に計算出来るので、略する。

今度は、逆に $(D\varphi = D\varphi)_t$ は (*) により characterization される事を示す。

定理 2 $t \longrightarrow u_t \in M_u$: strongly conti mapping.

これを満たす 方向 u_t $u_{t_1+t_2} = u_{t_1} \cdot \nabla_{t_1}^\varphi(u_{t_2})$ なる。

$\exists \varphi$: weight s.t. $(D\varphi = D\varphi)_t = u_t$

証明 I ~~first~~ step II $\overline{F_\infty} \stackrel{\text{def}}{=} B(L^2(R))$ [1] により、次の事が解らる。

$\exists \omega$: weight on $\overline{F_\infty}$ s.t. $\nabla_t^\omega(x) = u_t \otimes u_t^* = (u_t \otimes)(s) = t(s \cdot x) \quad \forall t \in L^2(R)$

$\overline{\omega} \stackrel{\text{def}}{=} \varphi \otimes \omega$: weight on $\overline{F_\infty} \otimes M \otimes \overline{F_\infty}$

$\exists V \in (M \otimes \overline{F_\infty})_u$ s.t. $u_t \otimes 1 = V \nabla_t^{\overline{\omega}}(V^*)$ なる事を示す。

$I : \mathcal{H}_\varphi \otimes L^2(R) \ni s \otimes t \longrightarrow t(s) \in L^2(R, \mathcal{H}_\varphi)$

により、 $L^2(\mathcal{H}_\varphi \otimes L^2(R))$ と $L^2(R, \mathcal{H}_\varphi)$ を同一視する。

$$W = L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H}_\varphi) \ni \zeta_t \longrightarrow \pi_\varphi(u_t) \zeta_t \in L^2(\mathcal{A}, \mathcal{H}_\varphi)$$

W = unitary operator τ $I^* W I \in \pi(M \otimes F_\infty)$ なる事は容易に解かる。

$$\exists V : \text{unitary} \in M \otimes F_\infty \text{ s.t. } (\pi_\varphi \otimes 1)(V) = I^* W I$$

V が求まるものであることは、容易に計算出来る。

$$[\text{Step II}] \quad i) \quad \Phi(x) \stackrel{\text{def}}{=} \bar{\omega}(V^* x V) = \text{weight on } M \otimes F_\infty$$

$$\sigma_+^\Phi(x \otimes y) = u_+ \sigma_+^\varphi(x) u_+^* \otimes \sigma_+^\omega(y) \quad \forall x \in M, \forall y \in F_\infty$$

$$ii) \quad a \in F_\infty, a > 0 \quad \omega(a) < \infty \quad \text{とする}$$

$$\psi(x) \stackrel{\text{def}}{=} \Phi(x \otimes a) \quad x \in M_+ \quad \text{とする}$$

$$\psi = \text{weight on } M$$

証明 $i)$ Lemma 1より

$$\begin{aligned} \sigma_+^\Phi(x \otimes y) &= V \sigma_+^{\bar{\omega}}(V^*) \sigma_+^{\bar{\omega}}(x \otimes y) \sigma_+^{\bar{\omega}}(V) V^* = (u_+ \otimes 1) \sigma_+^{\bar{\omega}}(x \otimes y) (u_+^* \otimes 1) \\ &= (u_+ \sigma_+^\varphi(x) u_+^*) \otimes \sigma_+^\omega(y) \end{aligned}$$

$$ii) \quad \forall x \in M_+, \quad \psi(x) < \infty$$

$$b \stackrel{\text{def}}{=} \int t(t) u_+ dt \quad \text{とする} \quad \psi(b x b^*) < \infty \text{ なる事を示す}$$

$$\text{但し } t \in L^1 \quad \uparrow \in \mathcal{C}_0$$

$$\psi(b x b^*) = \bar{\omega}(V^*(b x b^* \otimes a) V) = \bar{\omega}(V^*(b \otimes 1)(x \otimes a)(b^* \otimes 1) V)$$

[1] 1より

$$\bar{\omega}(V^*(b \otimes 1)(x \otimes a)(b^* \otimes 1) V) < \infty \text{ を示すには}$$

$$V^*(b \otimes 1) \text{ が } \sigma_+^{\bar{\omega}}\text{-analytic を示せば十分}$$

$$V^* \int t(t) (u_+ \otimes 1) dt = V^* \int t(t) V \sigma_+^{\bar{\omega}}(V^*) dt = \int t(t) \sigma_+^{\bar{\omega}}(V^*) dt$$

$\therefore \hat{f} \in \mathcal{C}_0$ により $V^*(b \otimes 1)$ は T_+^w -analytic

$\eta \varphi b \in \eta \mathcal{A}$ で $\dagger \in L'$ $\hat{f} \in \mathcal{C}_0$ を動かすから

$\eta \mathcal{A} = \text{weakly dense}$

$\therefore \mathcal{A} = \text{semi-finite}$.

* normal, faithful $\dagger = \varepsilon$ は明らかだから

$\dagger$ は $M \otimes \mathbb{C}$ の weight.

Step III). M, N : Neumann algebras

$\Phi = \text{weight on } M \otimes N$ と (7).

$$T_+^\Phi(M \otimes 1) = M \otimes 1$$

$a \in N_+$ $\varphi(x) \stackrel{\text{def}}{=} \Phi(x \otimes a)$ は weight on M であり

$$T_+^\varphi(x \otimes 1) = T_+^\Phi(x \otimes 1) \quad \forall x \in M$$

証明.

Lemma 2 $\mathbb{C} \ni z \longrightarrow x(z) \in M$ analytic

$\varphi = \text{weight on } M$.

$\exists x \in M$ analytic T_+ -analytic

$$T_z(x) = x(z)$$

$$\iff \text{i) } \forall \tau_1 > 0, \exists \tau_2 > 0 \text{ s.t.}$$

$$|\operatorname{Im} z| < \tau_1, \quad a \in M_\varphi^+ \Rightarrow \varphi(x(z)a x(z)^*) \leq \tau_2 \varphi(a) \\ \varphi(x^*(z)a x^*(z)) \leq \tau_2 \varphi(a)$$

$$\text{ii) } \forall a \in M_\varphi^+ \quad \begin{cases} z \longrightarrow \varphi(x(z)a) \\ z \longrightarrow \varphi(a x(z)) \end{cases} \text{ holomorphic}$$

$$\varphi(x(z+v)a) = \varphi(a \times (z))$$

Lemma の 証明 1) 1) 2) 3) 4) 5)

$\tau_t(x) \otimes 1 \stackrel{\text{def}}{=} \tau_t^{\bar{x}}(x \otimes 1) \quad \forall x \in M$ $\tau_t(x)$ is strongly conti one-parameter group of automorphisms

1) $\int \tau(t) \tau_t^{\bar{x}}(x \otimes 1) dt = 0 \quad x \in M, t \in L^1, \bar{x} \in \{ \cdot \} : \text{weakly dense in } M \otimes 1$

2) $\{ \tau_t\text{-analytic element} \}$ is weakly dense in M .

3) $\{ \tau_t\text{-analytic element} \} \ni \forall x$

$x \rightarrow \tau_z(x)$ is Lemma 2) を 満たす 3) 5)

$\tau_t(x) = \tau_t^{\bar{x}}(x) \quad \forall \{ \tau_t\text{-analytic element} \}$ weakly dense

4) $\tau_t(x) = \tau_t^{\bar{x}}(x) \quad \forall x \in M$

Step IV) 以上の事をまとめると

$$\exists \bar{x} \quad \tau_t^{\bar{x}}(x) = u_t \tau_t^{\bar{x}}(x) u_t^*$$

$$(D\varphi : D\varphi)_t = V_t \quad a_t = u_t V_t^* \in \text{center of } M \varphi$$

$$a_{t_1+t_2} = a_{t_1} \cdot a_{t_2} \quad \text{1)}$$

$$\exists h \in M \text{ center of } M \quad a_t = h^{it} \quad t \geq 0$$

$$\text{Lemma 1 1)} \quad (D\varphi(h, \cdot), D\varphi) = h^{it} = a_t$$

$$\therefore (D\varphi(h, \cdot) : D\varphi) = (D\varphi(h, \cdot) : D\varphi)(D\varphi : D\varphi) = h^{it} \cdot V_t$$

$$= a_t V_t = u_t \quad \text{q.e.d.}$$

§3. Def $T(M) = \{T_0 \in R : \exists \varphi \quad \tau_{T_0}^\varphi \equiv 1\}$

定理 3 i) $T_0 \in T(M)$

ii) $\forall \varphi \quad \tau_{T_0}^\varphi$ is inner

iii) $\forall \varphi \Rightarrow \exists u = \text{unitary} \in \text{center of } M_\varphi \text{ s.t. } \tau_{T_0}^\varphi(x) = u x u^*$

iv) $\forall \varphi \quad \exists h \quad \text{s.t. } \varphi(x) = \varphi(h \cdot x)$

例 1. $h \in \text{center of } M_\varphi, h \neq 0$

$$\tau_{T_0}^\varphi = 1$$

v) $\exists \varphi \quad \tau_{T_0}^\varphi$ is inner

i) ~ v) は同値

証明) 定理 1) より次の事は明らかである。

iv) $\Rightarrow$ i) $\Rightarrow$ ii) $\Rightarrow$ v) $\Rightarrow$ iii)

ii) $\Rightarrow$ iii) $\forall \varphi$ 1- 対し $\tau_{T_0}^\varphi$ is inner, $\exists u \in M$ s.t. $\tau_{T_0}^\varphi(x) = u x u^*$

φ は $\tau_{T_0}^\varphi$ -invariant だから $\varphi(u x u^*) = \varphi(x) \quad \forall x \in M$

$$\therefore \eta_\varphi u \subset \eta_\varphi \quad \eta_\varphi u^* \subset \eta_\varphi$$

$$\therefore u \eta_\varphi \subset \eta_\varphi \quad \eta_\varphi u \subset \eta_\varphi,$$

$$\forall x \in \eta_\varphi \quad \varphi(u x) = \varphi(x u)$$

$$[1] \quad 1- 1) \quad u \in M_\varphi \quad \& \quad \tau_{T_0}^\varphi(x) = u x u^* = x \quad \forall x \in M_\varphi$$

1- 2), $u \in \text{center of } M_\varphi$

iii) $\Rightarrow$ iv) $u = \text{implement } \tau_{T_0}^\varphi$

$h \in \text{center of } M_\varphi, h \neq 0$

$$u = h^{-1} T_0$$

$$4 \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(h.)$$

Lemma 1 より $\tau_+^4(x) = h^{i_0} \tau_+^q(x) h^{-i_0}$

$$\therefore \tau_{T_0}^4(x) = x$$

今まで知られている Kallman [3], Takesaki [2] 等の結果を使って次の様な事がわかる。

定理 4 i) $M: \text{semi-finite} \Rightarrow T(M) = \mathbb{R}$

ii) 特に $M_*: \text{separable}$ ならば

$$M: \text{semi-finite} \iff T(M) = \mathbb{R}$$

§ 4

以下では 具体的な M に関して $T(M)$ を計算する。

$$I) M = \bigotimes_{j=1}^{\infty} (M_j, \varphi_j) \quad M_j: \text{factor} \quad \varphi_j: \text{state}$$

= 定理 5 $T_0 \in T(M) \iff$ i) $\cap T(M_j) \ni T_0$

$$ii) \tau_{T_0}^{\varphi_j}(x) = u_j x u_j^*$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} |\varphi_j(u_j)| < \infty$$

証明 ($\Rightarrow$) まず Kallman [B4] の結果を述べておく。

$$\alpha = \alpha_1 \otimes \alpha_2 = M_1 \otimes M_2: \text{automorphism: inner} \iff \alpha_i = \text{inner} \quad i=1,2$$

NS construction により $\varphi_j(x) = (x \Omega_j, \Omega_j)$ とする。

以下では $M = \bigotimes_{j=1}^{\infty} (M_j, \Omega_j)$ について論じる, $\varphi = \bigotimes_{j=1}^{\infty} \varphi_j$ とすると

$$\tau_+^{\varphi}(x) = \bigotimes_{j=1}^{\infty} \tau_+^{\varphi_j} \quad \text{なる事と Kallmann の結果を使うと}$$

$$T_0 \in T(M) \implies T_0 \in \bigcap_{j=1}^{\infty} T(M_j) \quad \text{は明らかである。}$$

i) u : implement $T_{T_0}^{\varphi}$

$\{\prod_{v \in J} \otimes \chi_v \otimes \prod_{v \notin J} \otimes \Omega_v : J \text{ finite set, } \chi_v \in M_v\} = \text{dense in } \prod_{v \in J_0} (\chi_v, \Omega_v)$

$\exists J_0$: finite set $C = |(\prod_{v \in J_0} \otimes \chi_v, \prod_{v \notin J_0} \otimes \Omega_v) \otimes (\prod_{v \notin J_0} \otimes \Omega_v)| \neq 0 \dots (1)$

$J_0 \subset J$: finite $T_{T_0}^{\varphi} = \prod_{v \in J} \otimes T_{T_0}^{\varphi_v} \otimes \prod_{v \notin J} \otimes T_{T_0}^{\varphi_v}$

K all mean の結果に F') $\exists u_v$: implement $T_{T_0}^{\varphi_v}$ $v \in J$

V_J : implement $\otimes_{v \in J} T_{T_0}^{\varphi_v}$ $\exists M$ π factor to $\mathbb{C}$

F') $\exists \lambda_J \in \mathbb{C}$ $u = \pi \lambda_J (\prod_{v \in J} \otimes u_v) \otimes V_J$

ii) F') $0 < C = \prod_{v \in J_0} |(u_v \otimes \Omega_v, \chi_v \otimes \Omega_v)| |(V_J \otimes \Omega_v, \Omega_v)| \prod_{v \notin J/T_0} |(u_v \otimes \Omega_v, \Omega_v)|$

$|(V_J \otimes \Omega_v, \Omega_v)| \leq 1, \prod_{v \notin J/T_0} |(u_v \otimes \Omega_v, \Omega_v)| \leq 1$ F')

$\prod_{v \notin J/T_0} |(u_v \otimes \Omega_v, \Omega_v)|$ Converge as $J/T_0 \uparrow \infty$

$\sum |1 - |(u_v \otimes \Omega_v, \Omega_v)|| = \sum |1 - |\varphi_v(u_v)|| < \infty$

($\Leftarrow$) 証明 ≤ 0

e.e.d

特に M の I, I, P, P, I について上の結果を使うと

$M = \sum_{n=1}^{\infty} (M_n \otimes \Omega_n)$ $\text{Sp}(M_n \otimes \Omega_n) = \{\lambda_n, \dots, \lambda_n\}$

$h_n = \begin{pmatrix} \lambda_n & 0 \\ 0 & -\lambda_n \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \varphi_n(x) = (x \otimes \Omega_n, \Omega_n) = T_V(h_n)$ F') $T_{T_0}^{\varphi_n}(x) = h_n^{-1} x h_n^{-1}$

$T_0 \in T(M) \iff \sum |1 - |\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{1+|T_0|}|| < \infty$

$\exists \text{ Sp}(M_n \otimes \Omega_n) = \{P, \dots, P\}$ to $S(1)$

$T(W) = \{n T_0, n \in \mathbb{Z}\}$ $\exp(-2\pi/T_0) = 1$

G_2 : 2-generator $\mathbb{C}$ free group $\in \mathbb{C}$ $U(G_2) \in \mathbb{C}$ regular

rep F') $\exists \mathbb{C}$ $\mathbb{C}$ -factor $\in \mathbb{C}$

$$T(U(G_2) \otimes M_*) = T(M) \quad \text{より}$$

non-type-finite III-型-factor の非可算無限個の存在の証明となる

II) μ = σ -finite measure on Ω .

$\mathcal{G}$: bijection, bimeasurable transformation on Ω .

$\mathcal{G}$ は Ω に μ に関して free に act してゐるものとする

$$L^0(\Omega, \mu) \ni \forall f, \quad s \circ f \stackrel{\text{def}}{=} f \circ s^{-1} \quad s \in \mathcal{G}$$

$W^*(\mathcal{G}, \Omega) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{G}$ と $L^0(\Omega, \mu)$ の cross product.

定理 6 $T_0 \in T(W^*(\mathcal{G}, \Omega)) \iff \exists \nu$: positive measure on Ω

$$\text{st } \nu \sim \mu, \quad (d\nu/d\mu)(\omega) \in \{p^n, n \in \mathbb{Z}\} \quad p = \exp(-2\pi i/T_0)$$

$$\forall s \in \mathcal{G} \quad \omega \in \Omega$$

proposition 1

N : semi-finite subalgebra of M .

$E : M \longrightarrow N$: normal faithful conditional expectation

$$\pi(E) \stackrel{\text{def}}{=} \{u = E(u \chi u^*) = u(E(\chi))u^*, \forall \chi \in M\} \subset M_*$$

$$C = N' \cap M \subset N,$$

$\mathcal{G} : \pi(E)$ の sub group で $M = \langle N, \mathcal{G} \rangle''$ とする

τ : trace on N

$$\forall v \in \mathcal{G} \quad \exists p_v, \tau \geq 0, p_v \in C \quad \text{st } \tau(v \chi v^*) = \tau(p_v, \tau, \chi) \quad \forall \chi \in N_+$$

以下の i) ~ iii) は同値

$$i) E \in T(M)$$

$$ii) \forall \tau = \text{trace}, \exists v \in \mathcal{U} \text{ s.t. } \forall u \in \mathcal{G} \quad u^* v u v^* = p_{u, \tau}^{\tau_0}$$

$$iii) \tau = \text{trace}, \text{ s.t. } p_{u, \tau}^{\tau_0} = 1 \quad \forall u \in \mathcal{G}.$$

証明略

Proposition 2. [Zeller Meier [7]]

 $\mathcal{A}$: Neumann algebra $\mathcal{G}$: discrete group of automorphisms on $\mathcal{A}$ $M = W^*(\mathcal{G}, \mathcal{A})$ - ($\mathcal{G} \ltimes \mathcal{A}$ の cross product)

$$i) I: \mathcal{A} \longrightarrow (I(a))_{t, u} = \sigma_t^u \tau^{-1} a \in M$$

$$I: \mathcal{A} \longrightarrow I(\mathcal{A}) = N \subset M = \text{isomorphism}$$

$$ii) E: \mathcal{A} \in M \longrightarrow (I(a)e) = \text{normal fact. conditional expectation on } N$$

$$iii) \forall s \in \mathcal{G} \xrightarrow{U_s} U_s \in M, (U_s)_{t, u} \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_t^{s u} = \text{isomorphism}$$

$$\pi(E) \supset \{U_s : s \in \mathcal{G}\} = \mathcal{G}, \quad \mathcal{G} \cong M = \{N, \mathcal{G}\}'$$

$$iv) s \in \mathcal{G} \quad x \in \mathcal{A} \quad U_s I(x) U_s^* = I(s \cdot x)$$

証明略

定理の証明

$$\forall \tau = \text{trace on } N = L(L^\infty(\Omega, \mu)) \text{ に対して}$$

$$\exists \nu = \text{measure on } \Omega \text{ s.t. } \nu \sim \mu$$

$$\tau_\theta(I(f)) = \int f(\omega) d\nu(\omega) \quad \forall f \in L^\infty(\Omega, \mu)_+$$

$$\forall x \in N_+, \forall s \in \mathcal{G} \text{ に対して } \tau_\theta(U_s x U_s^*) = \tau_{s \cdot \nu}(x) = \int x(\omega) d(s \cdot \nu)(\omega)$$

したがって Proposition 2) iii) により

$$\begin{aligned} \exists \tau &: \text{trace on } N. \quad \text{s.t.} \quad p_{s,v}^{\tau_0}(\omega) = 1 \\ \tau(U_s X U_s^*) &= \int X(\omega) d(s^*v)(\omega) = \int p_{s,v}(\omega) X(\omega) dv(\omega) \quad \forall X \in L^\infty(\Omega, \mu)_+ \\ p_{s,v}(\omega) &= \left[\frac{ds^*v}{dv} \right](\omega) \quad \text{p.e. d.} \end{aligned}$$

Reference

- [1] Takesaki - Pederson: The Radon-Nikodym-theorem for Von Neumann algebras (To appear)
- [2] Takesaki: Tomita's theory and its application.
- [3] Kallman: Groups of inner automorphism of Von Neuman algebras. Jour. of fun. Analysis '71'
- [4] Kallman: A generalisation of free action.
Duke. Math. J. 35, 1989.
- [5] A. Connes: Doctor thesis.
- [6] A. Connes: Groupe modulaire d'une algebras de von Neumann. C.R. Acad Sci '72
- [7] G. Zeller Meier: Produit croisé d'une C^* -algebra par un groupe d'automorphismes. J Math pure et appl '68