

Maximal Ideal Space 上の harmonic function について

京大理 庄子聡彦 (Akihiko Shōji)

R : リーマン面

H^∞ : R 上の有界正則函数族

h^∞ : R 上の有界実調和函数族

$\mathcal{M}$: H^∞ 上の maximal ideal space

S : $\mathcal{M}$ の Šilov 境界

としたとき、まず R を $\mathcal{M}$ の位相で閉包をとると、それは S を含んでいるので、 H^∞ の元 f に対して R 上の函数 $\operatorname{Re} f$ を $\mathcal{M}$ 上連続にのばしたとすると、それは S 上 $(\operatorname{Re} f)(m) = \operatorname{Re}(f(m))$ をみたす。ゆえに $\mathcal{M}$ の各元での値を、その S 上の表現測度を用いて定義すれば、

$$m(\operatorname{Re} f) = \operatorname{Re} m(f) \quad \text{for } \forall m \in \mathcal{M}, \forall f \in H^\infty \quad \dots (0,1)$$

となり、この“自然”な式がある種の“必然”性を伴っていることがわかる。

ところで、 $(H^\infty)^\perp = \{f \in H^\infty; \int f \in H^\infty\}$ の元 f をとったとき、

$$m(\log |f|) = \log |m(f)| \quad (m \in \mathcal{M}, f \in (H^\infty)^{-1}) \dots (0,2)$$

を用いて $\mathcal{H}^\infty$ の元 $\log |f|$ に対して自然に定義ができる。特に、 R が単位円板であるときには、この式を用いて $\mathcal{H}^\infty$ 全体に定義することができる。

ここでは、松岡氏[1]の手法を用いて $(0,1), (0,2)$ を基として“必然”的に拡張できる $\mathcal{H}^\infty$ の元はどのようなものであるかについて述べることにする。

§1. Hahn-Banach の定理の確認

まず、“必然”性の確認のため、Hahn-Banach の定理とその証明を見てみよう。

Theorem (Hahn-Banach)

X : 実ベクトル空間

M : X の部分空間

p : X 上の劣加法的汎函数

φ : M 上の実線型汎函数で、

M の任意の元 x について、 $\varphi(x) \leq p(x)$ をみたすとしたとき、 φ を X 上へ拡張した実線型汎函数 ψ で、 X 上 $\psi \leq p$ をみたすものがある。

(証明)

$X \setminus M \ni x_0$ としたとき、 x_0 と M の線型包 M_0 上に φ の拡張 φ_0 をとるとすると、 φ_0 の満たすべき条件は、

$$\begin{aligned} \varphi_0(x + \alpha x_0) &= \varphi(x) + \alpha \varphi_0(x_0) \\ \varphi_0(x + \alpha x_0) &\leq p(x + \alpha x_0) \end{aligned} \quad \text{for } \forall x \in M, \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

即ち、 $\varphi_0(x_0)$ が

$$\alpha \varphi_0(x_0) \leq p(x + \alpha x_0) - \varphi(x) \quad \text{for } \forall x \in M, \forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

をみたしていれば φ_0 をとることができる。

$\alpha > 0$ のとき、これは $\varphi_0(x_0) \leq p(\frac{x}{\alpha} + x_0) - \varphi(\frac{x}{\alpha})$ と同じで、

$\alpha < 0$ のとき、これは $-\varphi_0(x_0) \leq p(-\frac{x}{\alpha} - x_0) - \varphi(-\frac{x}{\alpha})$ と同じである。

ゆえに、 φ_0 の条件は、

$$\sup_{y \in M} \{ \varphi(y) - p(y - x_0) \} \leq \varphi_0(x_0) \leq \inf_{z \in M} \{ p(z + x_0) - \varphi(z) \} \quad \dots (1, 1)$$

ところで、

$$\varphi(y) - p(y - x_0) \leq p(z + x_0) - \varphi(z) \iff \varphi(y + z) \leq p(y + z) = p(y - x_0 + z + x_0)$$

より、 $\sup_{y \in M} \{ \varphi(y) - p(y - x_0) \} \leq \inf_{z \in M} \{ p(z + x_0) - \varphi(z) \}$ となるので、

φ_0 をとることはできる。

あとは Zorn の補題を用いた標準的な議論により、

φ は X 全体に拡張できる。

(q.e.d.)

上の定理を複素版 (つまり p : 半ノルム, $|\varphi(x)| \leq p(x)$) に直す

には、 X を実ベクトル空間とみなして、 $(\operatorname{Re} \varphi)$ は $(\operatorname{Re} \varphi_0)$ に、

$$\sup_{y \in H} \{ \operatorname{Re} \varphi(y) - p(y-x_0) \} \leq \operatorname{Re} \varphi_0(x_0) \leq \inf_{z \in H} \{ p(z+x_0) - \operatorname{Re} \varphi_0(z) \} \quad \dots (1, 1)'$$

で示す。 $\operatorname{Im} \Phi(x) = -\operatorname{Re} \Phi(ix)$ を更に満たす必要から、

$$\begin{aligned} \Phi(x) = \operatorname{Re} \Phi(x) - i \operatorname{Re} \Phi(ix) \text{ とすれば、} (\alpha + i\beta)\Phi(x) &= \operatorname{Re} \Phi(\alpha x + \beta ix) - i \operatorname{Re} \Phi(-\beta x + \alpha ix) \\ &= \Phi((\alpha + i\beta)x) \end{aligned}$$

即ち Φ は複素線型汎関数。あとは $\Phi(x)$ の偏角を考えて、

$$|\Phi(x)| = \sup_{|x|=1} \operatorname{Re} \Phi(\alpha x) \leq \sup_{|x|=1} p(\alpha x) = p(x) \text{ より従う。}$$

これより、 M の各元を $(H^\infty)^*$ の元とみて $\mathbb{C}H^\infty = \{h_1 + ih_2; h_j \in H^\infty\}$ 上にノルムを保って拡張したとき、 $\mathbb{C}H^\infty$ の元 $\tilde{h}$ に対してはどのような拡張の自由度があるであろうか。

任意の H^∞ の元 f と正数 C 、及び M の元 m に対し、

$$\operatorname{Re} m(f+C) = \operatorname{Re} m(f) + C \text{ となるのに比べ、} R \text{ 上では、}$$

$$|f - \tilde{h}| + C \geq |f+C - \tilde{h}| = \sqrt{(\operatorname{Re}(f-\tilde{h})+C)^2 + (\operatorname{Im}(f-\tilde{h}))^2} \sim \operatorname{Re}(f-\tilde{h}) + C \quad (\text{as } C \rightarrow \infty)$$

となるので、

$$\operatorname{Re} m(f) - \|f - \tilde{h}\| \leq \operatorname{Re} m(f+C) - \|f+C - \tilde{h}\| \rightarrow \operatorname{Re} m(f) - \sup \operatorname{Re}(f - \tilde{h}) \quad (\text{as } C \rightarrow \infty)$$

となる。 $\sup \operatorname{Re}(f - \tilde{h}) = a$ とおくと、 $\operatorname{Re} m(f) - \sup \operatorname{Re}(f - \tilde{h}) = \operatorname{Re} m(f - a)$ となるので、以上より、

$$\sup_{f \in H^\infty} \{ \operatorname{Re} m(f) - \|f - \tilde{h}\| \} = \sup_{f \in H^\infty} \{ \operatorname{Re} m(f); \sup \operatorname{Re}(f - \tilde{h}) = 0 \} = \sup_{f \in H^\infty} \{ \operatorname{Re} m(f); \operatorname{Re} f \leq \operatorname{Re} \tilde{h} \}$$

即ち、(1, 1)' 式はこの場合、

$$\sup_{f \in H^\infty} \{ \operatorname{Re} m(f); \operatorname{Re} f \leq \operatorname{Re} \tilde{h} \} \leq \operatorname{Re} m(\tilde{h}) \leq \inf_{f \in H^\infty} \{ \operatorname{Re} m(f); \operatorname{Re} f \geq \operatorname{Re} \tilde{h} \} \quad \dots (1, 2)'$$

となる。

上式より特に h^∞ の元 h に対しては $\text{Re } m(ih) = 0$ となるので、
 $m(h) = \text{Re } m(h)$ 。ゆえに再び上式より、 m は h^∞ 上の非負実線型汎
 函数であり、更に H^∞ の元 f に対し、 $\text{Re } m(f) = m(\text{Re } f)$ となり $(0, 1)$
 は無条件で必然であることもわかる。

次に、 $(0, 2)$ 式を基として考えようとする、Hahn-Banach
 の論法にのせるためには、 h^∞ の部分空間

$$\mathbb{R} \log |(H^\infty)^{-1}| : \{a \log |f|; a \in \mathbb{R}, f \in (H^\infty)^{-1}\} \text{ の線型包}$$

を考える必要がある。

$$\frac{\delta_1}{p_1} \log |f_1| + \frac{\delta_2}{p_2} \log |f_2| = \frac{1}{p_1 p_2} \log |f_1^{p_1 \delta_1} f_2^{p_2 \delta_2}| \quad (f_j \in (H^\infty)^{-1}, p_j \in \mathbb{N}, \delta_j \in \mathbb{Z})$$

ゆえ $\mathbb{R} \log |(H^\infty)^{-1}|$ 内で $\{\frac{1}{n} \log |f|; n \in \mathbb{N}, f \in (H^\infty)^{-1}\}$ は稠密である。一
 方、 $\mathbb{R}$ 上で $\frac{1}{n_1} \log |f_1| \leq \frac{1}{n_2} \log |f_2|$ ならば、 $\|f_1^{n_2}/f_2^{n_1}\| \leq 1$ ゆえ任意の m
 の元 m で $|(m(f_1))^{n_2}/(m(f_2))^{n_1}| \leq 1$ 、即ち $\frac{1}{n_1} \log |m(f_1)| \leq \frac{1}{n_2} \log |m(f_2)|$ 。特に
 $\mathbb{R}$ 上 $C_1 \leq \frac{1}{n} \log |f| \leq C_2$ なら、 $C_1 = \log |m(e^{C_1})| \leq \frac{1}{n} \log |m(f)| \leq \log |m(e^{C_2})| = C_2$
 となる。更に、 $\frac{1}{n_1 n_2} \log |m(f_1^{n_2} f_2^{n_1})| = \frac{1}{n_1} \log |m(f_1)| + \frac{1}{n_2} \log |m(f_2)|$ となっ
 ている。以上より、 $(0, 2)$ 式で定義した m は、 $\mathbb{R} \log |(H^\infty)^{-1}|$ 上の非負
 実線型汎函数で、 $\|m\| = m(1) = 1$ をみたす。

なお、 $\text{Re } f = \log |e^f|$ より $(0, 2)$ は $(0, 1)$ を含んでいる。

$(0, 1), (0, 2)$ 式を基として m を各々 $\text{Re } H^\infty, \mathbb{R} \log |(H^\infty)^{-1}|$ から h^∞ 上へ
 拡張したとすると、 $(1, 2)$ 式と全く同様に $(1, 1)$ 式から、

$$\sup_{u \in A} \{m(u); u \leq h\} \leq m(h) \leq \inf_{u \in A} \{m(u); u \geq h\} \cdots (1, 2)$$

となる。ここで A は各々 $\text{Re } H^\infty$, $\mathbb{R} \log |(H^\infty)^{-1}|$ (もしくは $\frac{1}{N} \log |(H^\infty)^{-1}|$ 即ち $\{\frac{1}{n} \log |f|; f \in (H^\infty)^{-1}, n \in \mathbb{N}\}$) を表す。

(ところでこの式より、 H^∞ から $\mathcal{C}(h^\infty)$ への拡張の h^∞ への制限が $\text{Re } H^\infty$ から h^∞ への拡張と一致していることがわかる。)

そこで、 h^∞ の各元に対し、 $\mathcal{M}$ の各元における自由度を与える函数として、

$$\check{h}(m) = \sup_{u \in \text{Re } H^\infty} \{m(u); u \leq h\} \quad \cdots (1, 3)$$

$$\check{h}^{(L)}(m) = \sup_{u \in \mathbb{R} \log |(H^\infty)^{-1}|} \{m(u); u \leq h\}$$

をとると、 $\text{Re } H^\infty$, $\mathbb{R} \log |(H^\infty)^{-1}|$ は $\mathcal{M}$ 上の連続函数なので、 $\check{h}$ 及び $\check{h}^{(L)}$ は $\mathcal{M}$ 上の下半連続函数である。そして $m(h) \in [\check{h}(m), -(\check{h})^{\circ}(m)]$, $m(h) \in [\check{h}^{(L)}(m), -(\check{h}^{(L)})^{\circ}(m)]$ が各々の自由度である。

さて、 h に対する m の拡張が一意となるとき、即ち $\check{h}^{\circ}(m)$ が $-(\check{h})^{\circ}(m)$ と一致するとき、($\check{h}^{\circ}$ は $\check{h}$ 又は $\check{h}^{(L)}$) $\mathcal{M}$ の各元毎の $(h^\infty)^*$ への拡張を用いて $h(m) = m(h)$ で h を $\mathcal{M}$ 上の函数とみると、 $\mathcal{M}$ 上で $\check{h}^{\circ} \leq h \leq -(\check{h})^{\circ}$ なので、 m は h の連続点となる。ゆえに任意の m で拡張が一意となる h^∞ の元は $\mathcal{M}$ 上の連続函数である。

ところで m を S 上の連続函数の集合 $C(S)$ の上に拡張することもできるが、このときの条件も同様に (1, 2), (1, 2)' の形になる。即ち、 $C_{\mathbb{R}}(S)$ の元 g に対し、 A を $\text{Re } H^\infty$, $\mathbb{R} \log |(H^\infty)^{-1}|$ として、

$$\sup_{u \in A} \{m(u); u|_S \leq g\} \leq m(g) \leq \inf_{u \in A} \{m(u); u|_S \geq g\} \dots (1,2)''$$

となる。

M 上の実連続関数 F に対し $\sup_{u \in A} \{m(u); u|_R \leq F|_R\} \leq \sup_{u \in A} \{m(u); u|_S \leq F|_S\}$ となるので、任意の m で拡張が一意的となる R^∞ の元は、その S 上への制限に $C_R(S)$ 上への拡張をあてはめても同じ値に (一意に) なる。そこで以下では $C_R(S)$ を基として

$$\check{g}(m) = \sup_{u \in \text{Re}H^\infty} \{m(u); u|_S \leq g\} \dots (1,3)''$$

$$\check{g}^{(u)}(m) = \sup_{u \in R[\log(H^\infty)]} \{m(u); u|_S \leq g\}$$

を相手に話をしていく。

なお、 $u \in A$ ならば e^u は S 上で最大値をとるので、正規族の議論により $\{e^u; u \in A, u|_S \leq \sup g\}$ は R 上 R の位相で局所同程度連続であり、 $\check{g}^\circ \geq \inf g$ ゆえに $\check{g}^\circ|_R = \log \exp \check{g}^\circ|_R$ は R の位相で連続である。更に M の Choquet 境界 ∂R 上の点 α に対しては、任意の正数 ε に対して $\text{Re}H^\infty$ の元 u_1, u_2 で $u_1|_S \leq g \leq u_2|_S$ をみたし、なおかつ $u_2(\alpha) - \varepsilon \leq g(\alpha) \leq u_1(\alpha) + \varepsilon$ となるものがとれるので、 $u_1 \leq \check{g} \leq -(-\check{g}) \leq u_2$ も用い、ゆえに $\check{g}^\circ$ は ∂R の各点で M の位相で連続である。

§2. 特異調和測度の定義と性質

R の点 P と P を含む相対コンパクト領域 D をとったとき、 λ_P^D で ∂D 上の P を中心とする調和測度を表すとする。

$$\mathcal{M} = \{u_1 \vee u_2 \vee \dots \vee u_n; u_j \in \text{Re}H^\infty, n \in \mathbb{N}\}$$

$$\mathcal{H}^{(n)} = \{u_1 v \cdots v u_n; u_j \in \mathbb{R} \log |(H^*)^{-1}|, n \in \mathbb{N}\}$$

としたとき、特異調和函数を以下のように定義する。

Definition

$P: \mathbb{R}$ 上の点

$\mu: S$ 上の正の(正則)測度

としたとき、 μ が P の特異調和測度であるとは、 P を含む任意の相対コンパクト領域 D に対し、 $d\mu \geq_{\mathcal{H}} d\lambda_P^0$ 。即ち

$$\int_S F d\mu \geq \int_{\partial D} F d\lambda_P^0 \quad \text{for } \forall F \in \mathcal{H}$$

をみたすことをいう。特に上記の $\mathcal{H}$ を $\mathcal{H}^{(n)}$ にまでできるものを Arens-Singer 特異調和測度とよぶ。

$A \subset (\mathcal{H}^0 \cap (-\mathcal{H}^0))$ であるので (A は $\mathbb{R} \log |(H^*)^{-1}|$)、上述の測度は表現測度である。(Arens-Singer) 特異調和測度の作り方としては、 $C_{\mathbb{R}}(S)$ の元 g に対し、 $g|_R$ は有界劣調和函数なので、

$U^0(g): g|_R$ の最小調和優函数 (U^0 は U 又は $U^{(n)}$ を表す)

とすると、 $C_{\mathbb{R}}(S) \ni g \mapsto -U^0(-g)(P)$ は劣加法的汎函数となっている。 $U^0(g) \geq \inf g$ ゆえ、Hahn-Banach の定理で作ったものは有界線型汎函数、即ち S 上の測度で $\int_S g d\mu \leq -U^0(-g)(P)$ 。ゆえに

$$\int_S g d\mu \geq U^0(g)(P) \cdots (2, 1)$$

となるので、 $g \geq 0$ ならばその像は非負、即ち μ は正の測度。

$\mathcal{F}_p^\circ$ の元 F に対し、 $(F|_S)^\circ \geq F$ なので $U^\circ(F|_S) \geq F|_R$ であるので、

$$\int_D F d\lambda_p^\circ \leq \int_D U^\circ(F|_S) d\lambda_p^\circ = U^\circ(F|_S)(p) \leq \int_S F d\mu \quad \text{となる。}$$

(2,1) 式から (Arens-Singer) 特異調和測度であることを導いたが、これは逆もいえる。

Theorem

p を R 上の点として、 S 上の測度 μ が p の (Arens-Singer) 特異調和測度となる条件は、 $C_R(S)$ の任意の元 g に対し、(2,1) 式が成立することである。

(証明)

十分性は既に述べたので必要性を示す。

A を $\operatorname{Re} H^\infty$, $R \log |H^\infty|^{-1}$ として、 $C_R(S)$ の各元 g に対し、函数族 $\{(\inf g) \vee u_1 \vee \dots \vee u_n; u_j \in A, u_j|_S \leq g, n \in \mathbb{N}\}$ は R 上局所同程度連続なので、この中から連続函数 $\mathcal{F}_p^\circ$ へ局所一様収束する列 $\{F_n\}$ がとれる。

$F_n \in \mathcal{F}_p^\circ$ ゆえ、 $\int_S g d\mu \geq \int_S F_n d\mu \geq \int_D F_n d\lambda_p^\circ \rightarrow \int_D \check{g} d\lambda_p^\circ$ (as $n \rightarrow \infty$)

ここで D は p を含む相対コンパクト領域である。よって、

$$\int_S g d\mu \geq \sup_{D \subset R} \int_D \check{g} d\lambda_p^\circ = U^\circ(g)(p) \quad \text{となる。}$$

(q.e.d.)

K を R^n の台空間 (即ち $K = \{\varphi \in (R^n)^*; \|\varphi\| = \varphi(1) = 1\}$) としたとき、

$\partial_e K$: K の Choquet 境界

は K の Si lo v 境界でもあり、更に $h^\infty|_{\partial eK} = C_R(\partial eK)$, ∂eK は極端非連結となっている。

K 各点の ∂eK への表現測度は一意になるが、 R 上の点 P, q のときは Harnack の不等式より Harnack の函数 $P(P, q)$ を用い、

$$\int_{\partial eK} h P(P, q) d\tau_P \geq \int_{\partial eK} h d\tau_q \geq \int_{\partial eK} h \frac{d\tau_P}{P(P, q)} \quad \text{for } h \in C_R^+(\partial eK)$$

となる。ここで τ_P, τ_q は各々 P, q の表現測度である。これによ

って、 $P(P, q) \geq \frac{d\tau_q}{d\tau_P} \geq \frac{1}{P(P, q)}$ となる。特に $\text{supp}(\tau_P) = \overline{\text{supp}(\tau_q)}$ 。

これより $\text{supp}(\tau_P) = \partial eK$ となる。一方、 τ_P は正規測度、即ち $B = \partial B$ であるならば $\tau_P(\partial B) = 0$ となっているので、 τ_P の正則性から任意の可測集合 E で $\tau_P(E) = \tau_P(\text{Int} E) = \tau_P(\overline{\text{Int} E})$ である。 $\overline{\text{Int} E}$ の定義函数は連続なので、 $L^\infty(\tau_P) = C(\partial eK)$ とみなせる。

以下 R 上の点 P を 1 つ固定し、 $P(q, \cdot) = \frac{d\tau_q}{d\tau_P} \in C_R^+(\partial eK)$ とすると次のことが成立する。

Lemma

P は $R \times \partial eK$ 上の連続函数であり、更に任意の ∂eK の元 k に対し、 $P(\cdot, k)$ は R 上の調和函数である。

(証明)

Harnack の不等式より、任意の R 上の二点 q_1, q_2 に対して

$$\int_{\partial eK} h P(q_1, q_2) P(q_1, \cdot) d\tau_P \geq \int_{\partial eK} h P(q_2, \cdot) d\tau_P \geq \int_{\partial eK} h \frac{P(q_1, \cdot)}{P(q_1, q_2)} d\tau_P \quad \text{for } h \in C_R^+(\partial eK)$$

ゆえに、 $P(q_j, \cdot)$ の連続性と $\text{supp}(\tau_P) = \partial eK$ も用いて

$P(g_1, g_2)P(g_1, k) \geq P(g_2, k) \geq \frac{P(g_1, k)}{P(g_1, g_2)}$ for $\forall k \in \partial_e K$ となる。よって

$$P(P, g_1) \geq P(g_1, k) \geq 1/P(P, g_1) \quad \dots (2, 2)$$

$$\sup_{k \in \partial_e K} |P(g_1, k) - P(g_2, k)| \leq (P(g_1, g_2) - 1)P(P, g_1)$$

となるので、 P は R 側で同程度連続。ゆえに $R \times \partial_e K$ 上 P は連続となる。

g_1 を含む相対コンパクト領域 D に対し、任意の $h \in C_c^\infty$ の元 h で

$$\begin{aligned} \iint h(k) P(g, k) d\lambda_{g_1}^D(g) d\tau_p(k) &= \iint h(k) P(g, k) d\tau_p(k) d\lambda_{g_1}^D(g) = \int h(g) d\lambda_{g_1}^D(g) = h(g_1) \\ &= \int h(k) P(g_1, k) d\tau_p(k) \end{aligned}$$

よって前述と同様に $\int_{\partial D} P(\cdot, k) d\lambda_{g_1}^D = P(g_1, k)$ 即ち $P(\cdot, k)$ は調和函数。
(g. e. d.)

この P を利用して各点での特異調和測度をうつしあうことを考えるが、そのために更に1つの命題を要する。

Proposition

X : 実ベクトル空間

p_j : X 上の劣加法的汎函数 ($1 \leq j \leq n$)

φ : X 上の実線型汎函数で、 $\varphi \leq \sum_{j=1}^n p_j$ をみたす

としたとき、

φ_j : X 上の実線型汎函数で、 $\sum_{j=1}^n \varphi_j = \varphi$, $\varphi_j \leq p_j$ をみたすものがとれる。

(証明)

X^n 上の劣加法的汎函数 $\tilde{\varphi}$ として、 $X^n \ni (x_1, \dots, x_n) \xrightarrow{\tilde{\varphi}} \sum_{j=1}^n p_j(x_j)$ をとると、Hahn-Banachの定理により X の部分空間 $M = \{(x, \dots, x); x \in X\}$ 上の汎函数 $\tilde{\varphi}(x, \dots, x) = \varphi(x)$ は X^n 全体にのびる。

$\varphi_j(x_j) = \tilde{\varphi}(0, \dots, 0, x_j, 0, \dots, 0)$ とすると、 $\varphi_j(x) \leq \sum_{k \neq j} p_k(0) + p_j(x) = p_j(x)$ で、
 $\sum_{j=1}^n \varphi_j(x) = \tilde{\varphi}(x, \dots, x) = \varphi(x)$ となり題意をみたす。

(q. e. d.)

Theorem $P: R$ 上の点 $\mu: P$ の(Arens-Singer)特異調和測度としたとき、以下のような $R \times S$ 上の函数 Q がとれる。i) $Q(z, \cdot) \in L_+^\infty(\mu)$ ii) $Q(z, \cdot) d\mu$ は z の(Arens-Singer)特異調和測度となる。iii) 任意の $L_R^\infty(\mu)$ の元 h に対して $\int_S h Q(z, \cdot) d\mu$ は R 上の調和函数で、 $\text{ess. inf } h \leq \int_S h Q(z, \cdot) d\mu \leq \text{ess. sup } h$ である。iv) 任意の $C_R(S)$ の元 g に対し、 $\partial \in R$ の各点に (m) の位相で連続にのび、そこで g に一致する。ゆえに特に

$$\inf g = \inf_z \int_S g Q(z, \cdot) d\mu, \quad \sup g = \sup_z \int_S g Q(z, \cdot) d\mu$$

(証明)

$\mathcal{O} = \{\{O_j\}_{j=1}^n; \partial \in K \text{ の有限分割で、各 } O_j \text{ は空でない開かつ閉集合}\}$

という族に対して“細分”で順序を入れる。即ち、

$$\{O_j\}_{j=1}^n < \{O'_k\}_{k=1}^N \Leftrightarrow \text{任意の } O'_k \text{ がある } O_j \text{ に含まれる。}$$

これにより $(\mathcal{O}, <)$ は有向集合となる。

各分割 $\{O_j\}_{j=1}^n$ に対し $C_R(S)$ 上の劣加法的汎函数

$$C_R(S) \ni g \mapsto - \int_{O_j} U(-g) d\tau_p \quad \text{を考えると、} \quad \int_S g d\mu \leq -U(-g)(p) \text{ ゆえ}$$

$$\int_S g d\mu = \sum_{j=1}^n \int_S g d\mu_j, \quad \int_S g d\mu_j \leq - \int_{O_j} U(-g) d\tau_p \quad \text{即ち} \quad \int_S g d\mu_j \geq \int_{O_j} U(g) d\tau_p$$

を任意の $C_R(S)$ の元 g に対してみたす S 上の測度 μ_j がとれる。

これらは正の測度ゆえ、 $d\mu_j = h_j d\mu$, $\sum_{j=1}^n h_j = 1$ なる $L^{\infty}(\mu)$ の函数 h_j がある。

分割毎に $O_j \ni k_j$ を各々固定しておき、 $P_j(z) = P(z, k_j)$ とおく。す

ると (2,2) より $P(p, z) \geq \sum_{j=1}^n P_j(z) h_j \geq \frac{1}{P(p, z)}$ となる。

ところで $E_z = \{f \in L^{\infty}(\mu); \|f\| \leq P(p, z)\}$ は汎弱コンパクトなので、

部分有向点族をとって $\{\sum_{j=1}^n P_j(z) h_j\}_{z \in R} \rightarrow \{Q(z, \cdot)\}_{z \in R} \in \prod_{z \in R} L^{\infty}(\mu)$ と上述の位相で収束するとしてよい。すると再び (2,2) を用いて、

$$P(p, z) \geq Q(z, m) \geq 1/P(p, z) \quad \text{for } \mu\text{-a.e. } m \quad \dots (2,2)'$$

$$\|Q(z_1, \cdot) - Q(z_2, \cdot)\| \leq (P(z_1, z_2) - 1) P(p, z_1)$$

ゆえに Q の Gelfand 変換 $\hat{Q}$ は $R \times \mathcal{M}(L^{\infty}(\mu))$ 上の連続函数である。
($\mathcal{M}(L^{\infty}(\mu))$ は $L^{\infty}(\mu)$ の maximal ideal space)

任意の R 上の点 z に対し、それを含む相対コンパクト領域

D をとると、 $\int_{\partial D} \sum_{j=1}^n P_j(w) h_j(k) d\lambda_z^p(w) = \sum_{j=1}^n P_j(z) h_j(k)$ であり、(2,2) 式より

任意の正数 ε に対し十分各成分の直径の小さい ∂D の分割

$\{E_k\}_{k=1}^N$ をとると、各 E_k から z_k をとって、任意の $\{0_j\}_{j=1}^N$ で

$\|\sum_{j=1}^N P_j(z_k) \lambda_z^0(E_k) h_j - \sum_j P_j(z) h_j\| \leq \varepsilon$ となる。また、 $\hat{Q}$ の連続性から

$\{E_k\}$ をさらに細かく分けて、 $|\int_{\partial D} \hat{Q}(\cdot, \hat{m}) d\lambda_z^0 - \sum_k \hat{Q}(z_k, \hat{m}) \lambda_z^0(E_k)| \leq \varepsilon$ と

できる。前者の極限をとると、 $\|\sum_k Q(z_k, \cdot) \lambda_z^0(E_k) - Q(z, \cdot)\| \leq \varepsilon$ ゆ

えに $|\int_{\partial D} \hat{Q}(\cdot, \hat{m}) d\lambda_z^0 - \hat{Q}(z, \hat{m})| \leq 2\varepsilon$ となる、即ち $\hat{Q}(\cdot, \hat{m})$ は調

和函数である。これより $L_{\mathbb{R}}^{\infty}(\mu)$ の元 h に対して、

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} \int_S h Q(w, \cdot) d\mu d\lambda_z^0(w) &= \int_{\partial D} \int_S \hat{h} \hat{Q}(w, \cdot) d\hat{\mu} d\lambda_z^0(w) = \int_S \hat{h} \int_{\partial D} \hat{Q}(w, \cdot) d\lambda_z^0(w) d\hat{\mu} \\ &= \int_S \hat{h} \hat{Q}(z, \cdot) d\hat{\mu} = \int_S h Q(z, \cdot) d\mu \quad \text{即ち} \quad \int_S h Q(z, \cdot) d\mu \text{ は調和函数。} \end{aligned}$$

さて、 $C_{\mathbb{R}}(S)$ の元 g に対して $\int_S g \sum_j P_j(z) h_j d\mu \geq \sum_j \int_{O_j} U(g) P_k(z) d\tau_p$ ゆえ、

両辺とも極限をとれば、 $\int_S g Q(z, \cdot) d\mu \geq U^0(g)(z)$ 即ち $Q(z, \cdot) d\mu$ は

z の (Arens-Singer) 特異調和測度である。これは特に確率測度なので、以上のことより i)~iii) まではいえた。

iv) は、 $\check{g}(z) \leq U^0(g)(z) \leq \int_S g Q(z, \cdot) d\mu \leq -U^0(-g)(z) \leq -(-\check{g})(z)$ より従う。

(q.e.d.)

§3. M 上“必然”的に連続となる有界調和函数、即ち

Hahn-Banach の拡張が一意的となる函数族について

上述の定理によつて、任意の (Arens-Singer) 特異調和測度 μ_0 に対し、

$\{\mu_z: (\text{Arens-Singer}) \text{ 特異調和測度}; z \in \mathbb{R}, \mathbb{R} \ni w_1, w_2 \text{ で } \mu_{w_1} \sim \mu_{w_2}\} \ni \mu_0$
 というものがとれる。 $(\mu_1 \sim \mu_2 \Leftrightarrow \mu_1 \text{ と } \mu_2 \text{ が互いに絶対連続})$

これを用いて次のような命題が成り立つ。

Proposition

$g: S$ 上の実連続函数

としたとき、 $\check{g}^\circ$ が R 上調和函数となる条件は、 $\{u \in A; u|_S \leq g\}$ の中の函数列 $\{u_n\}$ で、 R 上各点で $\check{g}^\circ$ に収束するものがとれることである。 $(A: \operatorname{Re} H^\infty \text{ 又は } R \log |(H^\infty)^{-1}|)$

(証明)

十分性は正規族の話より、 $\{e^{u_n}\}$ は R 上局所一様に $e^{\check{g}^\circ}$ へ収束するが、 $e^{\check{g}^\circ} \geq \exp \inf g > 0$ ゆえ、 $\{u_n\}$ も局所一様収束する。ゆえに $\check{g}^\circ$ は調和函数である。

次に必要性を示そう。 $A \cup \{g\}$ の線型包上の実線型汎函数 φ で、 $\varphi(u) = u(P)$, $\varphi(g) = \check{g}^\circ(P) = U^\circ(g)(P)$ となる R 上の点 P があるものをとると、 $\varphi(-g) = -U^\circ(g)(P)$, $\varphi(g) \leq -U^\circ(-g)(P)$ なので Hahn-Banach の定理によって $C_R(S)$ 上の汎函数に $\varphi(g') \leq -U^\circ(-g)(P)$ でのびる。すると、(2.1) 式を導いたのと同じく、 φ を S 上に表現した測度 μ は (Arens-Singer) 特異調和測度となる。

$\{u \in A; u|_S \leq g\}$ から、点 P で $\check{g}^\circ(P)$ に収束する列 $\{u_n\}$ をとると、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_S |g - u_n| d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_S g d\mu - \int_S u_n d\mu \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\check{g}^\circ(P) - u_n(P)) = 0 \quad \text{ゆえ、}\{u_n\} \text{ は } g$$

に $L^1(\mu)$ で収束する。よって (2.2)' より μ に対応した Q を用い

$$\text{て、} \check{g}^\circ(P) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_S u_n Q(z, \cdot) d\mu = \int_S g Q(z, \cdot) d\mu \geq U^\circ(g)(P) \geq \check{g}^\circ(P) \text{ となる。}$$

即ち $u_n(z) \rightarrow \check{g}^0(z)$ (for $z \in R$) となる。

(q.e.d.)

なお、上の証明からこの状況ではうまい (Arens-Singer) 特異調和測度 μ を用いて、 $\check{g}^0(z) = U^0(g)(z) = \int g Q(z, \cdot) d\mu$ とできる。

上の命題を用いて以下の定理が導かれる。

Theorem

R : リーマン面

$\mathcal{M}$: $H^\infty(R)$ の maximal ideal space

S : $\mathcal{M}$ の Šilov 境界

としたとき、 $C(S)$ 上への $\mathcal{M}$ の各元の (双対空間としての) ノルムを保つ拡張のやり方によらず、各元に対する値が変わらない $C_R(S)$ の元 g の条件は、

$\sup\{ \operatorname{Re} f(z); f \in H^\infty, \operatorname{Re} f|_S \leq g \}$ が R 上の調和函数

となっていることである。

(証明)

必要性は、拡張の一意性の条件が $\check{g} = -(-\check{g})$ であり、この等号の左辺が劣調和、右辺が優調和ゆえ、 $\check{g}$ は調和函数となる。

十分性は、前命題で作った $\{u_n\}$ に対し $(H^\infty)^+$ の元 F_n を、 $|F_n|$ が e^{u_n} となるようにとると、正規族の議論により部分列をと

て F_n が R 上局所一様に H^∞ の元 F に収束する。

$|F|$ は R 上 $\exp \check{g}$ に一致し、 $\check{g}$ は ∂R の各点で連続であり、そこで g に一致するので、 M 上の連続関数 $|F|$ は $\overline{\partial R}$ 、即ち S 上で e^g に一致する。

$\check{g} \geq \inf g$ ゆえ $F \in (H^\infty)^{-1}$ であるが、任意の正の数 ϵ に対して、 $t g$ も条件をみたすので同様に作った関数を F_t とおく。

M の各元 m とその S 上の二つの表現測度 μ_1, μ_2 をとると、

$$1 = |m(F_t \cdot F_t^{-1})| = |m(F_t)| |m(F_t^{-1})| \leq \int_S |F_t| d\mu_1 \int_S |F_t|^{-1} d\mu_2 = \int_S e^{t g} d\mu_1 \int_S e^{-t g} d\mu_2$$

さて、 $e^{t g} = 1 + t g + O(t^2 \|g\|^2)$ ($\text{as } R \ni t \rightarrow 0$) なので、上式より、

$$\int_S t g d\mu_1 - \int_S t g d\mu_2 + O(t^2 \|g\|^2) \geq 0 \quad \text{ゆえに} \quad \int_S g d\mu_1 \geq \int_S g d\mu_2 \quad \text{となる。}$$

μ_1, μ_2 は任意であったので役割を入れかえても成立する。再び任意性から結局、 m の任意の二つの S 上への拡張の測度表現 μ_1, μ_2 に対し、

$$\int_S g d\mu_1 = \int_S g d\mu_2 \quad \text{となる。}$$

(q. e. d.)

(C, 2) を基にした場合、上に有界な関数の局所一様収束先を M 上の関数として“自然”な見方ができないので、上述の定理の十分性の側は、同じ論法でいくには $\{u_j\}$ の列は $u_j = \frac{1}{n_j} \log |f_j|$ で、

$\lim_{j \rightarrow \infty} n_j < \infty$ となるもの、即ち $\{u_j\}$ として、 $\{\frac{1}{n} \log |f_j|; f_j \in (H^\infty)^{-1}\}$ の形で

とれる必要があるが、その結果としては $\check{g} = \frac{1}{n} \log |F|$ となってしまう。

(0, 1) を基とした場合の強みは、 $\text{Re } H^\infty$ の元 u から $|F_u| = e^u$

で作った $F_u \in (H^\infty)^{-1}$ が任意乗根をもつことにある。この状況を明解に反映した結果として次の定理をあげておく。

Theorem

H^∞ の元 u が、 M の任意の元におけるノルムを保つ双対空間としての拡張に対して、各元毎に拡張によらず一意に定まる条件は、 u が共役調和函数をもつことである。

(証明)

必要性は、前定理の証明より、 $|F|=e^u$ となる $F \in (H^\infty)^{-1}$ をとると、 F は任意の正の数 t に対しても乗根 F_t がとれるので、 u は共役調和函数 $\arg F$ をもつ。

十分性を示すには、まず $F_t = \exp t(u + i^*u)$ (t は実数、 *u は u の共役調和函数) とおくと、 $u = \log |F|$ で M 上の連続函数とみなせる。

前述のように $\check{u} \leq (\check{u}|_S)$ であるが、 H^∞ の元 f で $\operatorname{Re} f|_S \leq u|_S$ となるものをとると、 R 上の点 z の Arens-Singer 測度で測ったとき $\|e^f / F\|_S \leq 1$ ゆえ、 $\operatorname{Re} f(z) \leq u(z)$ となる。即ち $\check{u} = (\check{u}|_S)$ である。ゆえに R 上 $(\check{u}|_S) \leq u$ である。

逆向きを示すのに、 R の点 z に対して簡単のため $u(z) = 0$ 、 $F_t(z) = 1$ とすると、 $Q_t = \frac{F_t - 1}{t}$ ($t > 0$) は $\operatorname{Re} Q_t \leq \frac{e^{tu} - 1}{t}$, $\operatorname{Re} Q_t(z) = 0$ 。

ところで $\frac{e^{tu}-1}{t}$ は一様に $u \wedge 1$ いく ($as t \rightarrow 0$) ので、結局 $\check{u}(z) = 0$ となる。即ち R 上 $u \leq \check{u} \leq (\check{u}|_S)$

よって $(\check{u}|_S)$ は調和函数に R 上でなっているので前定理より $(\check{u}|_S) = -(-\check{u}|_S)$ となる。

ゆえに R 上 $\check{u} = (\check{u}|_S) = -(-\check{u}|_S) = -(-u)$ となり、拡張は一意的となる。

(q.e.d.)

(注) $C_R(S)$ の任意の元の拡張が一意的となるときは、 $H^\infty(R)$ は単位円板のそれと algebra として同型となることが知られている。(松岡[1])

参考文献

- [1] 松岡長一郎 「Bounded harmonic ...」 (J. Math. Kyoto Univ. 22-1
175-190 (1982))
- [2] K. Hoffman 「Analytic functions ...」 (Acta. Math. 108 (1962) 271-317)
- [3] T.W. Gamelin 「The Shilov boundary ...」 (Amer. J. Math. 96 (1974) 79-103)
- [4] , , 「Uniform algebras and Jensen Measures」 (London Math. Soc.
Lect. Notes Ser. 32 (1978))