

$\hat{C} \setminus \{0\}$ の有限葉非有界被覆面の Martin 境界

瀬川重男 (大同工業大学)

正岡 弘照 (京都産業大学理学部)

0. W を $\hat{C} \setminus \{0\}$ の m 葉非有界被覆面 ($1 < m < \infty$) とし, π を W から $\hat{C} \setminus \{0\}$ への射影とする. $\hat{C} \setminus \{0\}$ の Martin compact 化は $\hat{C}$ と同一視されることはよく知られている. W^* を W の Martin compact 化, $\Delta^\sim$ を W の Martin 境界, $\Delta_1^\sim$ を W の minimal 境界とする. まず, 既知の結果を掲げる.

定理 A(Heins [H]). $1 \leq \#\Delta_1^\sim \leq m$.

$\mathcal{M}(0) := \{M | M \text{ は } \hat{C} \setminus \{0\} \text{ 内の領域で, } \hat{C} \setminus M \text{ は } 0 \text{ で thin である.}\}$

$M \in \mathcal{M}(0)$ に対し, $n(M)$ で $\pi^{-1}(M)$ の成分の個数を表すものとする. $\#\Delta_1^\sim$ は次で特徴付けられる.

定理 B([M-S 2]). $\#\Delta_1^\sim = \max_{M \in \mathcal{M}(0)} n(M)$.

$\Delta^\sim$ の形状を議論したい. 以下の議論では, W として, 次のようにして構成される Heins の m 葉非有界被覆面を考察する. $\{a_n\}, \{b_n\}$ を $0 < a_{n+1} < b_n < a_n < 1, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ をみたす数列とする. $C = \hat{C} \setminus I (I = \bigcup_{n=1}^\infty I_n, I_n = [b_n, a_n])$ とおく. $C_1, \dots, C_m$ を C の copy とする. $j = 1, \dots, m$ に対し C_j 上の切り口 I の下岸と C_{j+1} 上の切り口 I の上岸を溶接して $(j \bmod m)$ 得られる $\hat{C} \setminus \{0\}$ の m 葉 cyclic 非有界被覆面を Heins の m 葉非有界被覆面と言う. 定理 B より, 次を得る.

命題 0.1([M-S 1]). このとき,

- 1) I が 0 で thin であるならば, $\#\Delta_1^\sim = m$.
- 2) I が 0 で thin でないならば, $\#\Delta_1^\sim = 1$.

$D = \{|z| < 1\}, D_0 = D \setminus \{0\}, D_0^\sim = \pi^{-1}(D_0)$ とおくと, $D_0, D_0^\sim$ の Martin 境界はそれぞれ, $\{0\} \cup \partial D, \Delta^\sim \cup \pi^{-1}(\partial D)$ と同一視される. また, $D_0, D_0^\sim$ の minimal 境界はそれぞれ, $\{0\} \cup \partial D, \Delta_1^\sim \cup \pi^{-1}(\partial D)$ と同一視される. 今後は $\hat{C} \setminus \{0\}, W$ のかわりに $D_0, D_0^\sim$ を考察する. $p^\sim \in \Delta_1^\sim$ で極をもつ $D_0^\sim$ 上の Martin 関数を $k_{p^\sim}$ と記すことにする. I は 0 で thin であるとする. 命題 0.1 より, $\#\Delta_1^\sim = m$. よって, $\Delta_1^\sim = \{p_1^\sim, \dots, p_m^\sim\}$ とおく. このとき, 命題 0.1 と $\Delta^\sim$ の連結性より, $m = 2$ に対しては, 次が従う.

系 0.1. 1) I が 0 で thin であり, $m = 2$ とする. このとき, $\Delta^\sim = [p_1^\sim, p_2^\sim]$. ここで,

$$[p_1^\sim, p_2^\sim] = \{p^\sim \in \Delta^\sim | k_{p^\sim} = tk_{p_1^\sim} + (1-t)k_{p_2^\sim} \quad (t \in [0, 1])\}.$$

2) I が 0 で thin でないとする. このとき, $\Delta^\sim = \{1 \text{ 点}\}$.

この系より, I が 0 で thin であるという仮定のもとで, $m > 2$ のときの $\Delta^\sim$ の形状が問題になる. 以下では, 話を簡単にするために $m = 3$ の場合を考察する. また, $k_{p_j^\sim}(a_1^\sim) = 1$

($j = 1, \dots, m$) をみたすとする. $a_1^\sim$ は $\pi(a_1^\sim) = a_1$ をみたす点とする. $p_0^\sim$ をそれを極にもつ Martin 関数が $\frac{1}{3}(k_{p_1^\sim} + k_{p_2^\sim} + k_{p_3^\sim})$ で与えられる $\Delta^\sim$ の元とする.

このとき, 次を得る.

主定理. I が 0 で thin であり, $m = 3$ とする. このとき, $\{I_n\}$ が十分速く 0 に収束するならば, $\Delta^\sim = [p_0^\sim, p_1^\sim] \cup [p_0^\sim, p_2^\sim] \cup [p_0^\sim, p_3^\sim]$.

1. 準備

1.1. R を開 Riemann 面とし, $R^\sim$ を R の m 葉非有界被覆面 ($1 < m < \infty$) とし, $\pi = \pi_{R^\sim}$ を $R^\sim$ から R への射影とする. まず, $R \notin O_G$ と仮定する. このとき, $R^\sim \notin O_G$ となることに注意する (cf. [A-S], [S-N]). $g_z^R = g^R(\cdot, z)$ ($z \in R$) (resp. $g_{z^\sim}^{R^\sim} = g^{R^\sim}(\cdot, z^\sim)$ ($z^\sim \in R^\sim$)) を z (resp. $z^\sim$) で極をもつ R (resp. $R^\sim$) 上の Green 関数とする. 定点 $a \in R$ (resp. $\pi_{R^\sim}(a^\sim) = a$ となる $a^\sim \in R^\sim$) に対し, $k_z^R = g_z^R / g_z^R(a)$ (resp. $k_{z^\sim}^{R^\sim} = g_{z^\sim}^{R^\sim} / g_{z^\sim}^{R^\sim}(a^\sim)$) を z (resp. $z^\sim$) を極とする R (resp. $R^\sim$) 上の **Martin 関数** と言う.

$$\Sigma(R) := \{\{z_n\} \subset R \mid R \text{ 上, } \lim_{n \rightarrow \infty} k_{z_n}^R \text{ が存在する.}\}$$

とおく. $\{z_n\}, \{\zeta_n\}$ に対して, 同値関係 $\sim$ を次式

$$\{z_n\} \sim \{\zeta_n\} \iff R \text{ 上, } \lim_{n \rightarrow \infty} k_{z_n}^R = \lim_{n \rightarrow \infty} k_{\zeta_n}^R.$$

で定義する. $\Delta^R := \Sigma(R) / \sim$ を R の **Martin 境界** と言う. また, $R^* := R \cup \Delta^R$ を R の **Martin compact 化** と言う (cf. [C-C], [HL]). 同様にして, $R^\sim$ の Martin 境界 $\Delta^{R^\sim}$, Martin compact 化 $(R^\sim)^*$ が定義される. $\{f_w(\cdot) \mid f_w(\cdot) = k^R(w), w \in R\}$ の各関数が $[0, \infty]$ 値連続拡張をもつ R の最小の compact 化と R の Martin compact 化とが一致することが知られている (cf. [C-C], [HL]). $p \in \Delta^R$ (resp. $p^\sim \in \Delta^{R^\sim}$) に対し, $k_p^R := \lim_{R \ni z \rightarrow p} k_z^R$ (resp. $k_{p^\sim}^{R^\sim} := \lim_{R^\sim \ni z^\sim \rightarrow p^\sim} k_{z^\sim}^{R^\sim}$) とおき, k_p^R (resp. $k_{p^\sim}^{R^\sim}$) を p (resp. $p^\sim$) で極をもつ R (resp. $R^\sim$) 上の **Martin 関数** と言う. k_p^R (resp. $k_{p^\sim}^{R^\sim}$) は R (resp. $R^\sim$) 上, 正值調和であり, $k_p^R(a) = 1$ (resp. $k_{p^\sim}^{R^\sim}(a^\sim) = 1$) をみたす. R^* (resp. $(R^\sim)^*$) 上に, 次式で距離 d (resp. $d^\sim$) を定義すると, d (resp. $d^\sim$) は上で述べた R^* (resp. $(R^\sim)^*$) の位相と同値な位相を与える.

$$d(p, q) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left| \frac{k_p^R(z_n)}{1 + k_p^R(z_n)} - \frac{k_q^R(z_n)}{1 + k_q^R(z_n)} \right| \quad (p, q \in R^*)$$

$$(\text{resp. } d^\sim(p^\sim, q^\sim) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left| \frac{k_{p^\sim}^{R^\sim}(z_n^\sim)}{1 + k_{p^\sim}^{R^\sim}(z_n^\sim)} - \frac{k_{q^\sim}^{R^\sim}(z_n^\sim)}{1 + k_{q^\sim}^{R^\sim}(z_n^\sim)} \right| \quad (p^\sim, q^\sim \in (R^\sim)^*),$$

ここで, $\{z_n\} \subset R$ (resp. $\{z_n^\sim\} \subset R^\sim$) は R (resp. $R^\sim$) 上の稠密集合とする. また, $p \in \Delta^R$ に対し, k_p^R が **minimal 関数** ($\iff R$ 上の正值調和関数 h が $0 \leq h \leq k_p^R$ をみたすとき, $h = ck_p^R$ となる正定数 c が存在する) であるとき, p を **minimal (境界) 点** であると言う. R (resp. $R^\sim$) の minimal 点全体 Δ_1^R (resp. $\Delta_1^{R^\sim}$) を **minimal 境界** と言う. よく知られているように, 各 R 上の正值調和関数 h は R の minimal Martin 境界 Δ_1^R 上の正測度 μ と R 上の Martin 関数 k_p^R により,

$$h(z) = \int_{\Delta_1^R} k_p^R(z) d\mu(p)$$

と積分表現される (Martin の表現定理 cf. [C-C], [HL]).

$R \in O_G$ の場合, R の局所円板 U をとり (このとき, $R \setminus Cl_R(U) \notin O_G$, ここで, $Cl_R(U)$ は U の R における閉包を表す), $R^* = (R \setminus Cl_R(U))^* \cup Cl_R(U)$ を R の Martin compact 化と言う. $\Delta^R = R^* \setminus R$ は U の取り方によらないことに注意する.

1.2. R を開リーマン面とし, $R \notin O_G$ と仮定する. R 上の正值優調和関数全体を $\mathcal{S}_R$ で表す. $s \in \mathcal{S}_R$ と $E \subset R$ に対し,

$${}^R\hat{R}_s^E(z) := \liminf_{w \rightarrow z} \inf \{u(w) \mid u \in \mathcal{S}_R, u \geq s \text{ on } E\}$$

を E に関する s の **balayage** と言う. (balayage の基本事項については, [C-C], [HL], [B], [B-H] 等を参照のこと).

$g_z^R = g^R(\cdot, z)$ ($z \in R$) を z で極をもつ R 上の Green 関数とする. 次に, thinness の定義を与える (thinness の基本事項については, [B], [B-H], [HL] 等を参照のこと).

定義 1.1. $\zeta \in R$ とする. R の部分集合 E が ζ で **thin** であるとは, ${}^R\hat{R}_{g_\zeta^R}^E \neq g_\zeta^R$ が成立することである.

また, R の開部分集合 U に対し, $U \cup \{\zeta\}$ が ζ の **細近傍** (fine neighborhood) であるとは $R \setminus U$ が ζ で thin とあることである.

この近傍系によって導入される位相を **細位相** (fine topology) と言う. 細位相はすべての R 内の正值優調和関数を連続にする最弱の位相であり, R の通常の位相より細かい位相であることが知られている.

定義 1.2. U を R の部分領域とし, ζ を ∂U の (Dirichlet 問題の意味の) 非正則境界点とし, f を U 上の実数値関数とする. このとき, f が ζ で **細極限** (fine limit) γ をもつとは, 任意の ϵ に対して, ある ζ の細近傍 V が存在して,

$$z \in V \setminus \{\zeta\} \implies |f(z) - \gamma| < \epsilon$$

がなりたつことである.

今後, 上の γ を $\mathcal{F}\text{-}\lim_{z \rightarrow \zeta} f(z)$ と記すことにする. 細極限に関しては 次の命題が知られている.

命題 1.1. U を R の部分領域とし, ζ を ∂U の (Dirichlet 問題の意味の) 非正則境界点とし, s を U 上の正值優調和関数とする. このとき, s は ζ で細極限をもつ.

2. $D_0^\sim$ 上の Green 関数の境界挙動

2.1. $\{a_n\}, \{b_n\}, I_n, I, C$ を 0 節と同じものとする. W を C を用いて以下のように構成される Heins の 3 葉非有界被覆面とする. C_1, C_2, C_3 を C の copy とする. $j = 1, 2, 3$ に対し C_j 上の切り口 I の下岸と C_{j+1} 上の切り口 I の上岸を溶接して $(j \bmod 3)$ 得られる $\hat{C}$ の 3 葉 cyclic 非有界被覆面を W とおく. π を W 上の射影, $\tau^\sim$ を $C_{j+1} = \tau^\sim(C_j)(j \bmod 3)$ をみたす W 上の被覆変換とする. $D_0^\sim = \pi^{-1}(D_0)$, $I_n^\sim = \pi^{-1}(I_n)$, $I^\sim = \bigcup_{n=1}^\infty I_n^\sim$ とおく. $p^\sim \in \Delta^\sim$ に対して, $k_{p^\sim}$ を $p^\sim$ で極をもつ W 上の Martin 関数とする. $z^\sim \in W$ に対して, $g_{z^\sim}$ を $z^\sim$ で極をもつ W 上の Green 関数とする.

補題 2.1([H]). $p^\sim$ を $\Delta_1^\sim$ の点とし, $\{z_n^\sim\} \subset W$ を $p^\sim$ に収束するとする. このとき, $D_0^\sim$ 上, $\lim_{n \rightarrow \infty} g_{z_n^\sim}^\sim$ が存在して, それを $g_{p^\sim}^\sim$ と表すと, $g_{p^\sim}^\sim$ は $D_0^\sim$ 上の正直調和関数となり, $D_0^\sim$ 上,

$$k_{p^\sim} = \frac{g_{p^\sim}^\sim}{g_{p^\sim}^\sim(a^\sim)}.$$

この補題により, 以下の対応

$$p^\sim \longleftrightarrow k_{p^\sim} \longleftrightarrow g_{p^\sim}^\sim$$

は全単射になる. 今後は $k_{p^\sim}$ のかわりに $g_{p^\sim}^\sim$ を考察することにする. $\Delta_1 = \{p_1^\sim, p_2^\sim, p_3^\sim\}$ とおく. 定理 B の証明 ([M-S 2] を参照) より, 各 $C_j (j = 1, 2, 3)$ に対して, $p_j^\sim \in \Delta_1^\sim (j = 1, 2, 3)$ が 1 対 1 に対応する. よって, 補題 2.1 と合わせると, $j = 1, 2, 3$ に対して, 次の対応

$$C_j \longleftrightarrow p_j^\sim \longleftrightarrow k_{p_j^\sim} \longleftrightarrow g_{p_j^\sim}^\sim$$

は全単射になる.

$j = 1, 2, 3$ に対して, 写像 $\sigma_j : C \ni \zeta \mapsto \zeta_j^\sim \in C_j$ を $\pi(\zeta_j^\sim) = \zeta$ で定義する. 命題 1.1 より, $g_{\zeta_j^\sim}^\sim \circ \sigma_j$ は C 上, 正直調和であるので, $\mathcal{F} - \lim_{z \rightarrow 0} g_{\zeta_j^\sim}^\sim \circ \sigma_j(z)$ が存在する.

$g_j^\sim(\zeta^\sim) = \mathcal{F} - \lim_{z \rightarrow 0} g_{\zeta_j^\sim}^\sim \circ \sigma_j(z)$ とおく. [M-S 1] の議論より, 次がなりたつ (証明の詳細は省略する).

補題 2.2. $g_j^\sim$ は $D_0^\sim$ 上, minimal 関数で, C_j 上,

$${}^{D_0^\sim} \hat{R}_{g_j^\sim}^{D_0^\sim \setminus C_j} < g_j^\sim,$$

すなわち, $g_j^\sim = g_{p_j^\sim}^\sim$.

2.2. この小節の目的は 以下で述べられる定理 2.1 の核心となる次の命題を示すことである.

命題 2.1. I は, 0 で thin であつて, $\{a_n\}, \{b_n\}$ が十分速く 0 に収束するとする. $I^\sim$ 上の点列 $\{z_n^\sim\}$ が W の Martin 境界点 α に収束するとする. このとき,

$$(*) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \tau^\sim(z_n^\sim) = \alpha.$$

証明 $f(z) = 1/z$ に対して, $\bar{a}_n := f(a_n), \bar{b}_n := f(b_n), \bar{I}_n := f(I_n), \bar{I} := f(I)$ とおく. $\bar{a}_n = e^n, b_0 = 1, \bar{a}_n < \bar{b}_n \leq \bar{a}_{n+1}/2$ ($n = 1, 2, \dots$) とする. このとき,

$$0 < \bar{b}_n - \bar{a}_n < e^n/2 < \bar{a}_n - \bar{b}_{n-1} < \bar{a}_{n+1} - \bar{a}_n$$

となる. $D_n := \{|z - \bar{a}_n| < e^n/2\}$, $\phi_n(z) = (z - \bar{a}_n)/(\bar{b}_n - \bar{a}_n)$, $G_n := \{|w| < e^n/2(\bar{b}_n - \bar{a}_n)\}$ とおくと, $w = \phi_n(z)$ により, $D_n, \bar{a}_n, I_n$ は, それぞれ, $G_n, 0, [0, 1]$ に写される. I は, 0 で thin であるので, $e^n/(\bar{b}_n - \bar{a}_n) \uparrow \infty$ となり, したがって, $G_n \subset G_{n+1}, \bigcup_{n=1}^\infty G_n = \mathbb{C}$ である.

$\bar{C}_1, \bar{C}_2, \bar{C}_3$ を $C - \bar{I}$ の copy とする. $j = 1, 2, 3$ に対し $\bar{C}_j$ 上の切り口 $\bar{I}$ の上岸と $\bar{C}_{j+1}$ 上の切り口 $\bar{I}$ の下岸を溶接して $(j \bmod 3)$ 得られる C の 3 葉 cyclic 非有界被覆面を $\bar{W}$ とし, $\bar{\pi}$ を射影, $\bar{\tau}^\sim$ を $\bar{C}_{j+1} = (\bar{\tau}^\sim)^j(\bar{C}_j)$ ($j \bmod 3$) をみたす被覆変換とする. W と $\bar{W}$ が等角同値であることに注意しよう. $\bar{D}_0 = f(D_0) = \{|z| > 1\}$ $\bar{D}_0^\sim = \bar{\pi}^{-1}(\bar{D}_0)$, $\bar{I}_n^\sim = \bar{\pi}^{-1}([\bar{a}_n, \bar{b}_n])$, $\bar{I}^\sim = \bigcup_{n=1}^\infty \bar{I}_n^\sim$ とおく. $\bar{D}_0^\sim$ 上の Green 関数を $\bar{g}^\sim(\cdot, \cdot)$ で表す.

仮定より, $\bar{I}^\sim$ 上の点列 $\{z_n^\sim\}$ がある $\bar{W}$ の Martin 境界点 $\bar{\alpha}$ に収束する. W と $\bar{W}$ が等角同値であるので, 我々の目標は,

$$(*)' \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\tau}^\sim(z_n^\sim) = \bar{\alpha}$$

を示すことである.

$\{z_n^\sim\}$ が収束することと補題 2.1 より, $D_0^\sim$ 上, $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{g}^\sim(\cdot, z_n^\sim)$ が存在する. $(*)'$ を示すことは, $D_0^\sim$ 上,

$$(**) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{g}_{\bar{\tau}^\sim(z_n^\sim)}^\sim = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{g}_{z_n^\sim}^\sim$$

を示すことと同値である.

() の証明** $D_n = \{|z - \bar{a}_n| < e^n/2\}$, $G_n = \{|w| < e^n/2(\bar{b}_n - \bar{a}_n)\}$ であった. $D_n^\sim = \bar{\pi}^{-1}(D_n)$ とおくと, $D_n^\sim$ は $\{\bar{a}_n, \bar{b}_n\}$ の上に分岐点を持つ D_n の 3 葉の cyclic 非有界被覆面である. $G_n^{(1)}, G_n^{(2)}, G_n^{(3)}$ を $G_n - [0, 1]$ の copy とする. $j = 1, 2, 3$ に対し $G_n^{(j)}$ 上の切り口 $[0, 1]$ の上岸と $G_n^{(j+1)}$ 上の切り口 $[0, 1]$ の下岸を溶接して $(j \bmod 3)$ 得られる G_n の 3 葉 cyclic 非有界被覆面を $G_n^\sim$ とし, $\bar{\pi}_n$ を射影とする. このとき, $\{G_n^\sim\}$ の定め方から, $G_n^\sim$ は $G_{n+1}^\sim$ の部分領域とみなされ, $G^\sim := \bigcup_{n=1}^\infty G_n^\sim$ は, $\{0, 1\}$ の上に分岐点を持つ C の 3 葉の cyclic 非有界被覆面となる. $\bar{\pi}_1^{-1}(0) = \zeta_0^\sim$ とおく. $\bar{W}$, $D_n^\sim$, $G_n^\sim$, ϕ_n の定め方から, $D_n^\sim$ から $G_n^\sim$ への等角写像 φ_n で, $\phi_n \circ \bar{\pi} = \bar{\pi}_n \circ \varphi_n$ をみたすものが存在する.

$\bar{W} - \bigcup_{n=1}^\infty Cl(D_n^\sim)$ ($Cl(D_n^\sim)$ は $D_n^\sim$ の W^* における閉包をあらわす) の点 $a^\sim$ を任意にとり fix する. $\sup_{\bigcup_{n=1}^\infty D_n^\sim} \bar{g}^\sim(\cdot, a^\sim) = M (< \infty)$ とおく. $\zeta^\sim \in G_n^\sim$ に対し,

$$h_n(\zeta^\sim) = \bar{g}^\sim(a^\sim, \varphi_n^{-1}(\zeta^\sim)) - \bar{g}^\sim(a^\sim, \bar{\tau}^\sim(\varphi_n^{-1}(\zeta^\sim)))$$

とおくと, h_n は $G_n^\sim$ 上の有界調和関数で, $h_n(\zeta_0^\sim) = 0$, $\sup_{G_n^\sim} |h_n| \leq 2M$ ($n = 1, 2, \dots$) をみたす. したがって, 正規族の議論により, $\{h_n\}$ の部分列が存在して, $G^\sim$ 上の有界調和関数 h に広義一様収束する. $h(\zeta_0^\sim) = 0$, $G^\sim \in O_G$ より, $h \equiv 0$ となる. この事実は, $\{h_n\}$ の任意の部分列に対しても成立するから, $\{h_n\}$ は, $G^\sim$ 上, 0 に広義一様収束する. 各 l に対し, $z_l^\sim \in \bar{I}_l^\sim$ となる $n_l \in \mathbb{N}$ をとる. $\varphi_{n_l}(z_l^\sim) = \zeta_l^\sim$ とおくと, $\{\zeta_l^\sim\}$ は $G^\sim$ の compact 部分集合 $\bar{\pi}_1^{-1}([0, 1])$ 上の点列である. したがって, $\lim_{l \rightarrow \infty} h_{n_l}(\zeta_l^\sim) = 0$ となる. ここで,

$$\bar{g}^\sim(a^\sim, z_l^\sim) - \bar{g}^\sim(a^\sim, \bar{\tau}^\sim(z_l^\sim)) = h_{n_l}(\zeta_l^\sim) \text{ であるから,}$$

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \{\bar{g}^\sim(a^\sim, z_l^\sim) - \bar{g}^\sim(a^\sim, \bar{\tau}^\sim(z_l^\sim))\} = 0$$

が成立する. $a^\sim$ は $\bar{W} - \bigcup_{n=1}^\infty Cl(D_n^\sim)$ の任意の点であったから, これより $(**)$ が従う. $\square$

2.2. $W, \pi, \tau^\sim, D_0^\sim, I_n^\sim, I^\sim$ を 1.1 のように定める. I は 0 で thin であると仮定する. 定理 B より, $\#\Delta_1^\sim = 3$. 定理 B の証明より, 各 $C_j (j = 1, 2, 3)$ に対して, $p_j^\sim \in \Delta_1^\sim (j = 1, 2, 3)$ が 1 対 1 に対応する. $k_{p_j^\sim} (j = 1, 2, 3)$ を $p_j^\sim (j = 1, 2, 3)$ で極をもつ $D_0^\sim$ 上の Martin 関数とする. $z^\sim \in W$ に対して, $g_{z^\sim}$ を $z^\sim$ で極をもつ W 上の Green 関数とする.

補題 2.3([H]). $z^\sim$ を $D_0^\sim$ の点とし, $z = \pi(z^\sim)$ とおく. このとき, $D_0^\sim$ 上,

$$\sum_{j=1}^3 g_{z^\sim} \circ (\tau^\sim)^j = g_z \circ \pi$$

特に, $p^\sim$ を $\Delta_1^\sim$ の点とする. このとき, $D_0^\sim$ 上,

$$\sum_{j=1}^3 g_{p^\sim} \circ (\tau^\sim)^j = g_0 \circ \pi.$$

$\Delta_1^\sim = \{p_1^\sim, \tau^\sim(p_1^\sim), (\tau^\sim)^2(p_1^\sim)\}$ と補題 2.3 を用いることにより, 次の補題を得る.

補題 2.4([H]). $D_0^\sim$ 上,

$$\sum_{j=1}^3 g_{p_j^\sim} = g_0 \circ \pi.$$

$p_0^\sim$ を それを極にもつ Martin 関数が $\frac{1}{3}(k_{p_1^\sim} + k_{p_2^\sim} + k_{p_3^\sim})$ で与えられる $\Delta^\sim$ の元とする. 上の補題と命題 2.1 より, 次がしたがう.

定理 2.1. $D_0^\sim$ 上, $\lim_{I \ni \pi(z^\sim) \rightarrow 0} g_{z^\sim}$ が存在して,

$$\lim_{I \ni \pi(z^\sim) \rightarrow 0} g_{z^\sim} = \frac{1}{3} g_0 \pi = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 g_{p_j^\sim} = g_{p_0^\sim}.$$

証明 $\alpha \in (\pi^*)^{-1}(0) \cap Cl(I^\sim)$ に対して, $I^\sim$ 上の点列 $\{z_n^\sim\}$ で, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n^\sim = \alpha$ をみたすものをとる. 命題 2.1 より,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tau^\sim(z_n^\sim) = \alpha,$$

すなわち, $D_0^\sim$ 上,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_{\tau^\sim(z_n^\sim)} = \lim_{n \rightarrow \infty} g_{z_n^\sim}.$$

よって, $D_0^\sim$ 上,

$$g_\alpha^\sim \circ \tau^\sim = g_\alpha^\sim.$$

よって, 補題 2.3 より, $D_0^\sim$ 上,

$$g_0 \circ \pi = \lim_{n \rightarrow \infty} g_{\pi(z_n^\sim)} \circ \pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^3 g_{z_n^\sim} \circ (\tau^\sim)^j = \sum_{j=1}^3 g_\alpha^\sim \circ (\tau^\sim)^j = 3g_\alpha^\sim.$$

よって, 補題 2.4 より, 求める結果を得る. □

3. 主定理の証明

$j = 1, 2, 3$ に対して,

$$\Sigma(C_j) := \{ \{z_n^\sim\} (\subset C_j) \mid C_j \text{ 上, } \lim_{n \rightarrow \infty} g_{z_n^\sim} \text{ が存在する.} \}$$

とおく. $\{z_n^\sim\}, \{\zeta_n^\sim\}$ に対して, 同値関係 $\sim$ を次式

$$\{z_n^\sim\} \sim \{\zeta_n^\sim\} \iff D_0^\sim \text{ 上, } \lim_{n \rightarrow \infty} g_{z_n^\sim} = \lim_{n \rightarrow \infty} g_{\zeta_n^\sim}.$$

で定義する. $\tilde{\Sigma}(C_j) := \Sigma(C_j) / \sim (j = 1, 2, 3)$ とおく. 主定理を証明するためには, 次を示せば, 十分である.

定理 3.1. $j = 1, 2, 3$ とする. 全単射: $\tilde{\Sigma}(C_j) \ni [\{z_n^\sim\}] \longleftrightarrow t \in [0, 1]$ が次式

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_{z_n^\sim} = t g_{p_j^\sim} + (1 - t) g_{p_0^\sim}$$

によって, 与えられる.

証明 実軸上に中心をもつある互いに交わらない円板列 $\{B_n\}$ と等角写像

$\phi: E \rightarrow C (E = D_0 \setminus B, B = \bigcup_0^\infty B_n)$ が存在する. I が 0 で thin であるので, B も 0 で thin であることがわかる. 古典的なポテンシャル論 (cf. [B-H, p.336]) により, 次が知られている.

事実 $G (\subset C)$ を有界領域とし, $\zeta \in \partial G$ の (Dirichlet 問題の意味の) 非正則点で, $\zeta \in Cl_C(B(C \setminus G)) (B(C \setminus G) \text{ は } \partial G \text{ の (Dirichlet 問題の意味の) 正則点全体と } C \setminus G \text{ の内部の合併集合である}).$

$$\Sigma_1(G) := \{ \{z_n\} (\subset G) \mid \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \zeta, \{\omega_{z_n}^G\} \text{ が弱収束する.} \}$$

とおく. ただし, $\omega_{z_n}^G$ は z_n と D に関する調和測度である. $\{z_n\}, \{\zeta_n\}$ に対して, 同値関係 $\sim_1$ を次式

$$\{z_n\} \sim_1 \{\zeta_n\} \iff \partial G \text{ 上, } \lim_{n \rightarrow \infty} \omega_{z_n}^G = \lim_{n \rightarrow \infty} \omega_{\zeta_n}^G.$$

で定義する. $\tilde{\Sigma}_1(G) := \Sigma_1(G) / \sim_1$ とおく. このとき, 全単射:

$\tilde{\Sigma}_1(G) \ni [\{z_n\}] \longleftrightarrow t \in [0, 1]$ が次式

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_{z_n}^G = t \omega_\zeta^G + (1 - t) \epsilon_\zeta,$$

すなわち, 任意の ∂G 上の連続関数 f に対して,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H_f^G(z_n) = t \left(\mathcal{F} - \lim_{z \rightarrow \zeta} H_f^G(z) \right) + (1 - t) f(\zeta)$$

によって, 与えられる. ここで, $H_f^G(z_n)$ は f の z_n における G 上の Dirichlet 解とする.

ζ を D_0 の点とする. $j = 1, 2, 3$ に対して, 写像 $\phi_j: E \rightarrow C_j$ を $\phi_j := \sigma_j \circ \phi$ によって定義する. ただし, σ_j は補題 2.2 の上で定義した写像とする. g_ζ を ζ で極をもつ D 上の Green 関数とする.

このとき, ζ で極をもつ E 上の Green 関数を考察することにより, 次式が成立する.
 $j = 1, 2, 3$ に対して,

$$(1) \quad g_\zeta \circ \phi - H_{g_\zeta \circ \phi}^E = g_{\zeta_j^\sim} \circ \phi_j - H_{g_{\zeta_j^\sim} \circ \phi_j}^E,$$

ここで, $\zeta = \pi(\zeta_j^\sim)$ とする. 定理 2.1 より, $g_{\zeta_j^\sim} \circ \phi$ は ∂E 上, 連続である. ∂E 上の連続関数 $g_\zeta \circ \phi$ と $g_{\zeta_j^\sim} \circ \phi_j$ に対して, 上の事実を用いると, 全単射 $\tilde{\Sigma}_1(\phi(C_j)) \ni \{z_n\} \longleftrightarrow t \in [0, 1]$ が存在して, 次式

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} H_{g_\zeta \circ \phi}^E(z_n) = t \left(\mathcal{F} - \lim_{z \rightarrow 0} H_{g_\zeta \circ \phi}^E(z) \right) + (1-t)g_\zeta \circ \phi(0)$$

および

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} H_{g_{\zeta_j^\sim} \circ \phi_j}^E(z_n) = t \left(\mathcal{F} - \lim_{z \rightarrow 0} H_{g_{\zeta_j^\sim} \circ \phi_j}^E(z) \right) + (1-t)g_{\zeta_j^\sim} \circ \phi_j(0)$$

がなりたつ. ここで, $g^\sim(\cdot, \cdot)$ の対称性と定理 2.1 より, $g_{\zeta_j^\sim} \circ \phi_j(0) = g_{p_0^\sim}(\zeta_j^\sim)$. したがって, (3) より,

$$(4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} H_{g_{\zeta_j^\sim} \circ \phi_j}^E(z_n) = t \left(\mathcal{F} - \lim_{z \rightarrow 0} H_{g_{\zeta_j^\sim} \circ \phi_j}^E(z) \right) + (1-t)g_{p_0^\sim}(\zeta_j^\sim).$$

よって, (2), (1), (4) により,

$$\begin{aligned} & g_\zeta \circ \phi(0) - \left(t \left(\mathcal{F} - \lim_{z \rightarrow 0} H_{g_\zeta \circ \phi}^E(z) \right) + (1-t)g_\zeta \circ \phi(0) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (g_\zeta \circ \phi(z_n) - H_{g_\zeta \circ \phi}^E(z_n)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (g_{\zeta_j^\sim} \circ \phi_j(z_n) - H_{g_{\zeta_j^\sim} \circ \phi_j}^E(z_n)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} g_{\zeta_j^\sim} \circ \phi_j(z_n) - \left(t \left(\mathcal{F} - \lim_{z \rightarrow 0} H_{g_{\zeta_j^\sim} \circ \phi_j}^E(z) \right) + (1-t)g_{p_0^\sim}(\zeta_j^\sim) \right), \end{aligned}$$

すなわち,

$$(5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} g_{\zeta_j^\sim} \circ \phi_j(z_n) = t \left(g_\zeta \circ \phi(0) - \left(\mathcal{F} - \lim_{z \rightarrow 0} H_{g_\zeta \circ \phi}^E(z) \right) + \left(\mathcal{F} - \lim_{z \rightarrow 0} H_{g_{\zeta_j^\sim} \circ \phi_j}^E(z) \right) \right) + (1-t)g_{p_0^\sim}(\zeta_j^\sim).$$

一方, (1), および命題 1.1 より,

$$(6) \quad g_\zeta \circ \phi(0) - \left(\mathcal{F} - \lim_{z \rightarrow 0} H_{g_\zeta \circ \phi}^E(z) \right) + \left(\mathcal{F} - \lim_{z \rightarrow 0} H_{g_{\zeta_j^\sim} \circ \phi_j}^E(z) \right) = \mathcal{F} - \lim_{z \rightarrow 0} g_{\zeta_j^\sim} \circ \phi_j(z).$$

(6), ϕ_j の定義 および補題 2.2 を用いると,

$$(7) \quad (6) \text{ の右辺 } = \mathcal{F} - \lim_{z \rightarrow 0} g_{\zeta_j^\sim} \circ \sigma_j(z) = g_{p_j^\sim}(\zeta_j^\sim).$$

(5), (6), (7) より,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_{\zeta_j^\sim} \circ \phi_j(z_n) = t g_{p_j^\sim}(\zeta_j^\sim) + (1-t)g_{p_0^\sim}(\zeta_j^\sim).$$

これで, 定理 3.1 の証明が完成した. □

参考文献

- [A-S] Ahlfors, L.V., Sario, L.: *Riemann Surfaces*, Princeton, 1960.
- [B] M. BRELOT, *On Topologies and Boundaries in Potential Theory*, Lecture Notes in Math. **175**, Springer, 1971.
- [B-H] J. BLIEDTNER AND W. HANSEN, *Potential Theory*, Springer, 1986.
- [C-C] C. CONSTANTINESCU AND A. CORNEA, *Ideale Ränder der Riemannschen Flächen*, Springer, 1963.
- [F] Forster, O.: *Lectures on Riemann Surfaces*, GTM 81, Springer, 1981.
- [H] M. HEINS, *Riemann surfaces of infinite genus*, Ann. of Math., **55**(1952), 296-317.
- [HL] L. HELMS, *Introduction to Potential Theory*, Wiley-Interscience, 1969.
- [M-S1] H. MASAOKA AND S. SEGAWA, *Harmonic dimension of covering surfaces*, Kodai Math. J., **17**(1994), 351-359.
- [M-S2] H. MASAOKA AND S. SEGAWA, *Harmonic dimension of covering surfaces and minimal fine neighborhood*, Osaka J. Math., **34**(1997), 659-672.
- [S-N] L. SARIO AND M. NAKAI, *Classification theory of Riemann surfaces*, Springer, 1970.