

ハイブリッド実験数学における数学ソフトウェアの役割

国立情報学研究所 横山 重俊

Shigetoshi Yokoyama, National Institute of Informatics

1 はじめに

数学教育において、数学モデルの獲得は極めて重要な要素である。数学モデルは、現実世界の問題を抽象化し、数学的に処理可能な形式に変換する役割を果たす。しかし、多くの学習者にとって、現実世界と数学的世界の橋渡しである数学モデルの獲得は容易ではない。

本研究では、Realistic Mathematics Education (RME) と呼ばれる数学教育理論を参照し、ハイブリッド実験数学における数学ソフトウェアの役割について考察する。

RME 理論は、オランダの Freudenthal 研究所で開発された数学教育理論であり、現実的な状況から出発して、段階的に数学的概念を構築していくアプローチを特徴としている。RME 理論の基本原則を概観し、それをもとにしたハイブリッド実験数学の具体的な実践方法を紹介する。さらに、この教育方法の効果を数学ソフトウェアとの関係を中心に論じる。

ハイブリッド実験数学において、数学ソフトウェアは二つの役割を担っている。一つは、身体や紙と鉛筆を使った実験数学をさまざまな角度で拡張するという役割である。もう一つは、学習する数学モデルを視て触れられるように可触化する場としての役割である。

2 ハイブリッド実験数学の提案と実践

数学モデルを用いることで、複雑な現象をシンプルな形式で表現し、それを解析することが可能になる。そのことにより、現実世界の現象を予測し、制御することができる。数学教育の中で数学モデルがどのように位置付けられているかを図1に示す[1]。現実事象を条件整理し、現実モデルを作成する。その現実モデルを数学化し、数学モデルを作成する。数学モデルを数学的に処理し、数学的結果を獲得し、それを現実事象へ翻訳することで現実事象の解釈を行う。このサイクルを繰り返すことで、それぞれの要素の品質を向上させて行く。このサイクルの中で数学モデルは中心的な役割を担う。

この数学モデル獲得を狙った数学教育実践方法の一つが「実験数学」であり、参考文献[2]で「実験数学は、本来、数学の研究を行うときに利用される技術ですが、(中略)単に数学研究の技術としてではなく、数学の学習の方法として有効であることがわかります。」と述べられている。ここで述べられているように実験数学は図2に示すように、現実事象を実験対象とし、試して・考え・また試すサイクルを回し続けることで数学モデルを獲得する文武両道となる活動である。

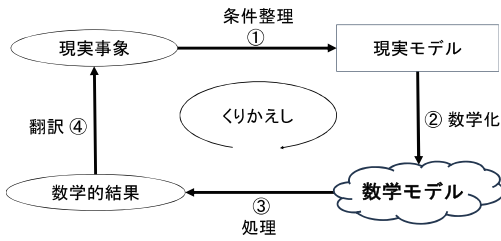


図 1: 数学モデルの位置付け

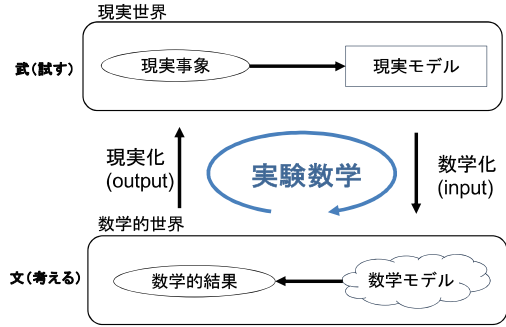


図 2: 実験数学の位置付け

2.1 ハイブリッド実験数学の提案

ハイブリッド実験数学とは、物理的な実体を伴った空間内で身体を使って行う実験数学、紙と鉛筆や黒板とチョークを使った実験数学、そしてコンピュータ上で数学ソフトウェアを活用した実験数学の三つの実験数学を連携させた数学教育方法を指す。

GIGA スクール構想により、一人一台の端末、ネットワーク接続による情報獲得、動くメディアや個別教育への期待が高まっている。GIGA スクール構想推進の課題として良く言われるのは、人材不足、コンテンツ不足、ノウハウ不足である。これらは旧メディア（紙と鉛筆や黒板とチョーク）から新メディア（コンピュータとネットワーク）への教育環境の移行という図式を前提として、両メディアの間を飛び移ろうという発想に起因している課題認識ととらえられる。

旧メディアから新メディアに飛び移るのではなく、両方のメディアをハイブリッドにつなぎ、出力機関である脳を使って体験を定着・発展させる方法を作ることが重要であると考え、図3にその構成を示すハイブリッド実験数学を提案した[3]。

物理世界の中で行う実験数学とコンピュータ世界で行う実験数学を行き来することで、どちらか一方でのみの教育を超えた新しい教育手段になる可能性を次節で述べる教育実践を通じて感じている。

数学教育においてコンピュータを使わない実験数学と使う実験数学を一つのテーマに沿ってスムーズに連結することで、まず前者によりそのテーマについて体感を伴い腑に落ちる経験をじっくり得る。それを拡張する後者の実験数学を行うことで、より広い体験を通じさらに数学モデルの理解が進むことが期待できる。

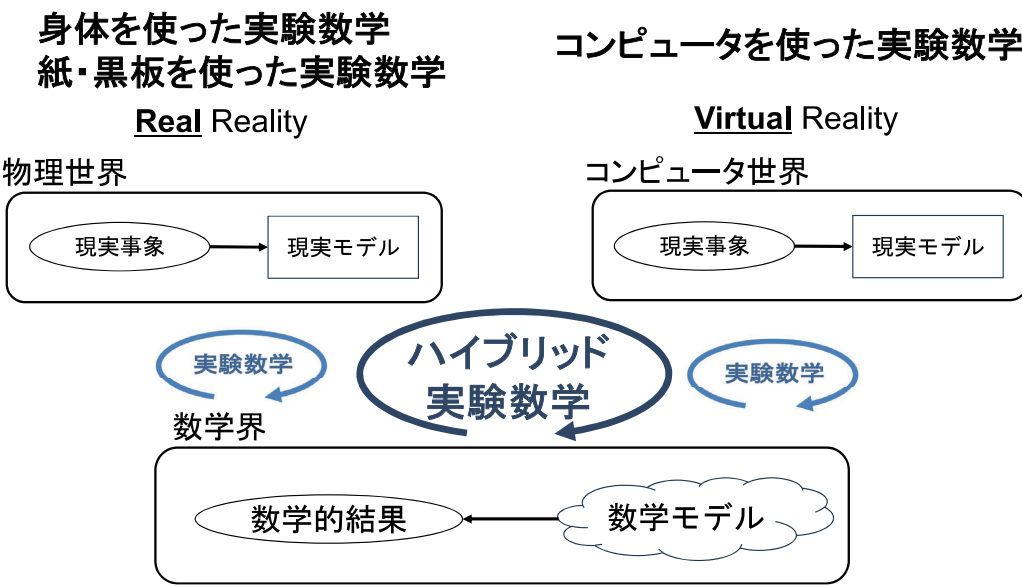


図 3: ハイブリッド実験数学の構成

2.2 ハイブリッド実験数学の実践

筆者は、提案したハイブリッド実験数学を近隣中学校の学習ルームの数学コースとして提案・承認され、2023 年 5 月から毎週水曜日の放課後にコンピュータ室を活用して、現在まで 40 回ほど開催している [4].

実践を通じて感じた課題とその解決に向けたアプローチ案を本実践の中で継続的に試行している. 場合の数やパスカルの三角形などとフラクタル構造を Virtual な世界で接続して、それを Art とつなぐことで Virtual から Real への接続も実現しようと取り組んでいる. また、数学ソフトウェアを直接触って現象の変化を楽しむハイブリッド実験数学を実践してもらう機会を増やしている. 以下に実践を通じて得た知見と実践を通じて感じた課題を述べる.

2.2.1 実践を通じて得た知見

中学校での実践を通じて獲得した知見は以下の三点である.

- 1. 場合の数、数列、再帰など各テーマに注目した実験数学をハイブリッド化する事例は作れる.
- 2. Scratch などの経験から、プログラミング能力やプログラミングへの興味がある生徒が多い.

3. 数学に閉じないで、その実験成果を絵などの出力として表現することに興味を持つ生徒がいる。

2.2.2 実践を通じて感じた課題

ハイブリッド実験数学の教育的可能性について自らの教育実践を通じて手応えを得ることができた。一方、同時に以下の課題があることが明らかになった。

1. ハイブリッド実験数学の教材として用意するコンテンツをそれぞれの分野毎に独立に作成するため、開発コストが増加する。
2. 開発コストの中でも Real から Virtual への流れをスムーズに作るための負荷が大きい。
3. コンピュータ実験によるアーギュメンテーション（拡張）が終着点になっているので、それ以上の広がりを経験できない。

3 課題解決に向けた考察

先行研究 [5] などを参考に上記課題の解決への二つの解決案を考えた。課題 1, 2 を解決するために、Virtual な世界では数学的モデルとプログラムの再利用のしやすいことを活用して、コンテンツを Virtual な世界でつなぎコンテンツの連携を実現し、コンテンツ開発コストを削減できる可能性を探る。課題 3 を解決するために、数学的モデルとプログラムを利用したアートを作成することなど Real の場へ数学モデルを応用することで Virtual から Real への接続が機能する可能性が迫及する。

さらに、ハイブリッド実験数学における数学ソフトウェアの役割について整理することで、今後発展が期待できる枠組み作りを考察した。以下にハイブリッド実験数学における数学ソフトウェアの役割についての考察をまとめる。

はじめにでも述べたように、ハイブリッド実験数学において数学ソフトウェアは二つの役割をになっており、一つは身体や紙と鉛筆を使った実験数学をさまざまな側面で拡張するという役割であり、もう一つは学習する数学モデルを視て触れるようにする可触化する場としての役割である、と考えている。

4 ハイブリッド実験数学における数学ソフトウェアの役割（拡張）

2章のハイブリッド実験数学の提案で述べたように、身体的実験や紙や黒板での実験の実験規模を拡大したりパラメータを変化させたりすることを数学ソフトウェアは担うことができる。そういう意味で「拡張」という役割は、数学ソフトウェアははたすハイブリッド実験数学における直接的な貢献である。ハイブリッド実験数学実践における拡

張の事例を図4に示す. この例では数列や場合の数の大きさや次数を増加させて, 手計算を超える実験を好きなだけ実行できる体験を供給している.

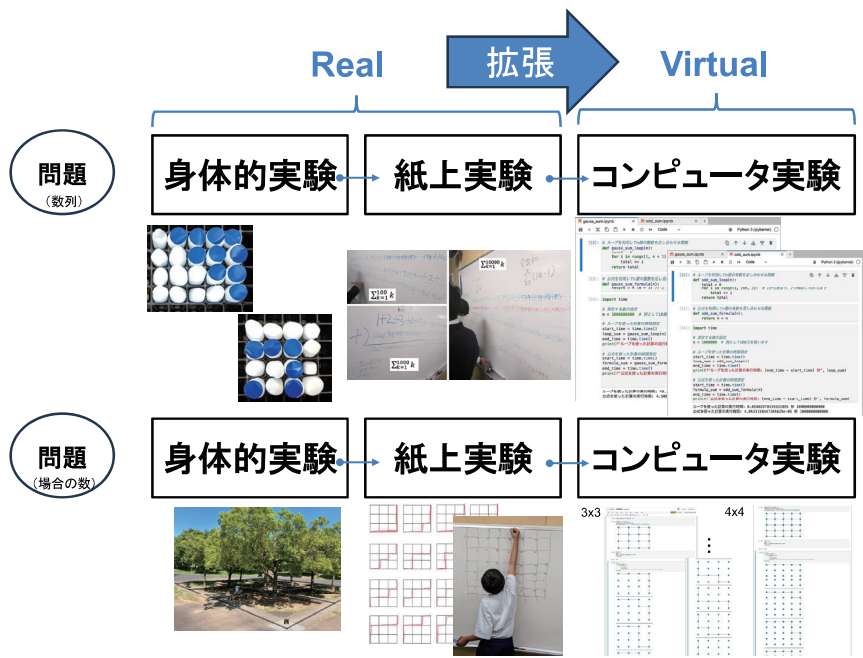


図 4: 数学ソフトウェアの役割 (拡張) 例

5 ハイブリッド実験数学における数学ソフトウェアの役割 (可触化)

5.1 RME 理論による数学モデル獲得策

Realistic Mathematics Education (RME) 理論は, オランダの数学教育者 Hans Freudenthal 氏によって提唱された教育アプローチであり, 数学を現実世界の文脈で学ぶことを重視するものである [6]. この理論は, 数学を抽象的な概念としてではなく, 現実の問題を解決するためのツールとして捉えることを目指している. RME では, 学習者が自分自身の経験や直感を基に数学的概念を構築することを促進する. これにより, 数学的知識が単なる公式や手順の暗記ではなく, 体験にもとづいたものとなる.

RME のカリキュラムでは, 日常生活や社会の中で遭遇する問題を出発点とし, そこから数学的モデルを構築し, 問題解決に至るプロセスを重視する. これにより, 学習者は数学の有用性を実感し, より深い理解を得ることができる. RME は図5に示すように, 「活動としての数学」という考え方をその方法論の根幹として, 導かれた再発明による教育を実践法として提唱する. そしてモデル化にあたっては, 状況に依存する model-of のレベルを, 状況に依存しない model-for のレベルへ昇華させるプロセスに着目する.

また、RME 理論では、図 6 に示すように「水平的数学化」と「垂直的数学化」という 2 つの数学化プロセスを提唱している。水平的数学化は、現実世界の問題を数学的な問題に変換するプロセスであり、垂直的数学化は、数学的システム内での操作や洗練化を指す。この 2 つのプロセスを通じて、学習者は徐々に抽象的な数学的概念を獲得していく。

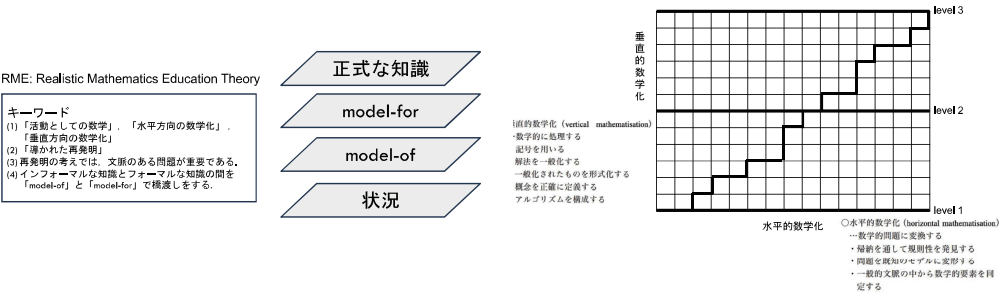


図 5: RME 理論の特徴

図 6: 水平的数学化と垂直型数学化

5.2 RME 理論実践時の課題

一方で、RME 理論にはいくつかの課題も存在する。特に、抽象的な数学的概念を現実の問題に適用する際に、学習者によってはその抽象化プロセスが難しいと感じる場合がある。また、すべての学習者が同じように現実の問題から数学モデルを導出できるわけではないため、個別の指導が必要となる場合もある。すなわち、多くの学習者に受け入れられやすい RME 理論を活用した実践方法の確立が求められている。実際いくつかの実践方法の提案と実践報告がある [7, 8]。本論文ではこれらの先行研究を参考に、より現実的な実践方法として、2 章で述べた実験数学の手法を拡張し、著者が提案・実践しているハイブリッド実験数学を「数学モデル獲得のために現実問題を活用する」というコンテクストで適用することで RME 理論を活用した実践方法と位置づける。

5.3 実験数学と RME 理論

ハイブリッド実験数学にもとづく教育方法を説明する前に、実験数学と RME 理論の関係を整理する。

RME 理論と実験数学は、現実世界の問題や状況を出発点とし、学習者の主体的な探究活動を重視する点で共通している。RME 理論では、オランダの「Realistic Mathematics Education」教科書やアメリカの「Mathematics in Context」カリキュラムなどで、日常生活の文脈を用いた問題解決を通じて数学概念を学ぶアプローチが採用されている。

一方、実験数学では、コンピュータを用いたシミュレーションや計算を通じて数学的パターンや法則を探究する。両者とも、具体的な問題から抽象的な数学概念へと進む過程を重視しており、この点で RME 理論と実験数学は補完的な関係にある。

RME 理論の実践で用いられる現実的な問題設定は、実験数学的アプローチによってより深く探究することができ、逆に実験数学で得られた知見を RME 理論の枠組みで解釈し、現実世界との関連を見出すことも可能である。このように、RME 理論と実験数学は、それぞれの強みを活かしながら、より効果的な数学教育・学習方法の開発に貢献する可能性を持っている。

5.4 水平的数学化と垂直的数学化の促進

ハイブリッド実験数学のアプローチは、水平的数学化と垂直的数学化の両方を促進するように設計したい。物理的実体から数学モデルへの移行（水平的数学化）と、数学モデルの洗練化（垂直的数学化）が一連の活動の中で自然に行われることを実現する必要がある。前者はハイブリッド実験数学の Real から Virtual への接続を有効に活用して実現できることは実践からも明らかになっている。

図 7 の左上に示すように、用意されたプログラムで Real な体験を Virtual に拡張することで獲得された数学モデルが水平的数学化として強化される。一方、後者の獲得された数学モデルの洗練化を行うためには、拡張するという役割以外で数学ソフトウェアを活用し垂直的数学化の促進も進めなければならない。その一つの方法として数学モデルを可触化する場として数学ソフトウェアを活用することを考える。可触化というのは数学モデルを視て触れるようにすることである。

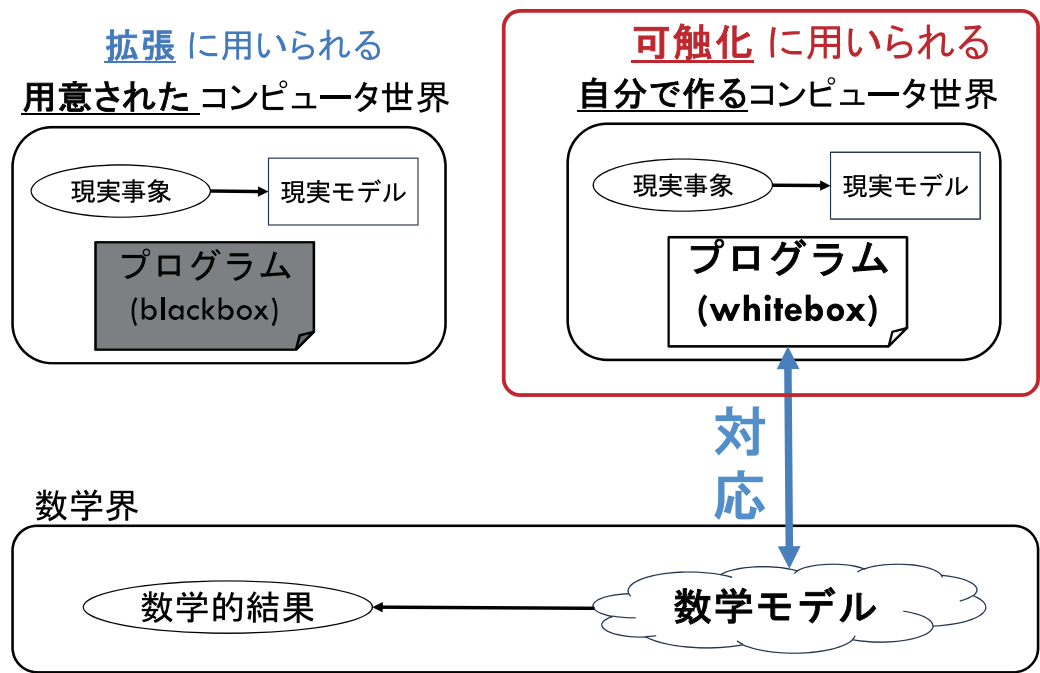


図 7: 数学ソフトウェアの二つの役割

図7の右上に示すよう可触化のために数学ソフトウェア内のプログラムをホワイトボックス化し、学習者が視て触れて変更・実行し、実験できるものとして提供する．数学モデルとそのプログラムの対応を学習者が理解し、そのことを通じて数学ソフトウェア内で数学モデルの洗練化が行えるのである．さらに数学ソフトウェア内で可触化された数学モデルは洗練化・抽象化されると同時に様々に集積されることで現実的な状況の表現ともなれる．その結果、これらの数学モデルをもとに水平的数学化が発生するという連鎖を図8に示すように生み出せる．

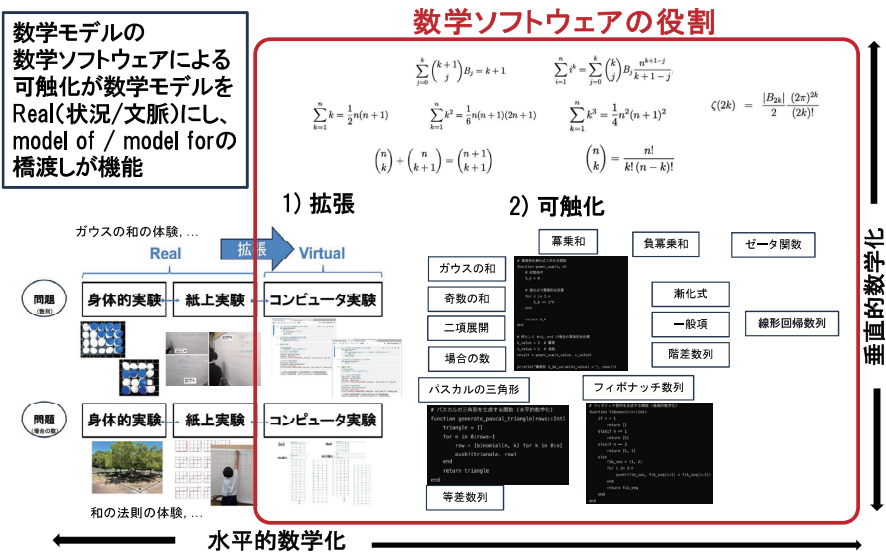


図 8: 拡張と可触化による数学モデルの展開例

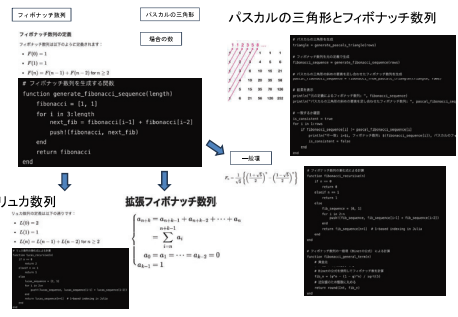


図 9: 可触化による水平的数学化例

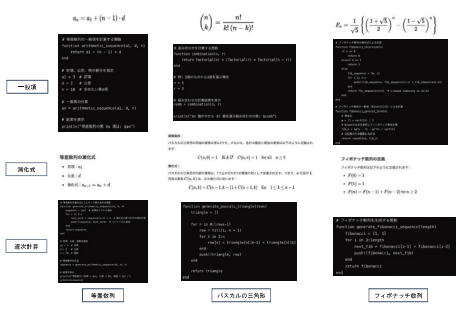


図 10: 可触化による垂直的数学化例

図9は水平的数学化例である．身体的体験などからフィボナッチ数列やパスカルの三角形についての数学モデルを獲得し，それを数学ソフトウェア内で可触化する．その結果，フィボナッチ数列とパスカルの三角形の関係やフィボナッチ数列の類似物や拡張について水平的的数学化が誘発される．

図10は垂直的数学化例である．等差数列やフィボナッチ数列，それとパスカルの三角形の実装プログラムを可触化することで，漸化式という洗練化をすることができ，それを通じて漸化式の一般項という数学モデルにたどり着くことができる．

6 まとめと今後の展開

数学教育における数学モデルの獲得フェーズに焦点をあて，その実践方法としてハイブリッド実験数学を紹介し，その精緻化のために RME 理論に沿った定式化を行った．その結果ハイブリッド実験数学における数学ソフトウェアの役割を物理世界での体験の拡張に加えて，数学モデルの可触化も担う図11のような構成とした．コンピュータを使った実験数学を実施する際に，プログラムをブラックボックスとして提供することで導入しやすくすると同時に，その部分をスムーズにホワイトボックス化することで可触化し，数学ソフトウェアの活用を幅を広げる構成である．このスムーズさの実現手法としては，例えば Jupyter Notebook のセルの折りたたみ機能を用いるなどして実現でき

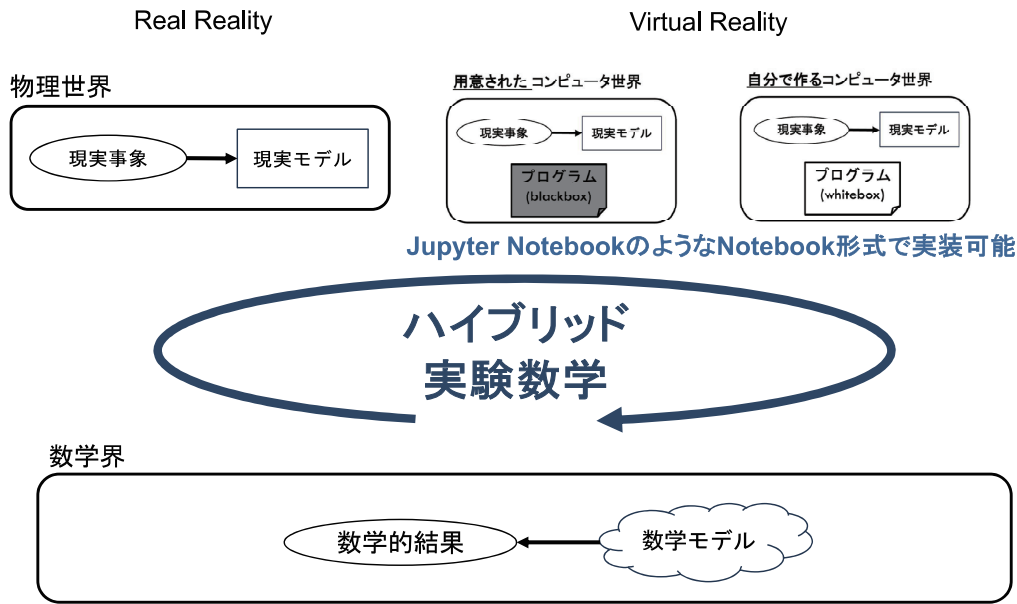


図 11: ハイブリッド実験数学の全体像

る。このことで一回きりの数学モデルの獲得に閉じずに数学モデルの獲得と洗練化の連鎖が起こる機構を作り出せる見通しができた。

課題と感じていた分野毎のコンテンツ作成の負荷, Real から Virtual への移行のコストや Virtual での行き詰まりについて, 今回考察したハイブリッド実験数学における数学ソフトウェアの二つの役割(拡張と可触化)を組み合わせることで解決が進むと考えられるようになっている。

今後は, この方向に沿った実践を継続する。さらには, 数学ソフトウェアの役割の連鎖を現実問題の解決までつなげることで, 数学モデルの現実世界の問題への適用に関する教育実践にもつなげて行きたい。このことで Real から始めた数学教育が Virtual で進化し, Real にもどるサイクルを作り出したい。

参考文献

- [1] 柳本 哲, 数学的モデリングと数学的活動, 数学教育学会誌, 49 巻, 3-4 号, pp.9-16, 2008.
- [2] 山本芳彦, 実験数学入門, 岩波書店, 2000.
- [3] 横山重俊, ハイブリッド実験数学をやってみる, 数理解析研究所講究録, 2208, pp.10-19, 2021.
- [4] 横山重俊, ハイブリッド実験数学を中学校で実践してみる, 数理解析研究所講究録, 2273, pp.138-146, 2023.
- [5] 宮寺良平, 福井昌則, 高校生が数式処理システムを用いて数学研究を行うための方法の提案, 数式処理, vol. 26-2, pp.3-23, 2020.
- [6] 伊藤伸也, H. フロイデントールの教育論, 日本教育学会大会研究発表要項, 75 巻, pp.118-119, 2016.
- [7] Van den Heuvel-Panhuizen, Realistic Mathematics Education Theory as a Guideline for Problem-Centered, Interactive Mathematics Education. In International Reflections on the Netherlands Didactics of Mathematics, Springer, Cham, pp.27-49, 2020.
- [8] 佐藤一: RME 理論の日本の数学教育への導入についての考察. 教科開発学論集, 6, pp.89-100, 2018.