

LOCALIZATION IN RANDOMLY CURVED QUANTUM WAVEGUIDES

野村 祐司 (Yuji Nomura)

東京工業大学大学院理工学研究科数学専攻

1. Introduction.

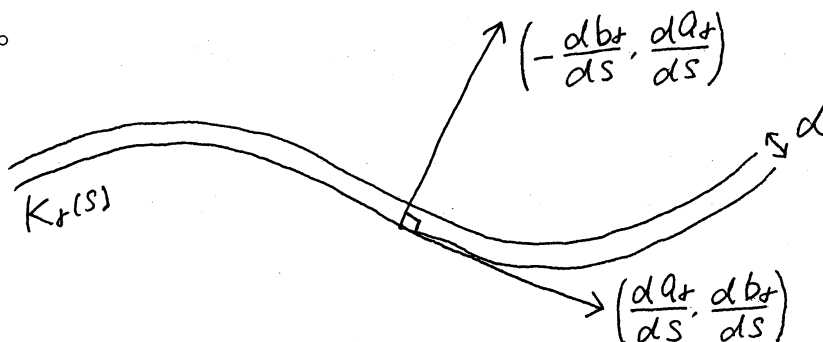
ランダムに曲がった帯状領域 (量子細線) 上で Dirichlet 境界条件をもつ ラプラス
シアンを考え、そのスペクトルを局在化を中心に調べよう。まず帯状領域を設定し
よう。 $\mathbb{R}^2$ における曲線はその曲率で 決定されるので、 $\gamma \in C^2(\mathbb{R})$ を曲率とする
曲線 $K_\gamma(s)$ は以下のように表示できる。

$$(1.1) \quad \begin{aligned} K_\gamma(s) &\equiv (a_\gamma(s), b_\gamma(s)) \quad (s \in \mathbb{R}) \\ a_\gamma(s) &\equiv \int_0^s \cos \left(- \int_0^t \gamma(\tau) d\tau \right) dt \\ b_\gamma(s) &\equiv \int_0^s \sin \left(- \int_0^t \gamma(\tau) d\tau \right) dt \end{aligned}$$

実際、 $\left(\frac{da_\gamma(s)}{ds} \right)^2 + \left(\frac{db_\gamma(s)}{ds} \right)^2 = 1$ だからこの表示は弧長で径数表示されているの
で、そのときの 曲率は $\frac{da_\gamma^2(s)}{ds^2} \frac{db_\gamma(s)}{ds} - \frac{db_\gamma^2(s)}{ds^2} \frac{da_\gamma(s)}{ds}$ で与えられ、これは簡単な計
算で γ になることがわかる からである。 $d > 0$ にたいして帯状領域を

$$(1.2) \quad \Omega_{d,\gamma} \equiv \left\{ \left(a_\gamma(s) - u \frac{db_\gamma(s)}{ds}, b_\gamma(s) + u \frac{da_\gamma(s)}{ds} \right) \mid (s, u) \in \mathbb{R} \times (0, d) \right\}$$

とする。



Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$ -TEX

このとき問題としたいのは (少し正確さを欠くが)

$$-\Delta \text{ on } L^2(\Omega_{d,\gamma}) \text{ with Dirichlet boundary conditions}$$

のスペクトルである。

$\gamma(s) \equiv 0$ の時には $\Omega_{d,\gamma} = \mathbb{R} \times (0, d)$ だから、 $\sigma(-\Delta) = \left[\frac{\pi^2}{d^2}, \infty\right)$ (以下、 σ はスペクトルを表わす) となり、絶対連続スペクトルのみが現れる。

P.Exner と P.Šeba は [1] で $0 \neq \gamma$ (とその微分) の遠方での適当な減衰条件の下では $\sigma_{ess}(-\Delta) = \left[\frac{\pi^2}{d^2}, \infty\right)$ (σ_{ess} は essential spectrum を表わす) であり、 $0 < d$ が十分小ならば $\left[0, \frac{\pi^2}{d^2}\right)$ に少なくとも一つの固有値が現われることを示した。

K.Yoshitomi は [2] で周期的に曲がった帯状領域の場合、即ち γ が周期関数である場合を調べた。この場合は Bloch 解析が適用でき、スペクトルはバンド構造を持つことが示される。さらに [2] では、 $\gamma \neq \text{const.}$ の時 $d > 0$ が十分小ならばスペクトルの gap の存在が示されている。

さて、次にランダムに曲がった帯状領域の場合を考えよう。特に以下では γ が周期関数からのランダムな摂動の場合を扱う。[1], [2] では $\Omega_{d,\gamma}$ が自己交差をしない、即ち写像

$$\mathbb{R} \times (0, d) \ni (s, u) \mapsto \left(a_\gamma(s) - u \frac{db_\gamma(s)}{ds}, b_\gamma(s) + u \frac{da_\gamma(s)}{ds}\right) \in \Omega_{d,\gamma}$$

が injective になるように設定されているが、ランダムな場合には一般には自己交差をする可能性が排除できない (実際、以下で我々が扱っている場合には必ず自己交差をする)。しかし quantum waveguides を考察していることを思えば、 $(s, u) \neq (s', u')$ ならば違う点とみなしたい。従って以下のように設定し直すことにしよう。

$M = \mathbb{R} \times (0, d) \ni (s, u)$ に以下のように Riemann 計量を入れる。

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \rho(s, u)^2 ds^2 + du^2 \\ \rho(s, u) \equiv 1 + u\gamma(s) \quad (> 0) \end{aligned}$$

このとき M 上の Dirichlet 境界条件をもつ Laplace-Beltrami 作用素は

$$(1.4) \quad -\Delta_M \equiv -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial s} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial u} \rho \frac{\partial}{\partial u} \right) \text{ on } L^2(\mathbb{R} \times (0, d), \rho(s, u) ds du)$$

となる。ここで $L^2(\mathbb{R} \times (0, d), \rho(s, u) ds du)$ は $\mathbb{R} \times (0, d)$ 上の可測関数で測度 $\rho(s, u) ds du$ に関して二乗可積分なものの全体のなす Hilbert 空間とする。

さらに

$$(1.5) \quad U : L^2(\mathbb{R} \times (0, d), \rho(s, u) ds du) \longrightarrow L^2(\mathbb{R} \times (0, d), ds du) \\ f(s, u) \longmapsto \sqrt{\rho(s, u)} f(s, u)$$

というユニタリー変換によって

$$(1.6) \quad H \equiv U(-\Delta_M)U^* = -\frac{\partial}{\partial s} \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial s} - \frac{\partial^2}{\partial u^2} + V(s, u) \text{ on } L^2(\mathbb{R} \times (0, d))$$

with Dirichlet boundary conditions に変換される。ここで

$$V(s, u) \equiv \frac{1}{2} \frac{1}{\rho^2} u \gamma''(s) - \frac{5}{4} \frac{1}{\rho^4} u^2 \gamma'(s)^2 - \frac{1}{4} \frac{1}{\rho^2} \gamma(s)^2$$

で与えられる。(1.6) の自己共役作用素のスペクトルが考察すべき対象である。

2. 曲率のrandomness.

以下の仮定を置く。

Assumption

(A.1) $\gamma_0 \in C^2(\mathbb{R})$ を周期 l (> 0) をもつ 実数値周期関数とし、 $\gamma_{0,\min} \equiv \min_{s \in \mathbb{R}} \gamma_0(s)$ とすると

$$(2.1) \quad \gamma_{0,\min} > 0$$

を満たす。 ($C^2(\mathbb{R})$ は 2 階連続微分可能な関数の全体)

(A.2) $0 \leq f \in C_0^2(\mathbb{R})$ であり、

$$F(s) \equiv \sum_{i \in \mathbb{Z}} f(s - il), \quad F_{\min} \equiv \min_{s \in \mathbb{R}} F(s)$$

とすると

$$(2.2) \quad F_{\min} > 0$$

を満たす。 ($C_0^2(\mathbb{R})$ はコンパクトな台をもつ 2 階連続微分可能な関数の全体)

(A.3) $\{q_i(\omega)\}_{i \in \mathbb{Z}}$ をある確率空間 $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ 上の独立同分布な確率変数の族で、分布は $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ 上の一様分布とする。

(A.4) g は disorder parameter で、

$$0 \leq g < g_0, \quad \text{但し } g_0 \equiv \frac{2}{\max_{s \in \mathbb{R}} F'(s)}$$

とする。

以上の下で、曲率 γ に randomness を導入しよう。random な曲率を 周期関数からの摂動として

$$(2.3) \quad \gamma_{g,\omega}(s) \equiv \gamma_0(s) \left(1 + g \sum_{i \in \mathbb{Z}} q_i(\omega) f(s - il) \right)$$

と定義しよう。 $g = 0$ のときは、曲率は周期関数 γ_0 であり、disorder の parameter g が増加していくに従い曲率 $\gamma_{g,\omega}$ の randomness が増えていくと解釈できる。考察すべき作用素は以下の random な係数をもつ二階楕円型偏微分作用素である。

$$(2.4) \quad H_{g,\omega} \equiv -\frac{\partial}{\partial s} \frac{1}{\rho_{g,\omega}^2} \frac{\partial}{\partial s} - \frac{\partial^2}{\partial u^2} + V_{g,\omega} \quad \text{on } L^2(\mathbb{R} \times (0, d))$$

with Dirichlet boundary conditions, 但し

$$\begin{aligned} \rho_{g,\omega}(s, u) &\equiv 1 + u\gamma_{g,\omega}(s) \\ V_{g,\omega}(s, u) &\equiv \frac{1}{2} \frac{1}{\rho_{g,\omega}^2} u \gamma_{g,\omega}''(s) - \frac{5}{4} \frac{1}{\rho_{g,\omega}^4} u^2 \gamma_{g,\omega}'(s)^2 - \frac{1}{4} \frac{1}{\rho_{g,\omega}^2} \gamma_{g,\omega}(s)^2 \end{aligned}$$

である。

(A.5) (gap の存在) (a, b) は $\sigma(H_{0,\omega})$ の gap である。

3. Localization.

最初に $H_{g,\omega}$ のもつある ergodicity から $\Sigma^g, \Sigma_{ac}^g, \Sigma_{sc}^g, \Sigma_{pp}^g \subset \mathbb{R}$ が存在して

$$\sigma(H_{g,\omega}) = \Sigma^g \quad P - \text{a.s.}, \quad \sigma_{ac}(H_{g,\omega}) = \Sigma_{ac}^g \quad P - \text{a.s.},$$

$$\sigma_{sc}(H_{g,\omega}) = \Sigma_{sc}^g \quad P - \text{a.s.}, \quad \sigma_{pp}(H_{g,\omega}) = \Sigma_{pp}^g \quad P - \text{a.s.}$$

が成り立つことを注意しておく。ただし、 $\sigma_{ac}, \sigma_{sc}, \sigma_{pp}$ はそれぞれ絶対連続スペクトル、特異連続スペクトル、pure point スペクトルを表わす。

次が主結果である。

Theorem 1. (A.1)–(A.3) を仮定する。ならば、 d_0 が存在して、 $0 < d < d_0$ に対し (A.5) が成立していれば、 $0 < g' < g_0$ を満たす g' と $[0, g']$ 上で単調増加、Lipschitz 連続関数 $a(g)$, $[0, g']$ 上で単調減少、Lipschitz 連続関数 $b(g)$ が存在して以下を満たす。

(i) 定数 $0 < c_1 < c_2, 0 < c'_1 < c'_2$ が存在して

$$a + c_1 g \leq a(g) \leq a + c_2 g < b - c'_2 g \leq b(g) \leq b - c'_1 g$$

(ii) $\sigma(H_{g,\omega}) \cap [a, b] = [a, a(g)] \cup [b(g), b]$ $P - a.s.$ ($g \in [0, g']$)

(iii) $a_1(g)$ と $b_1(g)$ ($g \in (0, g']$) が存在して

$$a \leq a_1(g) < a(g) < b(g) < b_1(g) \leq b$$

を満たし $[a_1(g), a(g)] \cup [b(g), b_1(g)]$ で局在する, すなわち, *pure point spectrum* で, 対応する固有関数は指数関数的に減衰する。

4. 証明の概略.

証明の概略を述べよう。いくつかの記号と概念を用意する。 $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times (0, d)$, $L > 0$ に対して

$$\Lambda_L(x) \equiv \left\{ y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R} \times (0, d) \mid |y_1 - x_1| < \frac{L}{2} \right\}$$

$$\tilde{\Lambda}_L(x) \equiv \left\{ y = (y_1, y_2) \in \Lambda_L(x) \mid |y_1 - x_1| > \frac{L}{2} - l \right\}$$

$$H^{\Lambda_L(x)} \equiv H|_{L^2(\Lambda_L(x))} \text{ with Dirichlet boundary conditions}$$

$$R_{g,\omega}^{\Lambda_L(x)}(z) \equiv (H_{g,\omega}^{\Lambda_L(x)} - z)^{-1}$$

とする。また、領域 Λ に対して X_Λ は Λ の定義関数とする。

Definition 1. $m > 0, E \in \mathbb{R}, x = (x_1, x_2), x_1 \in l\mathbb{Z}, 4l \leq L \in 2l\mathbb{N}$ に対し、 $\Lambda_L(x)$ が (m, E) -regular であるとは $E \notin \sigma(H_{g,\omega}^{\Lambda_L(x)})$ かつ

$$\left\| X_{\tilde{\Lambda}_L(x)} R_{g,\omega}^{\Lambda_L(x)}(E) X_{\Lambda_l(x)} \right\|_{\Lambda_L(x)} \leq e^{-\frac{mL}{2}}$$

が成立することとする。ただし $\|\cdot\|_{\Lambda_L(x)}$ は作用素ノルムとする。

Definition 2. $m > 0, E_0 > -c_0 \equiv \inf_{s,u,\omega} V_{g,\omega}(s,u), p > 1, m_0 > 0, 0 < \beta < 1, q > 4p + 6, L_0 \in 2\mathbb{N}$ に対して、条件 (P1), (P2) を以下の様に定める。

$$(P1) \quad \mathbb{P}\{\Lambda_{L_0}(0) \text{ が } (m_0, E_0) - \text{regular}\} \geq 1 - L_0^{-p}$$

$$(P2) \quad -c_0 < E \text{ を満たす任意の } E \text{ と任意の } L_0 \leq L \in 2\mathbb{N} \text{ に対し}$$

$$\mathbb{P}\{d(E, \sigma(H_{\omega}^{\Lambda_L(0)})) < e^{-L^\beta}\} \leq (E + c_0)L^{-q}$$

Definition 3. $\psi \in L^2(\mathbb{R} \times (0, d))$ が $m > 0$ に対し $mass - m$ で指数関数的に減衰するとは

$$\limsup_{|x| \rightarrow \infty} \frac{\log |\psi(x)|}{|x|} \leq -m$$

が成り立つことである。

次の定理が示される。

Theorem 2. $0 < m < m_0$ に対し $B = B(m_0, m, \beta, p, q) > 0$ が存在して $L_0 \geq B$ について (P.1), (P.2) が成り立てば、 $\delta > 0$ が存在して $[E_0 - \delta, E_0 + \delta]$ で $H_{g,\omega}$ は確率 1 で pure point spectrum をもち、その固有関数は $mass - m$ で指数関数的に減衰する。

よって、gap 中のスペクトルの先端 $a(g), b(g)$ の近傍で定理 2 の仮定が成り立つことを示せば定理 1 が示される。

(P,2) は次の命題から従う。

Proposition 1(Wegner type estimate). $c > 0$ が存在して $-c_0 < E, 0 < \eta \leq E + c_0$ ならば

$$\mathbb{P}\{d(E, \sigma(H_{g,\omega}^{\Lambda_L(0)})) < \eta\} \leq c(E + c_0)\eta|\Lambda_L(0)|^2$$

が成り立つ。

(P,1) は multiscale analysis (induction) の第 1 段階の仮定であり (P,2) を援用しつつ multiscale analysis を遂行していく。そのとき key となるのが 次の(繰り込み群的) 不等式である。。

c_z が存在して $l \ll L' \ll L$ とすると, $y' \in \tilde{\Lambda}_{L'}(y)$ が存在して

$$\begin{aligned} \left\| X_{\tilde{\Lambda}_L(x)} R_{g,\omega}^{\Lambda_L(x)}(z) X_{\Lambda_l(y)} \right\|_{\Lambda_L(x)} &\leq c_z \left\| X_{\tilde{\Lambda}_{L'}(y)} R_{g,\omega}^{\Lambda_{L'}(y)}(z) X_{\Lambda_l(y)} \right\|_{\Lambda_{L'}(y)} \\ &\quad \times \left\| X_{\tilde{\Lambda}_L(x)} R_{g,\omega}^{\Lambda_L(x)}(z) X_{\Lambda_l(y')} \right\|_{\Lambda_L(x)} \end{aligned}$$

が成り立つ。

Remark. 仮定の (A.1)の(2.1)、(A.2)の(2.2)は、有界領域に制限された作用素の固有値の ω -dependence を制御するために必要であり、Wegner type estimate や、Theorem 1 の証明の中で重要な役割を果たす。しかし物理的に考えれば、 γ_0 の正值性が無くても局在化は起こり得るはずであり、仮定(A.1)(2.1) は除くことができると思われる。

REFERENCES

1. P. Exner and P. Šeba: Bound states in curved quantum waveguides, J. Math. Phys. **30** (1989), 2574-2580.
2. K. Yoshitomi: Band gap of the spectrum in periodically curved quantum waveguides, J. Diff. Equat. **142** (1998), 123-166.