

二次凸最適化問題における制約想定の観察

島根大学大学院自然科学研究科 西田 覚 (Satoru Nishida)

Graduate School of Natural Science and Technology, Shimane University

島根大学総合理工学部 黒岩 大史 (Daishi Kuroiwa)

Major in Interdisciplinary Science and Engineering, Shimane University

1 はじめに

本講究録では次のような実数値凸最適化問題に対する [6] における結果を紹介する:

$$\begin{aligned} \text{(P)} \quad & \text{minimize} \quad f(x) \\ & \text{subject to} \quad g_i(x) \leq 0, \forall i \in I \end{aligned}$$

ただし I は任意の空でない添字集合とし, $f, g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ は凸関数とする. 特に I が有限集合, 関数 g_i が二次凸関数

$$g_i(x) = \frac{1}{2} \langle x, A_i x \rangle + \langle b_i, x \rangle + c_i$$

であるとき制約想定 BCQ (the basic constraint qualification) の成立・不成立について観察する.

2 準備

まずは準備として, 関数 $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ に対して必要な概念を定義する.

$$\text{epi} f = \{(x, r) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid x \in \text{dom} f, f(x) \leq r\},$$

$$\text{dom} f = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < +\infty\}$$

を f のエピグラフ, f の実行定義域といい, f のエピグラフ $\text{epi} f$ が凸集合のとき, 関数 f は凸であるという. 関数 f の共役関数を

$$f^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{\langle x, y \rangle - f(x)\}$$

と定義する. $n \times n$ 実対称行列全体の集合を

$$S^n := \{A \mid A : n \times n \text{ 実対称行列}\}$$

とする. $A \in S^n$ に対して,

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \langle x, Ax \rangle \geq 0$$

をみたすとき, A が半正定値であるといい, 半正定値全体の集合を

$$S_+^n := \{A \in S^n \mid \forall x \in \mathbb{R}^n, \langle x, Ax \rangle \geq 0\}$$

とする. また $A \in S^n$ に対して,

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \langle x, Ax \rangle > 0$$

をみたすとき, A が正定値であるといい, 正定値全体の集合を

$$S_{++}^n := \{A \in S^n \mid \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \langle x, Ax \rangle > 0\}$$

とする. 全ての二次関数 $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ は $A \in S^n, b \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}$ を用いて

$$g(x) = \frac{1}{2} \langle x, Ax \rangle + \langle b, x \rangle + c$$

と表される. また,

$$g(x) = \frac{1}{2} \langle x, Ax \rangle + \langle b, x \rangle + c \text{ が凸関数} \iff A \in S_+^n$$

$$g(x) = \frac{1}{2} \langle x, Ax \rangle + \langle b, x \rangle + c \text{ が狭義凸関数} \iff A \in S_{++}^n$$

ということがよく知られている.

定理 2.1. ([6]) 関数 $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$g(x) = \frac{1}{2} \langle x, Ax \rangle + \langle b, x \rangle + c$$

とする. ただし $A \in S_+^n, b \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}$ とする. このとき, 関数 g の共役関数は

$$g^*(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} \langle y - b, A^{-1}(y - b) \rangle - c, & y \in R(A) + b \\ +\infty, & y \notin R(A) + b \end{cases}$$

である. ただし, $A^{-1}(y) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = y\}$, $R(A) = \{Ax \mid x \in \mathbb{R}^n\}$ とする.

系 2.1. 関数 $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$g(x) = \frac{1}{2} \langle x, Ax \rangle + \langle b, x \rangle + c$$

とする. ただし $A \in S_{++}^n, b \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}$ とする. このとき, 関数 g の共役関数は

$$g^*(y) = \frac{1}{2} \langle y - b, A^{-1}(y - b) \rangle - c$$

である.

ここで本研究に関連する先行研究を紹介する.

定理 2.2 (Kuroiwa, Suzuki, Yamamoto, [5]). I を任意の集合, $g_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ($i \in I$) を凸関数とし, $\bar{x} \in S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \leq 0, \forall i \in I\}$ と仮定する. このとき次の二つは同値である:

(1) $\bar{x}$ において BCQ が成り立つ．すなわち，

$$N_S(\bar{x}) = \text{cone co} \bigcup_{i \in I(\bar{x})} \partial g_i(\bar{x})$$

$$\begin{aligned} \text{ただし, } N_S(\bar{x}) &= \{v \in \mathbb{R}^n \mid \langle v, y - \bar{x} \rangle \leq 0, \forall y \in S\}, \\ \text{cone co } A &= \left\{ \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i \mid m \in \mathbb{N}, a_i \in A, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1 \right\}, \\ I(\bar{x}) &= \{i \in I \mid g_i(\bar{x}) = 0\} \end{aligned}$$

(2) 次の等式が成り立つ:

$$\{v \in \mathbb{R}^n \mid (v, \langle v, \bar{x} \rangle) \in \text{cl cone co} \bigcup_{i \in I} \text{epig}_i^*\} = \{v \in \mathbb{R}^n \mid (v, \langle v, \bar{x} \rangle) \in \text{cone co} \bigcup_{i \in I} \text{epig}_i^*\}$$

定理 2.3. I を有限集合, $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ($i \in I$) を凸関数とし, $\bar{x} \in S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \leq 0, \forall i \in I\}$ と仮定するまた, Slater 条件

$$\exists \hat{x} \in \mathbb{R}^n \text{ s.t. } g_i(\hat{x}) < 0, \forall i \in I$$

が成り立つとする．このとき $\bar{x}$ において BCQ が成り立つ．

3 主結果

この章では次の実数値凸最適化問題を考察する:

$$\begin{aligned} \text{(P)} \quad & \text{minimize} \quad f(x) \\ & \text{subject to} \quad g_i(x) \leq 0, \forall i \in I \end{aligned}$$

ただし I は有限集合, $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ($i \in I$) を

$$g_i(x) = \frac{1}{2} \langle x, A_i x \rangle + \langle b_i, x \rangle + c_i$$

で定義される二次凸関数とし, $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \leq 0, \forall i \in I\}$ を空でないとする．このとき BCQ の成立・不成立を観察するため, 次の二つの場合に分けて考える．

$$(1) \max_{i \in I} g_i \not\geq 0$$

$$(2) \max_{i \in I} g_i \geq 0$$

定理 3.1 (Kuroiwa, Nishida [6]). もし

$$\max_{i \in I} g_i \not\geq 0$$

ならば任意の S の元において BCQ が成り立つ．

証明.

$$\begin{aligned} \max_{i \in I} g_i \not\geq 0 &\iff \exists x_0 \text{ s.t. } \max_{i \in I} g_i(x_0) < 0 \\ &\iff \exists x_0 \text{ s.t. } g_i(x_0) < 0, \forall i \in I \end{aligned}$$

□

となり、定理 2.3 より任意の S の元において BCQ が成り立つ.

このように (1) の場合は定理 3.1 より常に BCQ が成り立つことが分かるが、(2) の場合は単純ではない. この場合をもう少し詳しく観察していく. ここで $I_0 = \{i \in I \mid g_i \geq 0\}$ とおく.

定理 3.2 (Kuroiwa, Nishida [6]). $\max_{i \in I} g_i \geq 0$ かつ $I_0 \neq \emptyset$ とする. $\bar{x} \in S$ に対して、もし

$$\begin{aligned} (1) \quad &\sum_{i \in I_0} R(A_i) = \sum_{i \in I \setminus I_0} R(A_i) \\ (2) \quad &\exists \{\bar{y}_j \mid j \in I \setminus I_0\} \subseteq \sum_{i \in I_0} R(A_i), \exists r > 0 \text{ s.t.} \\ &\begin{cases} \langle \bar{y}_j, \bar{x} \rangle = g_j^*(\bar{y}_j), \forall j \in I \setminus I_0 \\ B(0, r) \cap \sum_{i \in I_0} R(A_i) \subseteq \text{co} \{\bar{y}_j \mid j \in I \setminus I_0\} \end{cases} \end{aligned}$$

ならば $\bar{x}$ において BCQ が成り立つ. ただし $\sum_{j \in J} R(A_j) = \left\{ \sum_{j \in J} m_j \mid m_j \in M_j, j \in J \right\}$ で

あり、 $\sum \emptyset = \{0\}$ とする.

例 3.1. $I = \{1, 2, 3\}$ とし、 $g_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$g_1(x_1, x_2) = x_1^2, \quad g_2(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1, \quad g_3(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1$$

とする. このとき

$$S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 \leq 0, x_1^2 + x_1 \leq 0, x_1^2 - x_1 \leq 0\} = \{0\} \times \mathbb{R}$$

$$\max_{i \in \{1, 2, 3\}} g_i(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1(x_1 - 1), & x_1 \leq 0, x_2 \in \mathbb{R} \\ x_1(x_1 + 1), & x_1 > 0, x_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

より $\max_{i \in \{1, 2, 3\}} g_i \geq 0$ をみだし、 $g_1(x_1, x_2) = x_1^2 \geq 0$ である. g_i の共役関数は定理 2.1 から

$$\begin{aligned} g_1^*(y_1, y_2) &= \begin{cases} \frac{1}{4}y_1^2, & y_1 \in \mathbb{R}, y_2 = 0 \\ +\infty, & y_2 \neq 0 \end{cases} \\ g_2^*(y_1, y_2) &= \begin{cases} \frac{1}{4}(y_1 - 1)^2, & y_1 \in \mathbb{R}, y_2 = 0 \\ +\infty, & y_2 \neq 0 \end{cases} \\ g_3^*(y_1, y_2) &= \begin{cases} \frac{1}{4}(y_1 + 1)^2, & y_1 \in \mathbb{R}, y_2 = 0 \\ +\infty, & y_2 \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

より, $I_0 = \{1\}$, $|I \setminus I_0| = 2$ である. 明らかに $A_1 = A_2 = A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ であるので $R(A_1) = R(A_2) + R(A_3) = \mathbb{R} \times \{0\}$ となる. ここで $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in S$ とすると, $\bar{x}_1 = 0$ である.

$$\bar{y}_2 = (1, 0), \bar{y}_3 = (-1, 0), r = \frac{1}{2}$$

とおくと,

$$\langle \bar{y}_2, \bar{x} \rangle = 0, g_2^*(\bar{y}_2) = 0, \langle \bar{y}_3, \bar{x} \rangle = 0, g_3^*(\bar{y}_3) = 0$$

$$B\left((0, 0), \frac{1}{2}\right) \cap R(A_1) \subseteq \text{co} \left\{ \left(\frac{-1}{2}, 0\right), \left(\frac{1}{2}, 0\right) \right\} \subseteq \text{co} \{(-1, 0), (1, 0)\} = \text{co} \{\bar{y}_2, \bar{y}_3\}$$

となるので定理 3.2 より $\bar{x}$ において BCQ が成り立つ.

定理 3.3 (Kuroiwa, Nishida [6]). $\max_{i \in I} g_i \geq 0$ かつ $I_0 \neq \emptyset$ とする. もし,

$$|I \setminus I_0| \leq \dim \sum_{i \in I_0} R(A_i)$$

ならば全ての S の元において BCQ は不成立である.

例 3.2. $I = \{1, 2\}$ とし, $g_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$g_1(x_1, x_2) = x_1^2, g_2(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1$$

とする. このとき

$$I_0 = \{1\}, |I \setminus I_0| = 1$$

かつ

$$S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 \leq 0, x_1^2 - x_1 \leq 0\} = \{0\} \times \mathbb{R}, A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

であるので

$$R(A_1) = \mathbb{R} \times \{0\}$$

より, $\dim R(A_1) = 1$ となるので定理 3.3 より任意の S の元において BCQ が成り立たない.

定理 3.4 (Kuroiwa, Nishida [6]). $\max_{i \in I} g_i \geq 0$ かつ $I_0 = \emptyset$ とする. もし,

$$\exists a \in S \text{ s.t. } g_i^* > \langle a, \cdot \rangle, \forall i \in I$$

ならば BCQ が成り立つ.

参考文献

- [1] V. Jeyakumar, A. M. Rubinov, B. M. Glover, Y. Ishizuka. Inequality Systems and Global Optimization. *J. Math. Anal. Appl.* 202 (1996), no. 3, 900919.
- [2] J. M. Borwein, A. S. Lewis. *Convex analysis and nonlinear optimization. Theory and examples.* Springer, New York (2006).
- [3] V. Jeyakumar. Constraint Qualifications Characterizing Lagrangian Duality in Convex Optimization. *J. Optim. Theory Appl.* 136 (2008), no. 1, 3141.
- [4] M. A. Goberna, V. Jeyakumar, M. A. López. Necessary and sufficient constraint qualifications for solvability of systems of infinite convex inequalities. *Nonlinear Anal.* 68 1184-1194 (2008)
- [5] D. Kuroiwa, S. Suzuki, Y. Yamamoto. Characterizations of the basic constraint qualification and its applications, submitted.
- [6] D. Kuroiwa, S. Nishida. Observation on constraint qualifications in a class of convex optimization, preprint.