

指数関数ポテンシャルをもつバネ
で繋がれた一次元 N 粒子系 ——
逆スペクトル法による一般解 (2)

埼玉大・理 山 崎 進

3月7日受理

§ 5. 解の一致(I)

まず(4・11)を示そう。簡単な式の変形により(補遺1),

$$[\det(\mu E_{2N} - \mathcal{L}_{2N})]^2 = \det(\mu^2 E_N - L_N) \cdot \det(\mu^2 E_N - \tilde{L}_N), \quad (5 \cdot 1)$$

が導かれる。ここで $\tilde{L}_N$ は L_N の各要素を

$$\begin{cases} \tilde{\alpha}_j = a_{2j} \cdot a_{2j+1} \\ \tilde{\beta}_j = a_{2j-1}^2 + a_{2j}^2 \end{cases}, \quad (4 \cdot 1c)$$

$$(4 \cdot 1d)$$

で置き換えたものである。 $\tilde{L}_N$ の固有値 $\tilde{\lambda}_k$ もまた大きさの順に番号づけられているものとする。固有値を用いて(5・1)を書き直せば

$$\prod_{k=1}^N (\mu^2 - \mu_k^2)^2 = \prod_{k=1}^N (\mu^2 - \lambda_k) \cdot (\mu^2 - \tilde{\lambda}_k),$$

となり、従って

$$\lambda_k = \tilde{\lambda}_k = \mu_k^2, \quad (4 \cdot 11)$$

でなければならない。

Q.E.D.

次に(4・11)を考慮すると

$$\mathcal{L}_{2N} \varphi_k = \mu_k \varphi_k, \quad (5 \cdot 2)$$

より

$$\mathcal{L}_{2N}^2 \varphi_k = \lambda_k \varphi_k, \quad (k = 1, \dots, 2N) \quad (5 \cdot 3)$$

が得られるが、これは

$$\int L_N \varphi_k^{\text{odd}} = \lambda_k \varphi_k^{\text{odd}} \quad (k = 1, \dots, 2N) \quad (5 \cdot 4a)$$

山崎 進

$$\left\{ \tilde{L}_N \varphi_k^{\text{even}} = \lambda_k \varphi_k^{\text{even}}, (k = 1, \dots, 2N) \right. \quad (5 \cdot 4b)$$

と書きかえられる。ここで

$$\lambda_{2N-k+1} \equiv \lambda_k, (k = 1, \dots, N)$$

とし、一般にベクトル ψ の第 l 成分を $\psi^{(l)}$ と書くとき

$$\begin{cases} \varphi_k^{\text{odd}} = {}^t(\varphi_k^{(1)}, \varphi_k^{(3)}, \dots, \varphi_k^{(2N-1)}) , \\ \varphi_k^{\text{even}} = {}^t(\varphi_k^{(2)}, \varphi_k^{(4)}, \dots, \varphi_k^{(2N)}) , \end{cases}$$

である。ところで、対角行列

$$K = \text{diag}(1, -1, 1, \dots, 1, -1),$$

により $\mathcal{L}_{2N}$ は

$$K \mathcal{L}_{2N} K^{-1} = -\mathcal{L}_{2N},$$

と変換されるので、(5・2)から

$$\mathcal{L}_{2N}(K \varphi_k) = -\mu_k(K \varphi_k),$$

が得られる。従って

$$K \varphi_k = \pm \varphi_{2N-k+1}, (k = 1, \dots, N) \quad (5 \cdot 5)$$

即ち

$$\begin{cases} \varphi_k^{\text{odd}} = \pm \varphi_{2N-k+1}^{\text{odd}}, & (5 \cdot 6a) \\ \varphi_k^{\text{even}} = \mp \varphi_{2N-k+1}^{\text{even}}, & (5 \cdot 6b) \end{cases}$$

であり、(5・4)式は k の範囲を $k = 1, \dots, N$ としたものに同等となる。さらに(5・5)を用いると

$$\langle \varphi_k, \varphi_{2N-k+1} \rangle = 0,$$

より

$$\|\varphi_k^{\text{odd}}\|^2 = \|\varphi_k^{\text{even}}\|^2$$

が、また

$$\langle \varphi_k, \varphi_k \rangle = 1,$$

より

$$\|\varphi_k^{\text{odd}}\|^2 + \|\varphi_k^{\text{even}}\|^2 = 1,$$

が得られるから

$$\|\varphi_k^{\text{odd}}\|^2 = \|\varphi_k^{\text{even}}\|^2 = \frac{1}{2},$$

となる。従って L_N の規格化された固有ベクトル ψ_k は

$$\psi_k = \pm \sqrt{2} \varphi_k^{\text{odd}},$$

で与えられ、

$$(\psi_k^{(1)})^2 = 2 (\varphi_k^{(1)})^2,$$

即ち (4・13) が成り立つ。

Q.E.D.

§ 6. 解の一致Ⅲ)

関係式 (4・14) を導こう。変換された初期値 $(\alpha(0), \beta'(0))$ に対応する表式にプライムをつけて表わすことにする。まず

$$L'_N(0) = L_N(0) + \zeta_0 E_N,$$

より

$$\begin{cases} \lambda'_k = \lambda_k + \zeta_0, \\ \psi'_k(0) = \pm \psi_k(0), \end{cases} \quad (6 \cdot 1a)$$

$$(6 \cdot 1b)$$

従って

山崎 進

$$\frac{R'_k(0)}{\sum_{1 \leq k \leq N} R'_k(0)} = \frac{R_k(0)}{\sum_{1 \leq k \leq N} R_k(0)},$$

即ち

$$R'_k(0) = \rho(0) R_k(0),$$

となり, (6・1a) (2・8b) と合わせて

$$R'_k(\tau) = \rho(\tau) R_k(\tau), \quad (6 \cdot 2)$$

を得る。ここで

$$\rho(\tau) = \rho(0) e^{2\zeta_0 \tau}, \quad (6 \cdot 3)$$

であり, $\rho(0)$ は任意に選べるので ζ_0 に依らないものとする。また (6・1a), (6・2), (3・3) より

$$d'_i(\tau) = \sum_{1 \leq k \leq N} \rho(\tau) \cdot R_k(\tau) \cdot (\lambda_k + \zeta_0)^{i-1} = \sum_{1 \leq j \leq i} d_{i,j} \cdot d_j, \quad (6 \cdot 4)$$

$$d_{i,j} = \rho \cdot {}_{i-1}C_{j-1} \cdot \zeta_0^{i-j}, \quad (6 \cdot 5a)$$

となる。さらに

$$\frac{\dot{P}'_1}{P'_1} = \frac{\dot{P}_1}{P_1} + 2\zeta_0, \quad (6 \cdot 6)$$

が成りたつことも容易に示される (補遺 2)。

さて, P_j の満たす関係式 (3・8) を考慮すると (4・14b) は

$$\frac{\dot{P}'_{2j-1}}{P'_{2j-1}} - \frac{\dot{P}'_{2j-3}}{P'_{2j-3}} = \frac{\dot{P}_{2j-1}}{P_{2j-1}} - \frac{\dot{P}_{2j-3}}{P_{2j-3}} + 2\zeta_0,$$

と書き換えられるが, (6・6)によりこれは

$$\frac{\dot{P}'_{2j-1}}{P'_{2j-1}} = \frac{\dot{P}_{2j-1}}{P_{2j-1}} + 2^j \zeta_0, \quad (6 \cdot 7a)$$

に同等となる。等式 (6・7a) の証明を補遺(3)に与える。次に (6・7a) を積分すれば,

$$P'_{2j-1}(\tau) = C_{2j-1} \cdot e^{2^j \zeta_0 \tau} \cdot P_{2j-1}(\tau), \quad (6 \cdot 7b)$$

が得られる。積分定数 C_{2j-1} は ζ_0 に依らない (補遺 4) ので, (6・7b) において $\zeta_0 = \tau = 0$ とおき (3・6) を代入することにより

$$C_{2j-1} = \rho(0)^j, \quad (6 \cdot 8)$$

となる。これらを考慮すれば (4・14a) を確かめることは容易である。

埼玉大学において研究を続けるにあたり、伊藤大介先生には筆者の種々勝手な要望に快く応じて頂きました。あつくお礼申し上げます。

補遺(1)、等式 (5・1) の導出。

まず

$$(-1)^{2N} \det(\mu_k E_{2N} - \mathcal{L}_{2N}) = \det(-\mu_k E_{2N} + \mathcal{L}_{2N}),$$

及び

$$\mu_k = -\mu_{2N-k+1},$$

より、二つの多項式 $\det(\mu E_{2N} - \mathcal{L}_{2N})$ と $\det(\mu E_{2N} + \mathcal{L}_{2N})$ とは総ての零点を共有し、従って両者が等しいことがわかる。それ故

$$[\det(\mu E_{2N} - \mathcal{L}_{2N})]^2 = \det(\mu^2 E_{2N} - \mathcal{L}_{2N}^2), \quad (6 \cdot 9)$$

となるが、(4・1) を考慮すると

$$\mathcal{L}_{2N}^2 = \begin{bmatrix} \beta_1 & 0 & \alpha_1 & & & \\ 0 & \tilde{\beta}_1 & 0 & \tilde{\alpha}_1 & & \\ \alpha_1 & 0 & \beta_2 & 0 & \alpha_2 & \\ & \tilde{\alpha}_1 & 0 & \tilde{\beta}_2 & 0 & \\ & & \alpha_2 & 0 & & \\ & & & & & \tilde{\alpha}_{N-1} \\ & & & & & \beta_N & 0 \\ & & & & & \tilde{\alpha}_{N-1} & 0 & \tilde{\beta}_N \end{bmatrix},$$

山崎 進

と書かれるので(6・9)式右辺は

$$\det \begin{pmatrix} (\mu^2 E_N - L_N) & 0 \\ 0 & (\mu^2 E_N - \tilde{L}_N) \end{pmatrix}$$

と変形され、従って(5・1)が成り立つ。

補遺(2), (6・6)式の導出。

$$P'_1 = \sum R'_k(0) \exp \{ 2(\lambda_k + \zeta_0) \tau \} .$$

より

$$\dot{P}'_1 = \sum 2\lambda_k R'_k(0) \exp \{ 2(\lambda_k + \zeta_0) \tau \} + 2\zeta_0 P'_1 .$$

従って

$$\frac{\dot{P}'_1}{P'_1} = \frac{\sum 2\lambda_k R'_k(0) \exp(2\lambda_k \tau)}{\sum R'_k(0) \exp(2\lambda_k \tau)} + 2\zeta_0 = \frac{\dot{P}_1}{P_1} + 2\zeta_0 .$$

補遺(3), (6・7a)式の証明

P_j の表示式(3・5a)を用いる。

$$\dot{a}_l = 2d_{l+1} ,$$

であるから(6・7a)は

$$\frac{\det \langle d'_1, d'_2, \dots, d'_{j-1}, d'_{j+1} \rangle}{\det \langle d'_1, d'_2, \dots, d'_{j-1}, d'_j \rangle} = \frac{\det \langle d_1, d_2, \dots, d_{j-1}, d_{j+1} \rangle}{\det \langle d_1, d_2, \dots, d_{j-1}, d_j \rangle} + j\zeta_0 , \quad (6 \cdot 7c)$$

となる。ここで

$$\langle d_1, d_2, \dots, d_j \rangle = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & \dots & d_j \\ d_2 & d_3 & \dots & d'_{j+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_j & d_{j+1} & \dots & d_{2j-1} \end{bmatrix} ,$$

とし、 $\langle d_1, d_2, \dots, d_{j-1}, d_{j+1} \rangle$ 等についても同様である。二つの一次方程式系

$$\sum_{0 \leq k \leq j-1} d_{i+k} x_{k+1} = d_{j+i} \quad (i = 1, \dots, j) \quad (6 \cdot 10a)$$

及び

$$\sum_{0 \leq k \leq j-1} d'_{i+k} x'_{k+1} = d'_{j+i} \quad , \quad (\quad " \quad) \quad (6 \cdot 11)$$

を考えると, (6・7c) は

$$x'_j = x_j + j \zeta_0, \quad (6 \cdot 7d)$$

と書かれる。そこで,

$$x'_{k+1} = \sum_{k \leq l \leq j-1} {}_l C_{l-k} (-\zeta_0)^{l-k} \cdot x_{l+1} - {}_j C_{j-k} (-\zeta_0)^{j-k}, \quad (6 \cdot 12)$$

($k = 0, \dots, j-1$)

を以下に示そう。 $k = j-1$ のとき, 明らかに (6・12) は (6・7d) に一致する。

まず次の (L. 1) ~ (L. 3) が成り立つ。

(L. 1),

$$\sum_{0 \leq q \leq l} (-1)^{i+q} {}_l C_q \cdot {}_{i+q} C_m = \begin{cases} {}_i C_{m-l}; & l \leq m \leq l+i \\ 0 & ; 0 \leq m \leq l-1, \end{cases} \quad (6 \cdot 13a)$$

$$(6 \cdot 13b)$$

ただし, $i, l \geq 0$ とし, 一般に

$${}_i C_j = 0 \quad ; \quad i < j$$

と約束する。

(L. 2),

$$\sum_{0 \leq p \leq l-1} {}_{l-1} C_p (-\zeta_0)^p \cdot d_{l-1+i-p, m}$$

$$= \begin{cases} d_{i, m-(l-1)}; & l \leq m \leq l-1+i \\ 0 & ; 1 \leq m \leq l-1 \end{cases} \quad (6 \cdot 14a)$$

$$(6 \cdot 14b)$$

ただし, $i, l \geq 1$ とし,

$$d_{i, j} = 0 \quad ; \quad i < j, \quad (6 \cdot 5b)$$

である。

山崎 進

(L. 3),

$$\begin{aligned} & \sum_{1 \leq k \leq i-1} d_{i,k} d_{l+k-1} + d_{l+i-1, l+i-1} d_{l+i-1} \\ &= \sum_{0 \leq p \leq l-1} {}_{l-1}C_p (-\zeta_0)^p \cdot d'_{l+i-1-p} \end{aligned} \quad (6 \cdot 15)$$

ただし, $i, l \geq 1$ とし, $i = 1$ のとき (6・15) 左辺は第二項のみとする。

(L. 1) の証明, l に関する帰納法による。 $l = 0$ 及び $l = 1$ の各場合に (6・13) を確かめることは容易である。 $l (\geq 1)$ のときに (6・13) を仮定し, $l + 1$ の場合を証明しよう。

$$\begin{aligned} & \sum_{0 \leq q \leq l+1} (-1)^{l+1+q} {}_{l+1}C_q \cdot {}_{i+q}C_m \\ &= - \sum_{0 \leq q \leq l} (-1)^{l+q} {}_lC_q \cdot {}_{i+q}C_m - \sum_{1 \leq q \leq l} (-1)^{l+q} {}_lC_{q-1} \cdot {}_{i+q}C_m + {}_{i+l+1}C_m \end{aligned} \quad (6 \cdot 16)$$

であるが,

$$\begin{aligned} \text{右辺第2項} &= - \sum_{0 \leq q \leq l-1} (-1)^{l+q+1} {}_lC_q \cdot {}_{i+q+1}C_m \\ &= \sum_{0 \leq q \leq l} (-1)^{l+q} {}_lC_q \cdot {}_{i+q+1}C_m - {}_{i+l+1}C_m, \end{aligned}$$

なので

$$(6 \cdot 16) \text{ 右辺} = \begin{cases} \sum_{0 \leq q \leq l} (-1)^{l+q} {}_lC_q \cdot {}_{i+q}C_{m-1}; m \geq 1 & (6 \cdot 17a) \\ 0 & ; m = 0 \end{cases}, \quad (6 \cdot 17b)$$

となる。いま $1 \leq m \leq (l+1) - 1$ とすると $0 \leq m-1 \leq l-1$ であり (6・13b) により (6・17b) = 0 がわかる。次に $l+1 \leq m \leq (l+1) + i$ とすると $l \leq m-1 \leq l+i$, 従って (6・13a) により (6・17a) = ${}_iC_{m-(l+1)}$ となる。 Q.E.D.

(L. 2) の証明, q に代えて

$$p = l - q,$$

を用いて (6・13) を書き直し, さらに i, l, m を改めて $i-1, l-1, m-1$ と表わせば (L. 1) は

$$\sum_{0 \leq p \leq l-1} (-1)^p {}_{l-1}C_p \cdot {}_{l-2+i-p}C_{m-1} = \begin{cases} {}_{i-1}C_{m-l}; l \leq m \leq l-1+i & (6 \cdot 18a) \\ 0 & ; 1 \leq m \leq l-1, \end{cases} \quad (6 \cdot 18b)$$

指数関数ポテンシャルをもつバネで繋がれた一次元 N 粒子系

と書ける。一方、

$$\begin{aligned}
 (6 \cdot 14) \text{ 左辺} &= \rho \sum_{0 \leq p \leq l-1} \sum_{l-1} C_p (-\zeta_0)^p \cdot {}_{l-2+i-p} C_{m-1} \cdot \zeta_0^{l-1+i-p-m} \\
 &= \rho \left\{ \sum_{0 \leq p \leq l-1} (-1)^p {}_{l-1} C_p \cdot {}_{l-2+i-p} C_{m-1} \right\} \cdot \zeta_0^{i-m+l-1}
 \end{aligned}$$

となり、(6・18) を考慮すればこれが(6・14) 右辺に等しいことがわかる。 Q.E.D.

(L. 3) の証明、

$$m = l + k - 1,$$

とおくと

$$\begin{aligned}
 &\sum_{1 \leq k \leq i-1} d_{i,k} d_{l+k-1} \\
 &= \sum_{l \leq m \leq l+i-2} d_{i,m-(l-1)} d_m \\
 &= \sum_{1 \leq m \leq l+i-2} \left\{ \sum_{0 \leq p \leq l-1} {}_{l-1} C_p (-\zeta_0)^p \cdot d_{l+i-1-p,m} \right\} d_m \\
 &= \sum_{0 \leq p \leq l-1} {}_{l-1} C_p (-\zeta_0)^p \left\{ \sum_{1 \leq m \leq l+i-2} d_{l+i-1-p,m} d_m \right\} \quad (6 \cdot 19a)
 \end{aligned}$$

が得られる。ここで第二式より第三式への変形に(L. 2) を利用した。一方、(6・5b) により

$$d_{l+i-1,l+i-1} = \sum_{0 \leq p \leq l-1} {}_{l-1} C_p (-\zeta_0)^p d_{l+i-1-p,l+i-1}, \quad (6 \cdot 19b)$$

と書ける。従って $i \geq 2$ として

$$\begin{aligned}
 (6 \cdot 15) \text{ 左辺} &= \sum_{0 \leq p \leq l-1} {}_{l-1} C_p (-\zeta_0)^p \left\{ \sum_{1 \leq m \leq l+i-1} d_{l+i-1-p,m} \cdot d_m \right\} \\
 &= \sum_{0 \leq p \leq l-1} {}_{l-1} C_p (-\zeta_0)^p \left\{ \sum_{1 \leq m \leq l+i-1-p} d_{l+i-1-p,m} \cdot d_m \right\} \\
 &= \sum_{0 \leq p \leq l-1} {}_{l-1} C_p (-\zeta_0)^p d'_{l+i-1-p},
 \end{aligned}$$

が得られる。 $i = 1$ のときは(6・19b) により

$$(6 \cdot 15) \text{ 左辺} = \sum_{0 \leq p \leq l-1} {}_{l-1} C_p (-\zeta_0)^p d_{l-p,l} \cdot d_l$$

山崎 進

であるが、(L. 2)によりこれは

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{1 \leq m \leq l} \sum_{0 \leq p \leq l-1} {}^{l-1}C_p (-\zeta_0)^p d_{l-p, m} \cdot d_m \\
 &= \sum_{0 \leq p \leq l-1} {}^{l-1}C_p (-\zeta_0)^p \left\{ \sum_{1 \leq m \leq l-p} d_{l-p, m} \cdot d_m \right\}
 \end{aligned}$$

となり (6・15) 右辺に等しい。

Q.E.D.

さて、一次方程式系 (6・10a) を

$$\langle d_1, d_2, \dots, d_j \rangle \cdot {}^t(x_1, x_2, \dots, x_j) = {}^t(d_{j+1}, d_{j+2}, \dots, d_{2j}), \quad (6 \cdot 10b)$$

と書き、 $d_{i, k}$ を (i, k) 要素にもつ三角行列 D を両辺に作用させる。

$$\begin{aligned}
 &[D \cdot \langle d_1, d_2, \dots, d_j \rangle] \text{ の } (i, l) \text{ 要素} \\
 &= \sum_{1 \leq k \leq i} d_{i, k} \cdot d_{l+k-1} \\
 &= \sum_{1 \leq k \leq i-1} d_{i, k} \cdot d_{l+k-1} + d_{i, i} \cdot d_{l+i-1}, \quad (6 \cdot 20)
 \end{aligned}$$

であるが、(6・5a) より

$$d_{i, i} = d_{l+i-1, l+i-1} = \rho,$$

従って (L. 3) により

$$(6 \cdot 20) = \sum_{0 \leq p \leq l-1} {}^{l-1}C_p (-\zeta_0)^p \cdot d'_{l+i-1-p},$$

となる。従って

$$\begin{aligned}
 &[D \cdot \langle d_1, d_2, \dots, d_j \rangle \cdot {}^t(x_1, \dots, x_j)] \text{ の第 } i \text{ 要素} \\
 &= \sum_{1 \leq l \leq j} \left\{ \sum_{0 \leq p \leq l-1} {}^{l-1}C_p (-\zeta_0)^p d'_{l+i-1-p} \right\} x_l, \quad (6 \cdot 21)
 \end{aligned}$$

を得る。一方、

$$[D \cdot {}^t(d_{j+1}, d_{j+2}, \dots, d_{2j})] \text{ の第 } i \text{ 要素} = \sum_{1 \leq k \leq i} d_{i, k} \cdot d_{j+k}$$

$$= \sum_{1 \leq k \leq i-1} d_{i,k} d_{(j+1)+k-1} + d_{(j+1)+i-1, (j+1)+i-1} \cdot d_{(j+1)+i-1} ,$$

であり、再び (L.3) を用いると

$$= \sum_{0 \leq p \leq j} {}_j C_p (-\zeta_0)^p \cdot d'_{j+i-p} . \quad (6 \cdot 22)$$

となる。(6・21), (6・22) より

$$\begin{aligned} & \sum_{1 \leq l \leq j} \left\{ \sum_{0 \leq p \leq l-1} {}_{l-1} C_p (-\zeta_0)^p d'_{l+i-1-p} \right\} x_l \\ &= \sum_{0 \leq p \leq j} {}_j C_p (-\zeta_0)^p \cdot d'_{j+i-p} , \end{aligned} \quad (6 \cdot 23)$$

を得る。この式の左辺を、 p に代えて

$$k = l - 1 - p ,$$

で表わせば

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \sum_{1 \leq l \leq j} \left\{ \sum_{0 \leq k \leq l-1} {}_{l-1} C_{l-1-k} (-\zeta_0)^{l-1-k} \cdot d'_{i+k} \right\} \cdot x_l \\ &= \sum_{0 \leq k \leq j-1} d'_{i+k} \left\{ \sum_{k+1 \leq l \leq j} {}_{l-1} C_{l-1-k} (-\zeta_0)^{l-1-k} \cdot x_l \right\} , \end{aligned}$$

となり、右辺を p に代えて

$$k = j - p ,$$

で表わせば

$$\text{右辺} = \sum_{0 \leq k \leq j-1} {}_j C_{j-k} (-\zeta_0)^{j-k} \cdot d'_{i+k} + d'_{i+j} ,$$

となる。従って (6・23) は

$$\begin{aligned} & \sum_{0 \leq k \leq j-1} d'_{i+k} \left\{ \sum_{k+1 \leq l \leq j} {}_{l-1} C_{l-1-k} (-\zeta_0)^{l-1-k} \cdot x_l \right. \\ & \quad \left. - {}_j C_{j-k} (-\zeta_0)^{j-k} \right\} = d'_{j+i} \end{aligned}$$

と書き直されるが、これを (6・11) と比べれば (6・12) が得られる。

Q.E.D.

山崎 進

補遺(4), C_{2j-1} が ζ_0 に依らないことの証明。

(6・7b) より

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\zeta_0} \ln C_{2j-1} &= \frac{1}{P'_{2j-1}} \left(\frac{\partial P'_{2j-1}}{\partial \zeta_0} - 2j \tau P'_{2j-1} \right) \\ &= \frac{1}{P'_{2j-1}} \sum_{1 \leq k \leq j} \det \left(\langle d'_1, \dots, d'_{k-1}, (k-1)d'_{k-1}, \right. \\ &\quad \left. d'_{k+1}, \dots, d'_j \rangle \right), \end{aligned} \quad (6 \cdot 24)$$

である。ここで、

$$\langle d'_1, \dots, d'_{k-1}, (k-1)d'_{k-1}, d'_{k+1}, \dots, d'_j \rangle,$$

は $\langle d'_1, d'_2, \dots, d'_j \rangle$ の第 k 列を

$$^t \left((k-1)d'_{k-1}, kd'_k, \dots, (k-1+j-1)d'_{k-1+j-1} \right),$$

で置き換えたものを表わし、第二式から第三式への変形には、表式(3・5a)および

$$\frac{\partial d'_i}{\partial \zeta_0} = 2\tau d'_i + (i-1)d'_{i-1},$$

を用いた。そこで

$$\sum_{1 \leq k \leq j} \det \left(\langle d'_1, \dots, d'_{k-1}, (k-1)d'_{k-1}, d'_{k+1}, \dots, d'_j \rangle \right) = 0 \quad (6 \cdot 25)$$

を示そう。^{*} いま、 $A = \langle d'_1, d'_2, \dots, d'_j \rangle$ の (i, k) 要素

$$a_{i,k} = d'_{i+k-1},$$

の余因子を $A_{i,k}$ で表わせば、

$$\begin{aligned} (6 \cdot 25) \text{ 左辺} &= \sum_{1 \leq k \leq j} \sum_{1 \leq i \leq j} (k-1+i-1) d'_{k-1+i-1} A_{i,k} \\ &= \sum_{1 \leq k \leq j} (k-1) \left(\sum_{1 \leq i \leq j} d'_{i+(k-1)-1} A_{i,k} \right) \\ &\quad + \sum_{1 \leq i \leq j} (i-1) \left(\sum_{1 \leq k \leq j} d'_{(i-1)+k-1} A_{i,k} \right) \end{aligned}$$

^{*}) 以下の証明は北原清志氏(工学院大・数学)によるものです。

指数関数ポテンシャルをもつバネで繋がれた一次元N粒子系

$$= \sum_{2 \leq k \leq j} (k-1) \left(\sum_{1 \leq i \leq j} a_{i, k-1} A_{i, k} \right) + \sum_{2 \leq i \leq j} (i-1) \left(\sum_{1 \leq k \leq j} a_{i-1, k} A_{i, k} \right)$$

となるが,

$$\sum_{1 \leq i \leq j} a_{i, k-1} A_{i, k} \left(\sum_{1 \leq k \leq j} a_{i-1, k} A_{i, k} \right)$$

は A の第 k 列 (第 i 行) を $k-1$ 列 ($i-1$ 行) で置き換えてできる行列式なので, 0 に等しい。 Q.E.D.