

Key 多項式とその組み合わせ論

国際基督教大学 松村朝雄

Tomoo Matsumura

International Christian University

概要

本研究は早稲田大学の杉本奨吾氏との共同研究である。Key 多項式は Demazure 加群の指標である。Key 多項式の組み合わせ論的表示公式は, Lascoux–Schützenberger [LS90] のヤングタブローによる公式と Kohnert [Koh91] の Kohnert 図形による公式に加えて, Assaf の半標準 key タブローによる公式が知られている。Assaf の公式の別証明を得ることができたので, それについて報告する。

1 概要

本研究は早稲田大学の杉本奨吾氏との共同研究である。Demazure は [Dem74] において “Demazure 加群” を導入し, Weyl の指標公式を一般化する形でその指標を記述した。A 型の場合にその指標は Key 多項式と呼ばれている。Lascoux–Schützenberger は [LS90] において, “standard bases” (cf. [RS95]) という名の下にそれらを調べ, 半標準 Young タブローによる公式を得た。

Key 多項式の組み合わせ論的な表示公式としては, 当初 Kohnert [Koh91] の Kohnert 図形による公式も知られていたが, 最近になって Assaf [Ass18] も, 半標準 Key タブローを導入し別の組み合わせ論的公式を得た。本稿では, この Assaf の Key タブローによる公式の別証明が得られたので, それについて報告する。組み合わせ論的に比較的すっきりした議論なので, 別証明として興味を持っていただければ幸いである。大筋の流れを説明することにし, 詳細は改めて執筆するのでそちらを参照されたい。

Assaf のもともとの証明は, 半標準 Young タブローの標準化と Fundamental Slide 多項式 (Assaf–Searles [AS17]) への分解に基づく。我々の証明は, Wachs [Wac85] による旗付き Schur 多項式の Young タブロー表示 (あるいは行列式公式) の証明にヒントを得ている。具体的には, Key 多項式が Demazure 作用素によって帰納的に定義されるので, Demazure 作用素が Key タブローにどのように作用するか調べることによって, 帰納的な証明を可能にした。

2 定義および定理

正の整数 n を決めておく. n 個の非負整数の列 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ を (weak) composition と呼ぶ. $i > n$ に対しては, $\alpha_i = 0$ と仮定する. これらの composition たちには, $[n] := \{1, \dots, n\}$ の置換群 S_n が右から作用する. すなわち

$$\alpha w = (\alpha_{w(1)}, \alpha_{w(2)}, \dots, \alpha_{w(n)}).$$

と考える. 非減少な composition, すなわち $\alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_n$ であるような composition α を分割 (partition) と呼ぶ. n 個の変数 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ の多項式環を $\mathbb{Z}[x]$ と記す. これには置換群 S_n が変数を置換するように作用する. すなわち, 多項式 $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ と置換 $w \in S_n$ に対し,

$$w(f(x_1, \dots, x_n)) := f(x_{w(1)}, \dots, x_{w(n)})$$

とする. $i \in [n-1]$ に対し, Demazure 作用素 π_i を次のように定める.

$$\pi_i(f) := \frac{x_i f - s_i(x_i f)}{x_i - x_{i+1}}. \quad (2.1)$$

ここで, $s_i \in S_n$ は i と $i+1$ だけを入れ替える互換である. 古典的な差分商作用素 $\partial_i = \frac{1-s_i}{x_i-x_{i+1}}$ を使えば, $\pi_i(f) = \partial_i(x_i f)$ のように表すことができる. これより, $\pi_i f = f$ が f が x_i と x_{i+1} に関して対称であることを意味することや, 関係式

$$\begin{cases} \pi_i^2 = \pi_i & (i \in [n-1]), \\ \pi_i \pi_{i+1} \pi_i = \pi_{i+1} \pi_i \pi_{i+1} & (i \in [n-2]), \\ \pi_i \pi_j = \pi_j \pi_i & (|i-j| \geq 2). \end{cases} \quad (2.2)$$

を満たすことは容易に確かめることができる. これらの性質は, Key 多項式の以下の帰納的な定義を可能にする.

定義 2.1. composition $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ に付随した Key 多項式 $\kappa_\alpha(x)$ は, α が分割ならば $\kappa_\alpha := x^\alpha$ とする. もし分割でなければ, $\alpha_i < \alpha_{i+1}$ となる添字 i が存在するので,

$$\kappa_\alpha(x) := \pi_i(\kappa_{\alpha s_i}(x)) \quad (2.3)$$

と定める.

例 2.2. $\lambda = (2, 1, 0)$ とすると, $\kappa_\lambda = x_1^2 x_2$ であり, 以下のように計算できる.

$$\begin{aligned}\kappa_{(1,2,0)} &= \pi_1(\kappa_\lambda) = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2, & \kappa_{(2,0,1)} &= \pi_2(\kappa_\lambda) = x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3, \\ \kappa_{(1,0,2)} &= \pi_2(\kappa_{(1,2,0)}) = x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_2^2 + x_1 x_2 x_3 + x_1 x_3^2, \\ \kappa_{(0,2,1)} &= \pi_1(\kappa_{(2,0,1)}) = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_2 x_3 + x_2^2 x_3, \\ \kappa_{(0,1,2)} &= \pi_1(\kappa_{(1,0,2)}) = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + 2x_1 x_2 x_3 + x_1 x_3^2 + x_1^2 x_3 + x_2^2 x_3 + x_2 x_3^2.\end{aligned}$$

2.1 半標準 Key タブロー

$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ を composition とする. α の形のダイアグラムとは, 集合 $\{(i, j) \in [n] \times [n] \mid 1 \leq j \leq \alpha_i\}$ のことで, この集合のそれぞれ元 (i, j) を箱と呼ぶ. 実際には, 下から数えた i 行目に α_i 個の箱を左詰めに並べた図形を考えている. α が分割の場合は, 古典的なヤング図形を表している.

定義 2.3 ([Ass18] p.8781 (cf. [Ass17])). α の形の (半標準) Key タブロー T は, α のダイアグラムのそれぞれの箱に正の整数を, 下の条件を満たすように一つずつ与えたものである.

(K1) 各行は右に非増加;

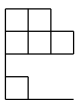
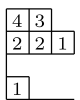
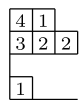
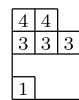
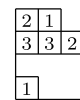
(K2) i 行目に使う数字は最大 i まで;

(K3) 各列において, 各数字は最大一回まで使用可能;

(K4) ある行において数字 a が数字 b より上にあったとする. もし $a < b$ ならば, b のすぐ右に箱があって, そこに入る数字 c は $a < c$ を満たす.

α の key タブローの全体を $\text{SSKT}(\alpha)$ と表す. key タブロー T に対し, $T(i, j)$ を箱 (i, j) に入れた数字を表すことにする. また, key タブロー T に対して, 対応する単項式を $x^T := x_1^{r_1} x_2^{r_2} \cdots x_n^{r_n}$ で定める. ここで r_i は T に使われた数字 i の個数である.

例 2.4. $\alpha = (1, 0, 3, 2)$ のダイアグラムと, いくつかの key タブロー T とそれに対応する単項式 x^T をここに記す.

	T		x^T				
		$x_1^2 x_2^2 x_3 x_4$		$x_1^2 x_2^2 x_3 x_4$		$x_1 x_3^3 x_4^2$	$x_1^2 x_2^2 x_3^2$

次の公式は Assaf によって [Ass18] で証明された. 本稿では下記の命題 2.6 に基づいた別証明を解説する.

定理 2.5 ([Ass18] Proposition 2.6 (cf. [Ass17])).

$$\kappa_\alpha(x) = \sum_{T \in \text{SSKT}(\alpha)} x^T. \quad (2.4)$$

Proof. 式 (2.4) の右辺を $K_\alpha(x)$ とかく. α の上昇数 a を $a := \#\{(i, i+1) \mid \alpha_i < \alpha_{i+1}, i \in [n-1]\}$ とする. この a に関する帰納法を使う. $a = 0$ の時は α は分割なので, 定義より $\kappa_\alpha = x^\alpha$ である. この時, α の key タブローは条件 (K2) より i 行目に i を入れるしかない. 次, $a > 0$ を仮定し, $\alpha_t < \alpha_{t+1}$ となる $t \in [n-1]$ を選ぶ. この時, 式 (2.3) と命題 2.6 より,

$$\kappa_\alpha = \pi_t(\kappa_{\alpha s_t}) = \pi_t(K_{\alpha s_t}) = K_\alpha$$

となる. ただし, 真ん中の等式は帰納法の仮定に基づく. □

命題 2.6. $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ を *composition* とし, ある $t \in [n-1]$ に対し $\alpha_t < \alpha_{t+1}$ を仮定する. この時,

$$K_\alpha = \pi_t K_{\alpha s_t}$$

が成り立つ.

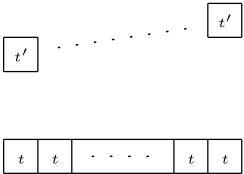
3 key タブローにおける t と $t+1$ の配置

命題 2.6 の証明の要は, key タブロー T において t と $t+1$ がどのように配置されるかを分類したところにある. 以下, $t' := t+1$ とおく. α あるいは α' の key タブロー T を考え, t と t' が入っている箱を**活箱**と呼ぶことにする. 活箱の配置を調べる上で, 鍵となる補題が以下である.

補題 3.1. T を key タブローとする. $i' > i$ とする. $T(i', j)$ と $T(i, j+1)$ が活箱で, $T(i, j)$ が活箱でないとする. この時, $T(i', j) = t$ かつ $T(i, j+1) = t'$ である (下の図を参照).

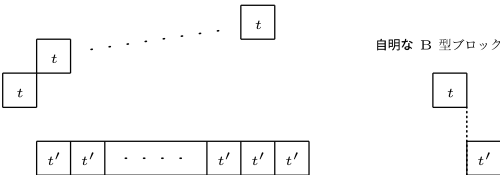
$$\begin{array}{c} i' \boxed{t} \\ \\ i \times \boxed{t'} \\ j \end{array}$$

以下 $\text{SSKT}(\alpha)$ あるいは $\text{SSKT}(\alpha')$ の同値類に対して、その活箱の配置を考える。活箱の配置のされ方として、次の A,B,C 型ブロックを考える。A 型ブロックは、各行に二つの活箱があり、下の箱には全て t が入って一行に並んでいて、上の箱には t' が入っていて行番号は左から右に非減少というものである。



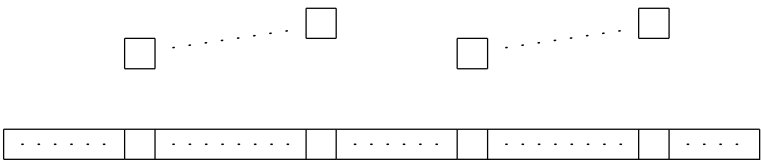
A 型ブロック

B 型ブロックは、A 型ブロックの t と t' を入れ替えたものに、下の図のように前後に活箱が一つずつ配置される。特に一列目の活箱は、2 列目の下の活箱より上にあり、高々上の活箱の位置までのところに配置されている。そして、最後の列の活箱は前の列の下の活箱の位置にあるとする。活箱が 2 段になっているところがないものは、自明な B 型ブロックとよぶ。



B 型ブロック

最後に、C 型ブロックは下の図のように、活箱が一つしかない列たちと二つある列たちが交互に続き、入る数字は他の箱の数字を変えずに t と t' のどちらにも変更可能な箱である (条件 (K1) から (K4) を保つながら)。ただし、最後の列は一つの活箱の列でなければならず、最初の列は二つ活箱の列でもよい。二つ活箱の列がないようなものを自明な C 型ブロックと呼ぶ。



C 型ブロック

次の命題が本稿の証明の要である。

命題 3.2. α の *key* タブローの活箱の配置は A,B,C 型ブロックたちの非交和となる。

SSKT(α) あるいは SSKT(α') の部分集合 $\mathcal{C}$ に対して,

$$R(\mathcal{C}) := \sum_{T \in \mathcal{C}} x^T$$

と定める.

同じ形のタブロー T_1 と T_2 は, 活箱の配置が同じ場合に, 同値であるとする. $\mathcal{A}$ を SSKT(α) あるいは SSKT(α') の同値類とすると,

$$R(\mathcal{A}) = f(x_t, x_{t'})g(x_i; i \in [n] \setminus \{t, t'\})$$

のように, 活箱から寄与する多項式とそれ以外の部分の積に分解できる. そこで, 命題 3.2 より, 次の系が導かれる.

系 3.3. $\mathcal{A}$ を SSKT(α) の同値類とすると $R(\mathcal{A})$ は x_t と $x_{t'}$ に関して対称である.

Proof. A,B 型ブロックからの寄与は x_t と $x_{t'}$ に関して対照であることは明らか. C 型ブロックからの寄与は,

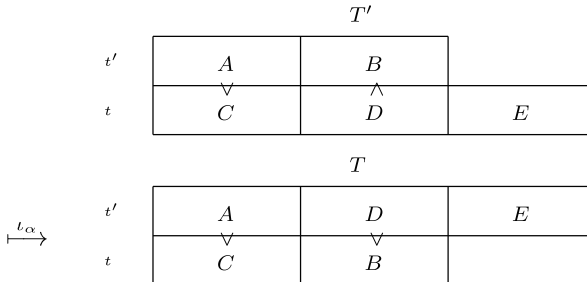
$$\left(\sum_{i=0}^a x_t^i x_{t'}^{a-i} \right) (x_t x_{t'})^b$$

である. ただし a は一つ活箱の列の数で, b は二つ活箱の列の数である. □

4 命題 2.6 の証明について

次の定義および命題によって SSKT(α') を SSKT(α) に埋め込んで比較する.

定義 4.1. 写像 $\iota_\alpha : \text{SSKT}(\alpha') \rightarrow \text{SSKT}(\alpha), T' \mapsto T$ を以下のように定める. 条件 (K4) より, T' の t, t' 行目の各列の大小関係が下の図のようになっている. B, D の部分は空集合の可能性もある. T' に対して, A, C の右側の部分を入れ替えることで T を定義する.



命題 4.2. 写像 ι_α は矛盾なく定義されていて, かつ, 単射である.

これにより, 命題 2.6 を示すには, $\text{SSKT}(\alpha)$ の同値類 $\mathcal{A}$ に対し,

$$R(\mathcal{A}) = \pi_t(R(\iota_\alpha^{-1}(\mathcal{A}))) \tag{4.1}$$

を示せばよい. 同値類 $\mathcal{A}$ の活箱の配置は, t, t' 行目に関して以下のようにになっている.

t' -th row	$t' \cdots t'$	$* \cdots *$		
t -th row	$t \cdots t$			

$R(\mathcal{A}')$ において, 図の $*$ の部分の寄与は

$$\left(\sum_{i=0}^a x_t^i x_{t'}^{a-i} \right) (x_t x_{t'})^b$$

である. ただし a は一つ活箱の列の数で, b は二つ活箱の列の数である. 一方, ι_α による $\mathcal{A}$ の逆像の活箱の配置は, 以下の 2 種類のパターンがありうる.

t' -th row	$t' \cdots t'$	$* \cdots *$		
t -th row	$t \cdots t$			

t' -th row	$t' \cdots t'$			
t -th row	$t \cdots t$	$t \cdots t$		

前者の同値類を $\mathcal{A}'_0$, 後者の同値類を $\mathcal{A}'_1$ とする. $\mathcal{A}'_1$ の t' 行目に活箱がない列からの寄与は

$$x_t^a (x_t x_{t'})^b$$

である. したがって, $\mathcal{A}_0 := \iota_\alpha \mathcal{A}'_0$ とし, $\mathcal{A}_1 := \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_0$ とすれば,

$$R(\mathcal{A}_0) = \pi_t(R(\mathcal{A}'_0)), \quad R(\mathcal{A}_1) = \pi_t(R(\mathcal{A}'_1))$$

がわかる. $\iota_\alpha^{-1} = \mathcal{A}'_0 \sqcup \mathcal{A}'_1$ なので, 式 (4.1) が示せた. □

参考文献

[AS17] Sami Assaf and Dominic Searles. Schubert polynomials, slide polynomials, Stanley symmetric functions and quasi-Yamanouchi pipe dreams. *Adv. Math.*, 306:89–122, 2017.

[Ass17] Sami Assaf. Weak dual equivalence for polynomials. *arXiv e-prints*, page arXiv:1702.04051, February 2017.

- [Ass18] Sami Assaf. Nonsymmetric Macdonald polynomials and a refinement of Kostka-Foulkes polynomials. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 370(12):8777–8796, 2018.
- [Dem74] Michel Demazure. Une nouvelle formule des caractères. *Bull. Sci. Math. (2)*, 98(3):163–172, 1974.
- [Koh91] Axel Kohnert. Weintrauben, Polynome, Tableaux. *Bayreuth. Math. Schr.*, (38):1–97, 1991. Dissertation, Universität Bayreuth, Bayreuth, 1990.
- [LS90] Alain Lascoux and Marcel-Paul Schützenberger. Keys & standard bases. In *Invariant theory and tableaux (Minneapolis, MN, 1988)*, volume 19 of *IMA Vol. Math. Appl.*, pages 125–144. Springer, New York, 1990.
- [RS95] Victor Reiner and Mark Shimozono. Key polynomials and a flagged Littlewood-Richardson rule. *J. Combin. Theory Ser. A*, 70(1):107–143, 1995.
- [Wac85] Michelle L. Wachs. Flagged Schur functions, Schubert polynomials, and symmetrizing operators. *J. Combin. Theory Ser. A*, 40(2):276–289, 1985.

International Christian University

Tokyo 181-8585

JAPAN

matsumura.tomoo@icu.ac.jp