

Generalized tangent の carrier と Lipschitz の不等式について

信大 理 浅田 明

§ 1. 曲線の generalized tangent.

n 変数関数 f が, a で, $\|y\|=1$ となる任意の y について,
($t>0$ より) 極限

$$Df(a, y) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \{f(a+ty) - f(a)\}$$

を持ち, $Df(a, y)$ が y の関数として, S^{n-1} の連続関数になる
時 f は (右側) Gateaux 微分可能と呼ぶ ([3], [4]).

$\gamma = \gamma(t)$ が, a より出発する R^n の曲線で

$$(1) \quad \gamma(t) \neq a, \quad t \neq 0, \quad \|\gamma(t) - a\| = O(t),$$

となる時, f が a で Gateaux 微分可能であれば

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \lim_{h \rightarrow 0} \int_h^s \frac{f(\gamma(t)) - f(a)}{t} dt = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \lim_{h \rightarrow 0} \int_h^s Df(a, \frac{\gamma(t)-a}{\|\gamma(t)-a\|}) \|\gamma(t)-a\| dt$$

たみら, (1) の 2 番目の仮定より, $\|Df(a, y)\| = \max_{y \in S^{n-1}} |Df(a, y)|$ と

置く時, $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \lim_{h \rightarrow 0} \int_h^s (f(\gamma(t)) - f(a))/t \cdot dt$ が存在すれば, 適当な正数

C が存在して (1) 之は $C = \overline{\lim_{t \rightarrow 0}} \|\gamma(t) - a\|/t$ とすればよい)

$$(2) \quad \left| \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} \lim_{h \rightarrow 0} \int_h^{\delta} \frac{f(\gamma(t)) - f(a)}{t} dt \right| \leq C \|Df(a, \gamma)\|$$

となる。従って Riesz の定理より、 a で Gateaux 微分可能な f に対して f について極限 $\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} \lim_{h \rightarrow 0} \int_h^{\delta} \frac{f(\gamma(t)) - f(a)}{t} dt$ が存在すれば S^{n-1} の測度 γ が存在して

$$(3) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} \lim_{h \rightarrow 0} \int_h^{\delta} \frac{f(\gamma(t)) - f(a)}{t} dt = \int_{S^{n-1}} Df(a, \gamma) d\gamma$$

となる。

定義. (3) によって定まる γ は γ の a での (右側) generalized tangent と呼ぶ $\mathcal{X}^+ \gamma(a)$ と書く ([1], [2]).

例 1. γ が $t=a$ で (右側) 微分可能な $\mathcal{X}^+ \gamma(a) = c \delta_\gamma$, c は正の定数, δ_γ は $\gamma (= S^{n-1})$ での Dirac 測度, である。

例 2. γ が R^2 で $r\theta = 1$ で与えられる γ は原点で generalized tangent を持ち, $\gamma(t) = (t \cos(\frac{1}{t}), t \sin(\frac{1}{t}))$ と表示した時 $\mathcal{X}^+ \gamma(0) = \frac{d\theta}{2\pi}$, S^1 上の standard measure, となる。

例 3. γ が R^2 で $t \sin \frac{1}{t}$, $t > 0$ の graph の時 S^1 ($0 \leq \theta < 2\pi$ で表示) の連続関数 g に対し

$$\begin{aligned} & \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} \lim_{h \rightarrow 0} \int_h^{\delta} g(\tan^{-1}(\sin \frac{1}{t})) \sqrt{1 + \sin^2(\frac{1}{t})} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \sin^2 v} g(\tan^{-1}(\sin v)) dv \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} g(\theta) \left(\frac{1}{\cos^2 \theta} \sqrt{\cos 2\theta} \right) d\theta \end{aligned}$$

となるから γ は原点で generalized tangent を持ち, $\text{car. } \mathcal{X}^+ \gamma(0) = [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$,

且て $\mathcal{X}^+ \gamma(a) = \frac{1}{\pi} \frac{d\theta}{\cos \theta \sqrt{\cos 2\theta}}$ となる。

§ 2. 関数の generalized derivation.

1 変数関数 $\chi(t)$ の graph が, generalized tangent を持つ条件を定める。

γ が $\chi(t)$ の $t=a$ から出発する graph なら $\gamma(t) = (a+t, \chi(a+t))$ なら ($t \geq 0$),

$$(4) \quad \lim_{s \rightarrow c} \frac{1}{s} \lim_{h \rightarrow c} \int_h^s \frac{f(\gamma(t)) - f(a)}{t} dt$$

$$= \lim_{s \rightarrow c} \frac{1}{s} \lim_{h \rightarrow c} \int_h^s Df(a, \tan^{-1}(\frac{\chi(a+t) - \chi(a)}{t})) \cdot \frac{\sqrt{t^2 + (\chi(a+t) - \chi(a))^2}}{t} dt$$

となる。従ってこの時

$$\text{car. } \mathcal{X}^+ \gamma(a) \subset [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

であり, 又 $g(\theta)$ が S' の連続関数なら $g(\tan^{-1} t)$ は R' の連続関数で $\lim_{t \rightarrow \infty} g(\tan^{-1} t)$ は共に存在するから

定理 1. 1 変数関数 $\chi(t)$ の graph が $t=a$ で generalized tangent を持つ場合には、極限

$$\lim_{s \rightarrow c} \frac{1}{s} \lim_{h \rightarrow c} \int_h^s g((\chi(a+t) - \chi(a))/t) dt$$

が, R' の, $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t)/\sqrt{1+t^2}$ が共に存在する様な, すべての連続関数に対して存在する事が必要十分である。

定義. $\mathcal{N}(R)$ を $L'_{loc}(R)$ に含まれ, 位相が $L'_{loc}(R)$ より弱くない

R' 上の関数空間とする すべて $f \in \mathcal{F}(R')$ に対し 極限

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \lim_{h \rightarrow 0} \int_h^s f\left(\frac{\chi(a+t) - \chi(a)}{t}\right) dt$$

が存在する時

$$(5) \quad \mathcal{J}_{\mathcal{F}(R')}^+ \chi(a)(f) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \lim_{h \rightarrow 0} \int_h^s f\left(\frac{\chi(a+t) - \chi(a)}{t}\right) dt$$

によって決まる $\mathcal{F}(R')^*$ ($\mathcal{F}(R')$ の dual space) の元 $\mathcal{J}_{\mathcal{F}(R')}^+ \chi(a) \in \mathcal{F}(R')^*$ の (右側) $\mathcal{F}(R')$ -derivative 又は generalized derivative と呼ぶ。

例 1. $\mathcal{F}(R') = R\langle t \rangle$, 関数 $\chi: t(t) = t$, 又は生成された一次元空間, とする時

$$\mathcal{J}_{\mathcal{F}(R')}^+ \chi(a)(ct) = c \left(\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \lim_{h \rightarrow 0} \int_h^s \frac{\chi(a+t) - \chi(a)}{t} dt \right)$$

なので, $\mathcal{J}_{\mathcal{F}(R')}^+ \chi(a)$ は (右側) Borel derivate $B_r \chi(a)$ と思ってい (CJ).

例 2. $\mathcal{F}(R') = \{f \mid f \text{ は連続, 且 } \lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) \text{ が共に存在する}\}$, とする. この時 $\delta_\infty: \delta_\infty(f) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$, $\delta_{-\infty}: \delta_{-\infty}(f) = \lim_{t \rightarrow -\infty} f(t)$, は共に $\mathcal{F}(R')^*$ の元になるが $\chi(t)$ が Weierstrass の例, $\chi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b^n \cos(c^n \pi t)$, c は奇数, $0 < b < 1$, $bc > 1 + \frac{3}{2}\pi$, の時

$$\mathcal{J}_{\mathcal{F}(R')}^+ \chi(a) = \delta_{-\infty}, \quad a = \frac{m}{c^k}, \quad m, k \text{ は整数},$$

となる. 尚同じ a について左側 generalized derivative は δ_∞ になる.

この例で他の点でどうなるか, 又他の例, 例えば Riemann の例ではどうなるかという計算はあまりむづかしい様である

定理 2. $\mathcal{F}(R')$ が $C(R')$ で dense, 且 f_a を $f_a(t) = f(a+t)$ とする時,

$f \in \mathcal{F}(R')$ なら $f_0 \in \mathcal{F}(R')$ となるとする。この時

(i). $\mathcal{J}_{\mathcal{F}(R')}^+ \lambda(a)$ は $R' \cup \{\pm\infty\}$, R' の 2 点 $\pm\infty$ による compact 化, 上の確率分布である。

(ii). $\mathcal{J}_{\mathcal{F}(R')}^+ \lambda_1(a)$, $\mathcal{J}_{\mathcal{F}(R')}^+ \lambda_2(a)$ が共に存在すれば $*$ を convolution として

$$\mathcal{J}_{\mathcal{F}(R')}^+ (\lambda_1 + \lambda_2)(a) = \mathcal{J}_{\mathcal{F}(R')}^+ \lambda_1(a) * \mathcal{J}_{\mathcal{F}(R')}^+ \lambda_2(a)$$

(iii). $\mathcal{J}_{\mathcal{F}(R')}^+ \lambda(a)$ が確率分布として平均を持てば, $\mathcal{F}$ を Fourier 変換とし $\pi(\mathcal{J}_{\mathcal{F}(R')}^+ \lambda(a)) > 0$ の時

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(\frac{1}{2\pi h} \log(\pi(\mathcal{J}_{\mathcal{F}(R')}^+ (c\lambda)(a))) \right) = B_r \lambda(a) t,$$

且し $B_r \lambda(a)$ は λ の a での右側 Borel 微分である。

§ 3. $\mathcal{F}(R')$ -derivative の carrier と Lipschitz の不等式

以上 $\mathcal{F}(R')$ は $C(R')$ の dense な部分空間になっているとする。定義 2.5

定理 3. λ が a の右側で Lipschitz 条件

$$(6) \quad L \leq \frac{\lambda(a+t) - \lambda(a)}{t} \leq K, \quad 0 < t < \varepsilon,$$

をある $\varepsilon > 0$ について満たし, a が $\mathcal{F}(R')$ -derivative を持てば

$$(7) \quad \text{car } \mathcal{J}_{\mathcal{F}(R')}^+ \lambda(a) \subset [L, K]$$

系. λ の a での右側 Dim derivative を $da^+ \lambda$, $D_a^+ \lambda$ とすれば

$$(7)' \quad \text{car } \mathcal{J}_{\mathcal{F}(R')}^+ \lambda(a) \subset [da^+ \lambda, D_a^+ \lambda].$$

しかしこの逆は一般に成立しない(簡単に反例が作れる)。

$\text{car } \mathcal{J}_{\mathcal{F}(R')}^+ \lambda(a)$ を含む最短の区間を決定する為次の lemma を使う。

Lemma 区間の特性関数 χ_a 常に $\mathcal{F}(R')$ の元により近似可能で、
 $\mathcal{F}(R')^+ \chi_a$ が存在すれば、(7) が成り立つ時任意の $\varepsilon > 0$ に対し
 m は Lebesgue measure として)

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} m(\{t \mid \frac{\chi(a+t) - \chi(a)}{t} \leq K + \varepsilon\} \cap (0, \delta]) / \delta = 1,$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} m(\{t \mid \frac{\chi(a+t) - \chi(a)}{t} \leq L - \varepsilon\} \cap (0, \delta]) / \delta = 0,$$

となる。

この lemma から $\mathcal{F}(R')^+ \chi_a$ が存在する時関数 $\chi_{\chi_a}^+(u)$ は

$$\chi_{\chi_a}^+(u) = \inf_{u' > u} \lim_{\delta \rightarrow 0} m(\{t \mid \frac{\chi(a+t) - \chi(a)}{t} \leq u'\} \cap (0, \delta]) / \delta,$$

で定義出来且 $(\chi_{\chi_a}^+)$ は単調増加だから $\chi_{\chi_a}^+$ に関する Lebesgue-Stieltjes 積分を定義出来

$$(8) \quad \mathcal{F}(R')^+ \chi_a(f) = \int_R f(u) d\chi_{\chi_a}^+(u)$$

となる事が解るが、(8) から

$$(9) \quad Ad_a^+ \chi = \inf_u \{u \mid \chi_{\chi_a}^+(u) = 1\}, \quad Ad_a^+ \chi = \sup_u \{u \mid \chi_{\chi_a}^+(u) = 0\},$$

と置けば

定理 4. $Ad_a^+ \chi, Ad_a^+ \chi$ は不等式

$$(10) \quad d_a^+ \chi \leq Ad_a^+ \chi \leq Ad_a^+ \chi \leq D_a^+ \chi$$

を満たし、且

$$(11) \quad \text{car. } \mathcal{F}(R')^+ \chi_a \subset [Ad_a^+ \chi, Ad_a^+ \chi].$$

又 (7) が成立すれば常に $L \leq Ad_a^+ \chi, K \geq Ad_a^+ \chi$ である。

尚 (9) は

$$(9)' \quad \inf_u \{u \mid \lim_{\delta \rightarrow 0} m(\{t \mid \frac{\chi(a+t) - \chi(a)}{t} \leq u\} \cap (0, \delta]) / \delta = 1\},$$

$$\sup_u |u| \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} m(|t| \frac{x(a+t) - x(a)}{\varepsilon}) \leq u \wedge (c, \varepsilon] / \varepsilon = c,$$

となるから, $\text{car } \mathcal{F}_\pi(R)^+ x(a)$ が compact になる為には, x が a で, Lévy の意味で (右側) Lipschitz 連続になる事, 必要十分である ([5]).

定理 5. $\mathcal{F}_\pi(R)^+ x(a) = \delta_c$ (c での Dirac measure) となる為の必要十分条件は, x が a で (右側) 微分可能で $AD^+ x(a) = c$ となる事である.

証明. 必要性は定理 4 から任意の $\varepsilon > 0$ に対し

$$(12) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} m(|t| c - \varepsilon \leq \frac{x(a+t) - x(a)}{\varepsilon} \leq c + \varepsilon) \wedge (c, \varepsilon] / \varepsilon = 1$$

となる事から解る. 逆に (12) が成立すれば連続な f に対し

$$|\lim_{h \rightarrow 0} \int_h^0 f(\frac{x(a+t) - x(a)}{\varepsilon}) dt - f(c) s|$$

$$\leq (\max_{c-\varepsilon \leq x, y \leq c+\varepsilon} |f(x) - f(y)|) s + o(s)$$

が任意の $\varepsilon > 0$ に対し成立するから十分の事が出る.

文 献

- [1]. Asada, A.: Generalized tangents of curves and generalized vector fields, J. Fac. Sci. Shinshu Univ. 6 (1971), 45 - 75.
- [2]. Asada, A.: Generalized integral curves of generalized vector fields, J. Fac. Sci. Shinshu Univ. 7 (1972), 59 - 118.
- [2]'. Asada, A.: Generalized vector field and its local integration.

Proc. Japan Acad. 49 (1973), 73 - 76.

[3]. Gâteaux, R.: Fonctions d'une infinité des variables indépendentes,

Bull. Soc. Math. France, 50 (1919), 70 - 96.

[4]. Hille, E - Phillips, R. S.: Functional analysis and semi-groups,

Providence, 1957.

[5]. Lévy, P.: Théorie de l'addition des variables aléatoires, Paris,

1937.

[6]. Marcinkiewicz, J. - Zygmund, A.: On the differentiability of

functions and summability of trigonometrical series, Fund. Math.

26 (1936), 1 - 43.