

Toughness and n -factors

東大理 榎本 彦衛 (Hikoe Enomoto)

斎藤 明 (Akira Saito)

ここでは向きのない単純グラフのみを考える。

Chvátal は [1] において

$$G \text{ が } t\text{-tough} \iff [k(G-S) \geq 2 \implies |S| \geq t \cdot k(G-S)]$$

と定義した。ただし、 t は実数で、 $k(H)$ はグラフ H の連結成分の数を表わす。 $\max\{t \mid G \text{ は } t\text{-tough}\}$ をグラフ G の toughness と呼び、 $t(G)$ と書くことにする。 G が完全グラフでない時には、

$$t(G) = \min \left\{ \frac{|S|}{k(G-S)} \mid k(G-S) \geq 2 \right\},$$

完全グラフの場合には、

$$t(K_m) = \infty$$

となる。Chvátal は上記論文において、

- 1) $G: 1\text{-tough}, |G|: \text{even} \implies G$ は 1-factor を持つ
- 2) $G: \text{Hamiltonian} \implies G$ は 1-tough

3) block の square は 2-tough

となることを示し、"2-tough $\Rightarrow$ Hamiltonian" となることが証明できれば、"block の square は Hamiltonian" という定理の別証明となることを注意してゐる。更に、

4) $(\frac{3}{2} - \varepsilon)$ -tough だが、2-factor を持たないグラフ

5) $\frac{3}{2}$ -tough だが Hamiltonian でないグラフを構成し、次の (6), (7) を予想した。

6) $\frac{3}{2}$ -tough $\Rightarrow$ 2-factor を持つ

7) $(\frac{3}{2} + \varepsilon)$ -tough $\Rightarrow$ Hamiltonian

しかし、 $\kappa(G) > \frac{3}{2}$ だが Hamiltonian でないグラフを Thomassen が構成したようで、[2] では

8) 2-tough $\Rightarrow$ Hamiltonian

という予想に変わっている。また、一般の場合には

9) $G: n$ -tough, $n \cdot |G|: \text{even} \Rightarrow G$ は n -factor を持つ

と [1] において予想されている。

我々は、[3] において、次の2つの定理を証明したが、ほぼ同じ頃に、定理1は B. Jackson と P. Katerinis (Goldsmiths' College), 定理2は N. Tsikopoulos (McGill University) によっても独立に証明されていることが講演後に判明した。

定理 1 $G: n\text{-tough}$, $n \cdot |G|: \text{even}$, $|G| \geq n+1$

$\Rightarrow G$ は n -factor を持つ

定理 2 任意の自然数 n と、任意の正数 ε に対し、 $(n-\varepsilon)\text{-tough}$, $n \cdot |G|: \text{even}$, $|G| \geq n+1$ だが、 n -factor を持たないグラフ G が存在する。

講演の終りに、toughness の定義を少し変え、

$$\tau(G) := \min \left\{ \frac{|S|}{k(G-S)-1} \mid S \subseteq V(G) \right\}$$

を使って、定理 1 と同様の結果が得られないだろうか、と述べたが、 $n \leq 2$ の場合にはうまくいくことがわかった。

定理 3 $\tau(G) \geq 1$, $|G|: \text{even} \Rightarrow G$ は 1-factor を持つ

定理 4 $\tau(G) \geq 2$, $|G| \geq 3 \Rightarrow G$ は 2-factor を持つ

明らかに、 $\tau(G) > \nu(G)$ が成り立つので、これらの定理は定理 1 より強い結果になっている。残念ながら、 $n \geq 3$ の時には同様の結果は成り立たないが、定理 1 を改良することは可能である。

定理 5 次の (1) ~ (3) が成り立てば、 G は n -factor を持つ。

$$(1) \quad k(G-S) \geq 2 \Rightarrow |S| \geq n \cdot k(G-S) - \frac{7}{8}n$$

$$(2) \quad n \cdot |G|: \text{even}$$

$$(3) \quad |G| \geq n+1$$

以下、定理 5 の証明の概略を述べることにする。

$V(G)$ の disjoint subsets A, B に対し、 $G-A-B$ の連結成分 C は $n|C| + e(C, B)$ が奇数の時、奇成分 と呼ばれ、奇成分の数は $h(A, B)$ と書かれる。また、

$$\delta(A, B) := n|A| + \sum_{x \in B} \{d_{G-A}(x) - n\} - h(A, B)$$

と定義すると、

$$(A) \quad \delta(A, B) \equiv n \cdot |G| \pmod{2}$$

$$(B) \quad n\text{-factor が存在する} \iff \text{すべての } A, B \text{ について}$$

$$\delta(A, B) \geq 0$$

の成り立つことは良く知られている (Tutte の f -factor theorem と呼ばれているものの特別な場合.)。従って、 G に n -factor が存在しないならば、 $\delta(A, B) < 0$ となる A, B が存在するわけであるが、 A を maximal に取ると、任意の $y \in V(G) - A - B$ について $e(y, B) \leq n-1$ が成り立つ。実際、 $e(y, B) \geq n$ とすると、 $A' := A \cup \{y\}$ と置いた時、

$$\begin{aligned} \delta(A', B) &= n|A'| + \sum_{x \in B} \{d_{G-A'}(x) - n\} - h(A', B) \\ &\leq n|A| + n + \sum_{x \in B} \{d_{G-A}(x) - n\} - e(y, B) \\ &\quad - h(A, B) + 1 \end{aligned}$$

$$\leq \delta(A, B) + 1$$

となるが、 (A) より $\delta(A', B) \equiv \delta(A, B) \pmod{2}$ が成り立つので、 $\delta(A', B) \leq \delta(A, B) < 0$ となり、 A の極大性に反する。

このことから、次の補題を証明すれば、定理5の成り立つことがわかる。

補題6 $V(G)$ の disjoint subsets A, B で、次の性質、

(1) ~ (4) を満たすものが存在したとする。

(1) G は完全グラフではない

(2) 任意の $x \in A$ について、 $\Gamma(x) = V(G) - \{x\}$. (ただし、 $\Gamma(x)$ は x と隣接している頂点の集合を表わす.)

(3) 任意の $y \in V(G) - A - B$ について、 $e(y, B) \leq n-1$

(4) $n|A| + \sum_{x \in B} \{d_{G-A}(x) - n\} - k(G-A-B) \leq -2$

この時、 $V(G)$ の部分集合 S であって、

(i) $k(G-S) \geq 2$

(ii) $|S| < n \cdot k(G-S) - \frac{7}{8}n$

を満たすものが存在する。

[証明] 1°) $|G| \leq n+1$ の時には隣接していない2頂点 u, v を取り、 $S := V(G) - \{u, v\}$ とおくと、 $k(G-S) = 2$ かつ $|S| \leq n-1 < 2n - \frac{7}{8}n$ が成り立つ。

以下、 $|G| > n+1$ と仮定し、 $|G|$ に関する帰納法を使う。

2°) 任意の $x \in B$ について $d_{G-A}(x) \geq n$ が成り立つ時、 $G-A-B$ の連結成分を $C_1, \dots, C_r$ とし、 C_i の元 y_i を任意に選ぶ。 $R := \bigcup_{i=1}^r \Gamma(y_i) \cap B$ と置き、 I を $B-R$ の maximal stable subset とする。 $S := A \cup R \cup \Gamma(I)$ とおく。

$$\begin{aligned} k(G-S) &\geq r + |I| \geq r \geq n|A| + \sum_{x \in B} \{d_{G-A}(x) - n\} + 2 \\ &\geq 2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |S| &\leq |A| + |R| + \sum_{x \in I} d_{G-A}(x) \\ &\leq |A| + r(n-1) + \sum_{x \in I} \{d_{G-A}(x) - n\} + n|I| \\ &\leq n|A| + \sum_{x \in B} \{d_{G-A}(x) - n\} - r - (n-1)|A| + rn + n|I| \\ &\leq -2 + n \cdot k(G-S) - (n-1)|A| \end{aligned}$$

が成り立つ。 $A \neq \emptyset$ ならば

$$|S| \leq n \cdot k(G-S) - n - 1 < n \cdot k(G-S) - \frac{7}{8}n$$

となるので、 $A = \emptyset$ としてよい。

すべての $x \in B$ について $d_G(x) = d_{G-A}(x) > n$ とすると、
(4) より $|B| - r \leq -2$ となり、

$$k(G-B) = r \geq |B| + 2 \geq 2,$$

$$|B| \leq r - 2 \leq n \cdot r - n < n \cdot k(G-B) - \frac{7}{8}n$$

が成り立つ。従って、次数が n の頂点 x が B に存在する。

$\chi = \mathbb{Z}$. $S := \Gamma(x)$ とおく.

$$k(G-S) \geq 2 \quad (\because |G| > n+1 \text{ より } V(G)-S-\{x\} \neq \emptyset)$$

$$|S| = n \leq n \cdot k(G-S) - n < n \cdot k(G-S) - \frac{7}{8}n$$

が成り立つ.

以下、 $d_{G-A}(x) < n$ となる B の点 x が存在する場合を考える.

3°) B の点 x が $d_{G-A}(x)$ が最小のものを取る. n 点部分集合 R で $R-A = \Gamma(x)-A$ となるものを任意に取り.

$$G' := G-R-\{x\}, \quad A' := A-R, \quad B' := B-R-\{x\},$$

$$\alpha := |A \cap R|, \quad \beta := |B \cap R| \text{ とおく.}$$

$$(4') \quad n|A'| + \sum_{y \in B'} \{d_{G'-A'}(y) - n\} - k(G'-A'-B')$$

$$\leq n(|A| - \alpha) + \sum_{y \in B'} \{d_{G-A}(y) - n\} - \{k(G-A-B) - (n - \alpha - \beta)\}$$

$$\leq n|A| + \sum_{y \in B} \{d_{G-A}(y) - n\} - k(G-A-B) - n\alpha$$

$$- (\beta + 1)(n - \alpha - n) + n - \alpha - \beta$$

$$\leq -2 - (n - \beta)(\alpha - 1)$$

$$\leq -2 \quad (\because n > \beta, \alpha = n - d_{G-A}(x) > 0)$$

が成り立つ.

従って、 G' が完全グラフでなければ、帰納法により.

$$k(G'-S') \geq 2, \quad |S'| < n \cdot k(G'-S') - \frac{7}{8}n \text{ となる } S'$$

が存在する。(仮定 (2) より $A' \subseteq S'$ となることに注意.)

そこで、 $S := R \cup S'$ とおく。

$$k(G-S) = k(G'-S') + 1 \geq 2,$$

$$|S| = |R| + |S'|$$

$$< n + n \cdot k(G'-S') - \frac{7}{8}n$$

$$= n \cdot k(G-S) - \frac{7}{8}n$$

となる。

以下、 G' が完全グラフの場合を考える。

$$4^0) \quad \alpha' := |A'|, \quad \beta' := |B'|, \quad \gamma' := |V(G) - \{x\} - R - A'|,$$

$\gamma := |R - A|$ とおく。 x として $d_{G-A}(x)$ が最小のものを選んだことに、 G' が完全グラフであることから、 $y \in B'$ は S は。

$$d_{G-A}(y) \geq \max\{\gamma, \gamma'-1\}$$

が成り立つ。また、

$$k(G-A-B) \leq |V(G) - A - B|$$

$$= \gamma - \beta + \gamma' - \beta'$$

が成り立つので、条件 (4) より

$$n(\alpha + \alpha') + (\beta + 1)(\gamma - n) + \beta' \{\max\{\gamma, \gamma'-1\} - n\}$$

$$-(\gamma - \beta) - (\gamma' - \beta') \leq -2$$

が得られる。従って、

$$n\alpha' \leq \beta(n-r-1) + \beta'(n-1 - \max\{r, r'-1\}) \\ - n^2 + n - 2 + nr + r'$$

と仮定して、 $\beta \leq r, \beta' \leq r', n-r-1 \geq 0, n-r' \geq 0$ が示せるので、
(また(4')より)

$$n\alpha' \leq r(n-r-1) + r'(n-1 - \max\{r, r'-1\}) \\ - n^2 + n - 2 + nr + r' \\ = (2n-1)r - r^2 + r'n - r' \max\{r, r'-1\} \\ - n^2 + n - 2$$

と仮定して、

$r \geq r' + 1$ の時

$$n\alpha' \leq r(2n-1) - r^2 + r'(n-r) - n^2 + n - 2 \\ \leq r(2n-1) - r^2 + (r-1)(n-r) - n^2 + n - 2 \\ = 3rn - 2r^2 - n^2 - 2 \\ \leq \frac{1}{8}(n^2 - 2)$$

と仮定して、従って、 $S := R \cup A'$ とおくと、 $k(G-S) \geq 2$,

$$|S| = n + \alpha' \leq \frac{9}{8}n - \frac{1}{8}n \\ < n \cdot k(G-S) - \frac{7}{8}n$$

が成り立つ。

以下、 $r \leq r'$ の場合を考える。

$$n\alpha' \leq (2n-1)r - r^2 + r'(n+1-r') - n^2 + n - 2$$

より、 $r \geq (n+1)/2$ が必要。

$$\begin{aligned}
n\alpha' &\leq (2n-1)r - r^2 + r(n+1-r) - n^2 + n - 2 \\
&= 3nr - 2r^2 - n^2 + n - 2 \\
&\leq \frac{9}{8}n^2 + n - 2,
\end{aligned}$$

$r \leq (n+1)/2$ ならば、

$$\begin{aligned}
n\alpha' &\leq (2n-1)r - r^2 + \frac{(n+1)^2}{4} - n^2 + n - 2 \\
&= \frac{3n-5}{2} \\
&\leq \frac{9}{8}n^2 + n - 2
\end{aligned}$$

と成る。

いずれにしても、 $S := R \cup A'$ とおくと、 $k(G-S) \geq 2$,

$$\begin{aligned}
|S| = n + \alpha' &\leq \frac{9}{8}n + 1 - \frac{2}{n} \\
&< n \cdot k(G-S) - \frac{7}{8}n + 1
\end{aligned}$$

が成り立つ。

$D := R - A$, $D' := V(G) - \{x\} - R - A'$ とおく。Dの部分集合Xで、 $|\Gamma(X) \cap D'| < |X|$ となるものがあれば、

$S := (R - X) \cup A' \cup (\Gamma(X) \cap D')$ とおくと、

$$k(G-S) \geq 2 \quad (\because D' - \Gamma(X) \neq \emptyset)$$

$$|S| < n \cdot k(G-S) - \frac{7}{8}n + 1 - 1$$

となることは上で同様にしてわかる。

以下、Dの任意の部分集合Xに対して $|\Gamma(X) \cap D'| \geq |X|$ が成り立つと仮定する。特に、Dの任意の元yについて $\Gamma(y) \cap D' \neq \emptyset$ 。また、 $|\Gamma(D) \cap B'| \geq r - (r' - \beta')$ に注意。

$$\begin{aligned}
 5^{\circ}) \quad \sum_{y \in B'} d_{G-A}(y) &\geq \beta'(r'-1) + e(B', D) \\
 &\geq \beta'(r'-1) + r - (r' - \beta')
 \end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned}
 n\alpha' &\leq \beta(n-r+1) + \beta'(n+1) - \beta'(r'-1) - r + r' - \beta' \\
 &\quad - n^2 + n - 2 + nr - 2r - r' \\
 &= \beta(n-r+1) + \beta'(n-r'+1) + (n-3)r \\
 &\quad - n^2 + n - 2
 \end{aligned}$$

となる。4°) と同様の計算により、 $\beta' < r'$ ならば

$$\begin{aligned}
 n\alpha' &\leq r(n-r+1) + (r'-1)(n-r'+1) + (n-3)r \\
 &\quad - n^2 + n - 2 \\
 &\leq \frac{1}{8}n^2 - 3,
 \end{aligned}$$

$\beta < r$ ならば、

$$\begin{aligned}
 n\alpha' &\leq (r-1)(n-r+1) + r'(n-r'+1) + (n-3)r \\
 &\quad - n^2 + n - 2 \\
 &\leq \frac{1}{8}n^2 - 3
 \end{aligned}$$

となる。

従って、2. $\beta = r$, $\beta' = r'$ の場合も考えればよい。

$$6^{\circ}) \quad B_1 := \{y \in D = R \cap B \mid d_{G-A}(y) = r, |\Gamma(y) \cap B'| = 1\}$$

と置く。

$$\sum_{y \in D} \{d_{G-A}(y) - d_{G-A}(x)\} + e(B', D) \geq 2r - |B_1|$$

75 の 2". $B_1 = \emptyset$ 75 5 12".

$$\begin{aligned} n\alpha' &\leq r(n-r+1) + r'(n+2-r') - 2r \\ &\quad - n^2 + n - 2 + nr - 2r - r' \\ &\leq \frac{1}{8}(n^2 - 4n - 12) \end{aligned}$$

275 3 の 2" $B_1 \neq \emptyset$ 4 12 5 11. もう少し一般に.

$$M := \sum_{y \in D} \{d_{G-A}(y) - d_{G-A}(x) + |\Gamma(y) \cap B'|\} \geq 2r - 2$$

75 3 12".

$$n\alpha' \leq \frac{1}{8}(n^2 - 4n + 4)$$

275 1. 定理が成り立つ.

$y \in B_1$ 75 5 12". $D - \Gamma(y)$ は 1 点になる. この点を $\varphi(y)$ と書くことにする.

Case 1 $\varphi(y) \in B_1$ 275 3 $y \in B_1$ が存在するとき.

x のかわりに y を使う. すなわち, $S := \Gamma(y) \cup A$ とおくと, $e(\varphi(y), \Gamma(y) \cap B) = r - 1$ となり,

$$\sum_{z \in \Gamma(y) \cap B} \{d_{G-A}(z) - r + |(\Gamma(z) - \Gamma(y) - \{y\}) \cap B|\} \geq 2r - 2$$

が成り立つ.

Case 2 任意の $z \in \varphi(B_1)$ について、

$$d_{G-A}(z) - \gamma + e(z, B') \geq 2 + |\varphi^{-1}(z)|$$

が成り立つ時、

$$M = \sum_{z \in \varphi(B_1)} \{d_{G-A}(z) - \gamma + e(z, B') + |\varphi^{-1}(z)|\}$$

$$+ \sum_{w \in D - B_1 - \varphi(B_1)} \{d_{G-A}(w) - \gamma + e(w, B')\}$$

$$\geq 2|D|$$

$$= 2\gamma$$

となる。

Case 3 ある $z \in \varphi(B_1)$ について、

$$d_{G-A}(z) - \gamma + e(z, B') < 2 + |\varphi^{-1}(z)|$$

となる時、 $\Gamma(z) \cap \varphi^{-1}(z) = \emptyset$ より

$$d_{G-A}(z) - \gamma + |\varphi^{-1}(z)| \leq e(z, B')$$

に注意すると、

$$2\gamma \leq 2d_{G-A}(z) \leq 2\gamma + 1$$

となるので、 $d_{G-A}(z) = \gamma$ がわかる。従って、任意の

$y \in \varphi^{-1}(z)$ に対し、

$$|\Gamma(z) \cap \Gamma(y) \cap D| \geq \gamma - |\varphi^{-1}(z)| - 1$$

が成り立つ。以下、 $\ell := |\varphi^{-1}(z)|$ とおく。

$$|\Gamma(z) \cap D| = \gamma - \ell - 1$$

の時には、 x のかわりに z を使うことにすると、

$e(B - \{z\} - P(z), P(z)) \geq l(r-l) + r-l$
 となり、 $1 \leq l \leq r-2$ の時には O.K. $l = r-1$ の時
 には、

$$\varphi^{-1}(z) \subseteq P(x) - P(z) - \{z\}$$

より

$$\sum_{w \in P(z) \cap B} |P(w) \cap (B - P(z) - \{z\})| \geq 2r-2$$

となる。

$$|P(z) \cap D| = r-l-2$$

の時には、 $D - P(z) - \{z\} - \varphi^{-1}(z)$ は 1 点 1 つあるので、

その点を w とする。 $e(D, B') \leq 2r-3$ とすると、

$$2r-3 \geq l+1 + e(w, B') + r-2$$

より $e(w, B') \leq r-l-2$, 従って、 $|P(z) \cap P(w) \cap B|$
 $\geq l+2$ となる。 $1 \leq l \leq r-2$ に注意すると、

$$\begin{aligned} e(P(z), B - \{z\} - P(z)) \\ &\geq l(r-l-1) + (l+2) + (r-l-1) \\ &\geq 2r-1 \end{aligned}$$

となる。

これで補題 6 (従って定理 5) が証明できたことになり。
 次のような例を考えると、この結果が *best possible* に近い
 ことがわかる。

例 $G = L(K_{2,l}) + K_m$ とする.

(i) $nm + 2l(l-n) < 0$ ならば n -factor を持たない.

(ii) $k(G-S) \geq 2$ ならば $k(G-S) = 2$ から $|S| \geq l+m$.

従って $n \geq 4$ ならば $n \cdot |G| = \text{even}$, G は n -factor を持たないが.

$$k(G-S) \geq 2 \Rightarrow |S| \geq \left\lfloor \frac{9n-1}{8} \right\rfloor$$

が成り立つように l, m を選べる. たとえば.

$$n = 16p + 1 \quad (p > 0)$$

の時は.

$$l = 12p + 1$$

$$m = 6p$$

とすると $k(G-S) \geq 2 \Rightarrow |S| \geq \frac{9}{8}n - \frac{1}{8}$ となる.

文 献

[1] V. Chvátal, Tough graphs and hamiltonian circuit, Discrete Math. 5 (1973) 215-218

[2] J.A. Bondy - U.S.R. Murty, Graph Theory with Applications, MacMillan (1976)

[3] H. Enomoto - A. Saito, Toughness and n -factors of finite graphs, Technical Report 84-03, Department of Information Science, University of Tokyo (1984)